1 Pracovní úkol

1. Vyneste do grafu disperzní relaci (spojitou závislost indexu lomu na vlnové délce) měřicího hranolu GoF3 pomocí údajů v tabulce 1.2.2.
2. Stanovte disperzní relaci optických skel, jejich střední disperzi, relativní střední disperzi a Abbeovo číslo. Podle přiloženého výpisu z katalogu optických skel proveďte identifikaci měřených vzorků. Disperzní relaci vyneste do grafu.
3. Stanovte teplotní závislost indexu lomu pro zadanou kapalinu pro tři různé vlnové délky v teplotním intervalu 20° – 50° . Zpracujte naměřené závislosti do grafu.
4. Spočtěte chybu nepřímého měření indexů lomu pevných látek i kapalin a to obecně i numericky. V úkolu 2. spočtěte chybu nepřímého měření střední disperze, relativní střední disperze a Abbeova čísla.

2 Teorie

Pro měření indexu lomu optických skel použijeme metodu mezního úhlu (viz obrázek 1). Ze zdroje Z vychází paprsky, které po průchodu čočkou dopadají (některé kolmo, některé pod malým úhlem) na sklo o neznámém indexu lomu N_2. Poté se lámou dle zákona lomu:

$$N_1 \sin \alpha_1 = N_2 \sin \alpha_2, \tag{1}$$

kde α_2 je úhel, pod kterým se paprsky lámou (v našem případě je blízký 90°), N_1 je index lomu materiálu, do kterého se paprsky lámou (v našem případě známý), a to pod úhlem α_1. Je-li úhel α_2 roven $\pi/2$, potom úhel α_1 nazýváme úhlem mezním α_m; platí pro něj vztah:

$$\sin \alpha_m = \frac{N_2}{N_1} \tag{2}$$

Je zřejmé, že musí platit nerovnost $N_1 > N_2$. Žádný paprsek se nemůže lomit pod úhlem větší než α_m. Proto po lomu na kolmé stěně naměříme úhel minimálně ε. V našem případě však budeme měřit úhle ϕ, který s ε souvisí jednoduchým vztahem:

$$\phi = \pi/2 - \varepsilon \tag{3}$$

Z geometrie úlohy a zákona lomu (1) resp. (2) můžeme odvodit vztah pro výpočet N_2:

$$N_2 = \sqrt{N_1^2 - \cos^2 \phi} \tag{4}$$

Chybu nepřímého měření N_2 spočítáme postupem popsaným v [1]:

$$\sigma_{N_2} = \sqrt{\left(\frac{N_1}{\sqrt{N_1^2 - \cos^2 \phi}} \right)^2 \sigma_{N_1}^2 + \left(\frac{\cos \phi \sin \phi}{\sqrt{N_1^2 - \cos^2 \phi}} \right)^2 \sigma_\phi^2}, \tag{5}$$

kde σ_{N_2} resp. σ_{N_1} resp. σ_ϕ je směrodatná odchylka N_2 resp. N_1 resp. ϕ.

Pro měření indexu lomu kapalin využijeme metodu vychylovací. Použijeme V-hranol, jehož nákres je na obrázku 2. Na V-hranolu dopadají kolmo paprsky, které se 3x lámou: dvakrát na rozhraní kapalina–V-hranol, jednou na rozhraní V-hranol–vzduch. Z geometrie a zákona lomu (1) můžeme odvodit vztah pro výpočet indexu lomu kapaliny N_k:

$$N_k = \sqrt{N_v^2 - \cos \phi \sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi}}, \tag{6}$$

kde N_v je index lomu V-hranolu, význam úhlu ϕ je patrný z obrázku 2.

