Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM III – Optika

Úloha č. III.

Název: Mřížkový spektrometr

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. F–11 dne 5. března 2009

Odevzdal dne: ....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

Pracovní úkol

1. Seřiďte spektrometr pro kolmý dopad světla pomocí bočního osvětlení nitkového kříže (rovina optické mřížky je kolmá k ose kolimátoru).

2. Stanovte mřížkovou konstantu použité mřížky. K měření užijte čar sodíkového dubletu v 1. a 2. řádu.

3. Odhadněte rozlišovací schopnost spektrometru ze zobrazení sodíkového dubletu ve spektru 1. a 2. řádu. Vypočtěte teoreticky maximální dosažitelnou rozlišovací schopnost a oba výsledky porovnejte.

4. Proměřte viditelné čáry ve spektru rtuti v 1. řádu. S pomocí vámi stanovené mřížkové konstanty z úkolu 2. spočtěte vlnové délky rtuťového spektra a porovnejte je s tabelovanými hodnotami.

5. Vytvořte kalibrační křivku spektrometru jako závislost úhlu na vlnové délce.

6. Určete úhlovou disperzi mřížky ve žluté oblasti spektra 1. a 2. řádu. Vypočtěte teoretické hodnoty a porovnejte s experimentálními hodnotami.

7. Spočtěte relativní chyby výsledků.

Teoretický úvod

Základem používaného mřížkového spektrometru je mřížka na průchod. Pokud dopadá na mřížku svazek rovnoběžných paprsků o vlnové délce λ, dochází na jednotlivých vrypech k ohybu světla a následné interferenci jednotlivých vln prošlých mřížkou. V důsledku interference světla nabývá intenzita prošlého světla maximum pro různé natočení okuláru vzhledem ke kolmici k mřížce. Úhly φ_k pro které vznikají maxima jsou dle [1.] dány vztahem

$$\varphi_k = \arcsin\left(\frac{k \cdot \lambda}{d}\right), \tag{1}$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$ udává řád maxima. Veličina d je tzv. mřížková konstanta, která udává vzdálenost jednotlivých vrypů. Mřížková konstanta d jde úpravou vzrahu (4) vyjádřit jako

$$d = \frac{k \cdot \lambda}{\sin \varphi_k}. \tag{2}$$

Při známé mřížkové konstantě d můžeme při změření úhlu φ_k určit vlnovou délku vztahem

$$\lambda = \frac{d \cdot \sin \varphi_k}{k}. \tag{3}$$

Úhel φ_k se určí pomocí dvou měření úhlů ψ_1 a ψ_2. Tyto úhly představují maxima daného řádu pro obě strany natočení okuláru. Úhel φ_k se určí vztahem

$$\varphi = \frac{|\psi_1 - \psi_2|}{2}. \tag{4}$$

Rozlišovací schopnost R pro vlnovou délku λ se obvykle zavádí vztahem

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \tag{5}$$

kde $\delta\lambda$ je nejmenší rozeznatelný rozdíl vlnových délek. Rozlišovací schopnost jde vyjádřit teoretickým vztahem

$$R_{teor} = \frac{0,82 \cdot D \cdot k}{d}, \tag{6}$$

kde D je průměr vstupní pupily kolimátoru.

Úhlová disperse D_a se definuje vztahem

$$D_a = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\,, \tag{7}$$

což se po dosazení vztahu (1) dá upravit na rovnici

$$D_{a\,teor} = \frac{k}{d\cos\varphi_k}\,, \tag{8}$$

Chybu měření pro vypočtené vztahy je možno dle [2.] určit kvadratickým zákonem přenosu chyb. Použitím tohoto zákona na vztah (2) získáme vzorec[1]

$$\sigma d = \sqrt{\left(\frac{k\cdot\sigma\lambda}{\sin\varphi_k}\right)^2 + \left(\frac{k\cdot\lambda\cdot\cos\varphi_k\cdot\sigma\varphi}{\sin^2\varphi_k}\right)^2}\,. \tag{9}$$

Obdobně je možné určit pro chybu vlnové délky vypočtenou vzorcem (3) jako

$$\sigma\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sin\varphi_k}{k}\right)^2(\sigma d)^2 + \left(\frac{d\cdot\cos\varphi_k}{k}\right)^2(\sigma\varphi_k)^2}\,. \tag{10}$$

Dá se předpokládat, že u vztahu (4) se měří oba úhly s chybou $\sigma\psi$ dostane se pak poměrně jednoduchý vztah pro určení chyby φ

$$\sigma\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma\varphi\,. \tag{11}$$

Pro rozlišovací schopnost R danou vztahem (5) a její teoretickou podobu (6) je chyba dána vztahem

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma\lambda}{\delta\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\sigma\delta\lambda}{(\delta\lambda)^2}\right)^2}\,;\sigma R_{teor} = \sqrt{\left(\frac{0,82\cdot k\cdot\sigma D}{d}\right)^2 + \left(\frac{0,82\cdot k\cdot\sigma d}{d^2}\right)^2}\,. \tag{12}$$

Chyba měření úhlové disperse dané vztahem (7) a její teoretické podoby (8) rovna

$$\sigma D_a = \sqrt{2\left(\frac{\sigma\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{(\mathrm{d}\varphi)\sigma\lambda}{(\mathrm{d}\lambda)^2}\right)^2}\,;\sigma D_{a\,teor} = \sqrt{\left(\frac{k\cdot\sigma d}{d^2\cos\varphi_k}\right)^2 + \left(\frac{k\cdot\sin\varphi_k\sigma\varphi_k}{d\cos^2\varphi_k}\right)^2}\,. \tag{13}$$

Výsledky měření

Nejdříve jsem seřídil spektrometr. Bylo potřeba nastavit gaussův okulár tak, aby byl ostrý nitkový kříž a aby byl ostrý i odraz nitkového kříže od polopropustné vrstvy. Dále bylo potřeba nastavit kolimátor, což sestávalo z nastavení šířky štěrbiny a zaostření světelného svazku, který ze štěrbiny vycházel. Pak stačilo už pouze vyrovnat stolek na kterém byla připevněna mřížka.

Měření jsem prováděl pro mřížku, která na sobě měla uvedeno $570\,\mathrm{mm}^{-1}$. Já jsem určil mřížkovou konstantu d pomocí sodíkového dubletu s vlnovými délkami délkami $\lambda_1 = 589,6\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_2 = 589,0\,\mathrm{nm}$. Určil jsem úhly ψ_1 a ψ_2 pro 1. a 2. řád maxima (jsou uvedena v tabulce 1). Pomocí vztahu (2) jsem určil mřížkovou konstantu

$$d = (1,751 \pm 0,003)\,\mu\mathrm{m} = 1,751\,\mu\mathrm{m} \pm 0,17\%\,.$$

Pomocí naměřené mřížkové konstanty d jsem užitím vztahu (6) určil teoretickou rozlišovací schonost mřížkového spektrometru pro 1. řád maxima $R_{teor\,1}$ a pro 2. řád maxima $R_{teor\,2}$. Používaný

[1] veličiny před nimiž je napsáno σ znamenají, že se jedná o chybu měření této veličiny.

	$k=1$	$k=1$	$k=2$	$k=2$
	$\lambda = 589,6\,\mathrm{nm}$	$\lambda = 589,0\,\mathrm{nm}$	$\lambda = 589,6\,\mathrm{nm}$	$\lambda = 589,0\,\mathrm{nm}$
ψ_1	$19°56' \pm 2'$	$19°50' \pm 2'$	$42°40' \pm 2'$	$42°31' \pm 2'$
ψ_2	$340°31' \pm 2'$	$340°34' \pm 2'$	$317°55' \pm 2'$	$318°0' \pm 2'$
φ_k	$160°17'30'' \pm 1'25''$	$160°22' \pm 1'25''$	$137°37'30'' \pm 1'25''$	$137°44'30'' \pm 1'25''$
$d\,[\mu\mathrm{m}]$	$1,748 \pm 0,003$	$1,753 \pm 0,003$	$1,750 \pm 0,002$	$1,752 \pm 0,002$

Tabulka 1: Měření mřížkové konstanty.

orientační barva	ψ_1	ψ_2	φ	$\lambda\,[\mathrm{nm}]$	$\lambda_{teor}\,[\mathrm{nm}]$
	$\pm 2''$	$\pm 2''$	$\pm 1'24''$		
fialová	$346°51'$	$13°34'$	$166°38'30''$	$404,6 \pm 0,4$	$404,7$
fialová	$346°40'$	$13°39'$	$166°30'30''$	$408,5 \pm 0,4$	$407,8$
modrá	$345°50'$	$14°42'$	$165°34'0''$	$436,4 \pm 0,4$	$435,8$
modrozelená	$343°53'$	$16°35'$	$163°39'0''$	$492,9 \pm 0,4$	$491,6$
modrozelená	$343°48'$	$16°43'$	$163°32'30''$	$496,1 \pm 0,4$	
zelená	$342°3'$	$18°25'$	$161°49'0''$	$546,4 \pm 0,4$	$546,1$
žlutá	$340°59'$	$19°28'$	$160°45'30''$	$577,0 \pm 0,4$	$577,0$
žlutá	$340°55'$	$19°36'$	$160°39'5''$	$579,9 \pm 0,4$	$579,1$
červená	$339°59'$	$20°23'$	$159°480''$	$604,6 \pm 0,4$	$607,3$
červená	$339°40'$	$20°36'$	$159°32'0''$	$612,3 \pm 0,4$	$612,3$
červená	$339°18'$	$21°0'$	$159°9'0''$	$623,2 \pm 0,4$	$623,4$