Chybu nepřímého měření N_k spočítáme opět způsobem popsaným v [1]:

$$\sigma_{N_k} = \sqrt{\left(\frac{2N_v - \cos \phi \frac{N_v}{\sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi}}}{2\sqrt{N_v^2 - \cos \phi \sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi}}} \right)^2 \sigma_{N_v}^2 + \left(\frac{\sin \phi \sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi} - \cos \phi \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi}}}{2\sqrt{N_v^2 - \cos \phi \sqrt{N_v^2 - \cos^2 \phi}}} \right)^2 \sigma_\phi^2} \tag{7}$$

Disperzní relace je závislost indexu lomu N na vlnové délce λ. Dá se aproximovat vzorcem:

$$N = N_0 + \frac{a}{\lambda + \lambda_0}, \tag{8}$$

kde N_0, a a λ_0 jsou jisté konstanty.

Občas není třeba znát celou disperzní relaci, nýbrž můžeme použít některé z následujících veličin:
střední disperze Δ:

$$\Delta = N_F - N_C \tag{9}$$

relativní disperze δ:

$$\delta = \frac{N_F - N_C}{N_D - 1} \tag{10}$$

Abbeovo číslo γ:

$$\gamma = \frac{N_D - 1}{N_F - N_C} \tag{11}$$

N_C, N_D a N_F jsou indexy lomu při odpovídající vlnových délkách (viz [2], str. 13).

3 Výsledky měření

Údaje z tabulky 1.2.2 (viz [3]) jsme vynesli do grafu 1. Následně jsme za pomoci programu OriginPro určili konstanty z rovnice (8). Zjištěné hodnoty jsou v tabulce 1.

Tabulka 1: Parametry disperzní relace hranolu GoF3

parametr	hodnota
N_0	1,6917±0,0003
a [nm]	17,60±0,2
λ_0 [nm]	-226±1

Pro stanovení požadovaných veličin jsme proměřili závislost úhlu ϕ na použité vlnové délce. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 7, přičemž ϕ_1 značí naměřené hodnoty úhlu pro hranol 1, ϕ_5 pak hodnoty pro hranol 5. Pro stanovení chyby měření jsme změřili úhel pro hranol 5 a vlnovou délku λ=546,1 nm čtyřikrát. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 2. Předpokládáme, že všechny hodnoty jsme naměřili se stejnou chybou. V tabulce 7 udáváme průměrnou hodnotu.

Tabulka 2: Určení chyby měření

č. měření	1	2	3	4	průměr
ϕ	50°4,35'±0,05'	50°4,10'±0,05'	50°4,20'±0,05'	50°4,25'±0,05'	50°4,20'±0,1'

Mezi měřeným hranolem a hranolem GoF3 jsme kápli immerzní kapalinu - α-bromnaftalen. Jeho index lomu je větší, než index lomu měřeného hranolu a menší než index lomu hranolu GoF3. Dosáhneme tak lepšího optického kontaktu. Vrstva immerzní kapaliny je však tenká, proto ji nadále nebudeme uvažovat.

V tabulce 8 jsou indexy lomu pro hranoly 1 a 5 (N_{H1} je index lomu hranolu 1, N_{H5} je index lomu hranolu 5). Index lomu měřícího hranolu GoF3 pro použité vlnové délky jsme spočítali podle disperzní relace (8) za použití parametrů z tabulky 1. Chybu jsme spočítali podle vzorce (5).

Nyní můžeme určit disperzní relaci obou měřených hranolů. Ze získané závislosti potom spočítáme indexy lomu N_C, N_D, N_d a N_F. Opět hledáme závislost indexu lomu na vlnové délce ve tvaru (8). Parametry získáme za použití programu OriginPro. Zjištěné parametry jsou v tabulce 3. Indexy lomu spočítané dle (8) jsou v tabulce 4. Střední disperze, relativní disperze a Abbeovo číslo (spočítané podle (9), (10) a (11)) jsou v tabulce 5.

Tabulka 3: Parametry disperzní relace pro hranoly 1 a 5

parametr	hranol 1	hranol 5
N_0	1,4998±0,0005	1,5873±0,0002
a [nm]	7,5±0,3	12,66±0,09
λ_0 [nm]	-166±6	-206,6±0,9

Disperzní relace pro hranol 1 je v grafu 2, disperzní relace pro hranol 5 v grafu 3. Porovnáním údajů v tabulce 5 a indexu lomu N_d v tabulce 4 s údaji v tabulce 1.2.4 (viz [3]) jsme hranol 1 určili jako "BK 7", hranol 5 jako "F2".

Pro měření závislosti indexu lomu na teplotě jsme použili líh. Vybrali jsme si vlnové délky λ_a=435,9 nm (čára g), λ_b=546,1 nm (čára e) a λ_c=623,4 nm. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 9; ϕ_a značí naměřený úhel pro vlnovou délku λ_a, pro ostatní úhly analogicky.

Tabulka 4: Indexy lomu pro čáry C, D, d a F

čára	λ [nm]	N_{H1}	N_{H5}
C	656,3	1,515±0,001	1,6155±0,0004
D	589,3	1,517±0,001	1,6204±0,0004
d	587,6	1,517±0,001	1,6205±0,0004
F	486,1	1,523±0,001	1,6326±0,0004

Tabulka 5: Střední disperze, relativní disperze a Abbeovo číslo

	hranol 1	hranol 5
střední disperze Δ	0,008±0,001	0,0171±0,0006
relativní disperze δ	0,016±0,003	0,0276±0,0009
Abbeovo číslo γ	64±11	36±1

Pozorovaný paprsek nebyl ostrý, bylo znatelné rozmazání. Chybu způsobenou rozmazáním jsme odhadli na 3'. Dále se za dobu, než jsme zaznamenali úhel, paprsek posunul. Chybu spůsobenou tímto posunutím jsme odhadli také na 3'. Chyba měřícího přístroje (0,05') je proti tomu zanedbatelná. Celkovou chybu měření určíme jako odmocninu ze součtu kvadrátů. Chyba tedy byla 4'.

Abychom mohli pro výpočet indexu lomu lihu použít vzorec (6), je třeba znát index lomu V-hranolu. Vyjdeme z údajů v tabulce 1.2.5, které upraví pomocí tabulky 1.2.6 (viz [3]). Protože však nejsou udané hodnoty pro vlnovou délku λ_c, použijeme průměr z hodnot získaných pro vlnové délky odpovídající čarám C a d (λ_c je zhruba průměr těchto vlnových délek). V tabulce 10 je index lomu V-hranolu pro příslušné vlnové délky a teploty. $N_{V-hran.a}$ je index lomu pro vlnovou délku λ_a, pro ostatní indexy analogicky. V tabulce 11 je index lomu lihu spočítaný podle (6). $N_{lih.a}$ je index lomu lihu pro vlnovou délku λ_a, pro ostatní indexy lomu je značení analogické.

Graficky zpracovaná závislost indexu lomu lihu na teplotě je v grafu 4.

Daty jsme proložili přímku ve tvaru $N = A + Bt$. Zjištěné parametry pro všechny vlnové délky jsou v tabulce 6.

Tabulka 6: Parametry teplotní závislosti indexu lomu

parametr	λ_a	λ_b	λ_c
A	1,3793±0,0005	1,3734±0,0006	1,3708±0,0006
B	(-3,9±0,1).10^{-4}	(-3,8±0,1).10^{-4}	(-3,6±0,1).10^{-4}

4 Diskuse

Při měření s hranoly 1 a 5 jsme se dopouštěli chyby při správném určení hodnoty úhlu ϕ. Nastavit přístroj přesně na rozhraní tma-světlo bylo obtížné. Nepřesnost nebyla dána rozlišením přístroje, jako spíše zručností experimentátora.

Při pohledu na grafy 2 a 3 vidíme, že se proložené závislosti dobře kryjí s naměřenými hodnotami. Aproximace (8) je tedy plně postačující.

Při porovnání námi změřených hodnot s tabulkou 1.2.4 vidíme, že se shodují s poměrně dobrou přesností. Pouze u hranolu 5 se index lomu pro vlnovou délku 587,6 nm s tabulkovou hodnotou shoduje až v rámci maximální chyby.

Nepřesnost měření indexu lomu byla mnohem větší, než při měření indexu lomu hranolů. Bylo to dáno rozmazáním obrazu. To mohlo být spůsobeno tím, že paprsky nedopadaly přesně kolmo na V-hranol, ale také pod malým úhlem. Posuv paprsků byl dán zřejmě ohříváním lihu. Ohřívání jsme sice po dobu měření vypnuli a nepozorovali jsme žádné zvýšení teploty, ovšem teploměr nemusel měřit přímo teplotu lihu, ale teplotu vody, která ohřívala líh.

Teplota místnosti byla vyšší než 20°C. Protože jsme neměli k dispozici chladící přístroj, nebylo možné naměřit úhly ϕ_i při této teplotě lihu.

V tabulkách [4] nacházíme hodnotu indexu lomu pro líh - 1,3617, avšak platí pro vlnovou délku 589,3 nm a teplotu 20°C. Za těchto podmínek neměřili, nicméně vidíme, že se tento údaj blíží námi spočteným hodnotám.

Pro vlnovou délku 632,4 nm jsme neměli dané hodnoty indexu lomu V-hranolu, pouze jsme je odhadli z hodnot pro blízké vlnové délky. Zde je možnost, že námi odhadnuté hodnoty nejsou zcela správné.

5 Závěr

1. Disperzní relace hranolu GoF3 je v grafu 1. Nalezená závislost je:
   $N = 1,6917 + 1,76.10^{-8}(\lambda - 2,27.10^{-7})^{-1}$

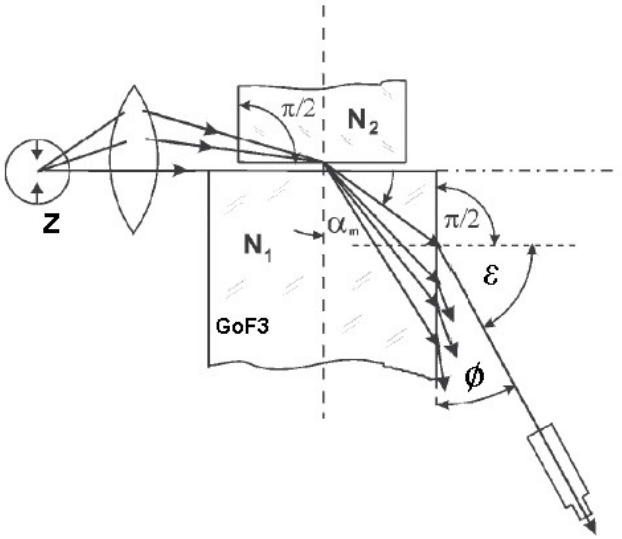
2. Střední disperze, relativní disperze a Abbeova čísla pro oba hranoly jsou v tabulce 5. Disperzní relace jsou vyneseny v grafech 2 a 3. Závislost indexu lomu hranolu 1 N_{H1} je:
   $N_{H1} = 1,4998 + 7,4.10^{-9}(\lambda - 1,65.10^{-7})^{-1}$,
   Pro index lomu hranolu 5 pak platí závislost:
   $N_{H5} = 1,5873 + 12,66.10^{-9}(\lambda - 2,066.10^{-7})^{-1}$
   Hranol 1 jsme určili jako "BK 7", hranol 5 jako "F2".

3. Grafické znázornění závislosti je v grafu 4. Keoficienty lineární regrese jsou v tabulce 6

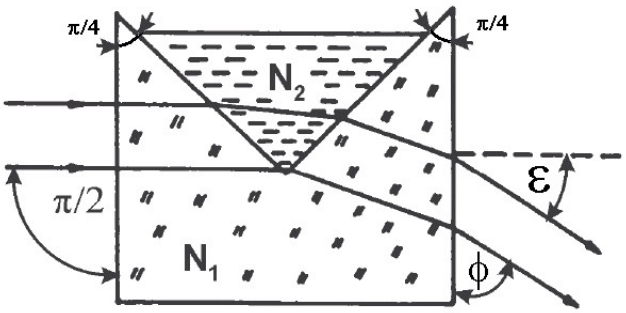
6 Literatura

[1] J. Englich: Zpracování výsledků fyzikálních měření, Praha, 2000
[2] I. Pelant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fähnrich: Fyzikální praktikum III - Optika, Karolinum, Praha, 1993
[3] studijní text (http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp)
[4] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha, 1980

Obrázek 1: Metoda mezního úhlu



Obrázek 2: V-hranol



Tabulka 7: Naměřené hodnoty pro hranol 1 a 5

λ [nm]	ϕ_1	ϕ_5
623,4	32°14,2'	50°56,6'
612,3	32°2,1'	50°50,3'
607,3	31°55,9'	50°47,35'
579,1	31°20,95'	50°29,85'
577	31°17,9'	50°28,25'
546,1	30°29,4'	50°4,2'
491,6	28°28,8'	49°6,15'
435,9	25°2,3'	47°31,65'
407,8	22°11,2'	46°18,7'
404,7	21°47'	46°9,1'

Tabulka 8: Indexy lomu hranolů 1 a 5

λ [nm]	N_{H1}	N_{H5}
623,4	1,516±0,001	1,618±0,001
612,3	1,516±0,001	1,618±0,001
607,3	1,517±0,001	1,619±0,001
579,1	1,518±0,001	1,621±0,001
577,0	1,518±0,001	1,621±0,001
546,1	1,519±0,001	1,625±0,001
491,6	1,523±0,001	1,632±0,001
435,9	1,527±0,001	1,642±0,001
407,8	1,531±0,001	1,650±0,001
404,7	1,531±0,001	1,651±0,001

Tabulka 9: Naměřené hodnoty pro líh

teplota t [°C]	ϕ_a	ϕ_b	ϕ_c
25	35°51,45'	40°34,8'	42°8,35'
30	35°33'	40°25,1'	41°51,7'
35	35°9,5'	40°0,7'	41°38,35'
40	34°42,95'	39°38,2'	41°17,25'
45	34°6,4'	39°8,85'	40°53,25'
50	33°38,9'	38°46,3'	40°29,35'
55	33°6'	38°18,8'	40°2,7'
60	32°31,15'	37°50'	39°37,2'

Tabulka 10: Index lomu V-hranolu

teplota t [°C]	$N_{V-hran.a}$	$N_{V-hran.b}$	$N_{V-hran.c}$
25	1,77625±0,00001	1,74727±0,00001	1,73714±0,00001
30	1,77631±0,00001	1,74731±0,00001	1,73718±0,00001
35	1,77637±0,00001	1,74735±0,00001	1,73721±0,00001
40	1,77642±0,00001	1,74738±0,00001	1,73725±0,00001
45	1,77648±0,00001	1,74742±0,00001	1,73728±0,00001
50	1,77654±0,00001	1,74746±0,00001	1,73732±0,00001
55	1,77660±0,00001	1,74749±0,00001	1,73735±0,00001
60	1,77666±0,00001	1,74753±0,00001	1,73739±0,00001

Tabulka 11: Index lomu lihu

teplota t [°C]	$N_{lih.a}$	$N_{lih.b}$	$N_{lih.c}$
25	1,3690±0,0006	1,3630±0,0007	1,3612±0,0007
30	1,3677±0,0006	1,3623±0,0007	1,3598±0,0007
35	1,3661±0,0006	1,3603±0,0006	1,3586±0,0007
40	1,3643±0,0005	1,3585±0,0006	1,3569±0,0007
45	1,3618±0,0005	1,3561±0,0006	1,3549±0,0007
50	1,3600±0,0005	1,3544±0,0006	1,3529±0,0006
55	1,3579±0,0005	1,3522±0,0006	1,3507±0,0006
60	1,3557±0,0005	1,3501±0,0006	1,3487±0,0006