Tabulka 2: Proměření spektrálních čar ve rtuti.

spektrometr měl průměr vstupní pupily kolimátoru $D = (18,0 \pm 0,5)\,\mathrm{mm}$. Pomocí vztahu (12) jsem určil chybu měření. Vyšlo mi

$$R_{teor\,1} = (8,4 \pm 0,8) \cdot 10^3 = 8,4 \cdot 10^3 \pm 9,5\%\,,$$

$$R_{teor\,2} = (16,9 \pm 1,7) \cdot 10^3 = 16,9 \cdot 10^3 \pm 10\%\,.$$

Pokračoval jsem měřením vlnových délek čar rtuťové výbojky. Data jsou zaznamenána v tabulce 2.

K určení úhlové disperse 1. řádu $D_{a\,1}$ jsem použil data pro žluté čáry z tabulky 2. Dále jsem změřil pro žluté čáry úhly pro maximum 2. řádu a určil tak úhlovou dispersi 2. řádu $D_{a\,2}$. Data jsou zapsány v tabulce 3. K výpočtu disperse jsem použil vztah (7). Také jsem určil teoretickou velikost úhlové disperse $D_{a\,teor}$ pomocí vztahu (8). Chyby veličin jsem počítal pomocí vztahů (13). Vyšlo mi

$$D_{a\,1} = (6 \pm 120)\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 6\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} \pm 2000\%\,,$$

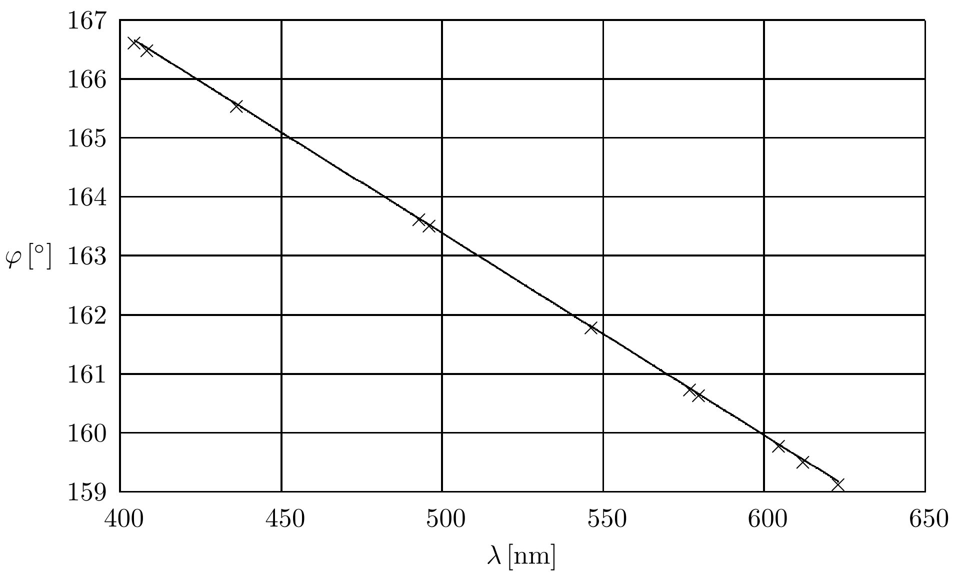
$$D_{a\,2} = (14 \pm 120)\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 14\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} \pm 857\%\,,$$

$$D_{a\,teor\,1} = (6,05 \pm 0,05)\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 6,05\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} \pm 0,83\%\,,$$

$$D_{a\,teor\,2} = (15,2 \pm 0,3)\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 15,2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} \pm 2,0\%\,.$$

λ [nm]	$577,0 \pm 0,4$	$579,9 \pm 0,4$	$577,0 \pm 0,4$	$579,9 \pm 0,4$
	$k = 1$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 2$
ψ_1	$340°59' \pm 2'$	$340°55' \pm 2'$	$318°55' \pm 2'$	$318°43' \pm 2'$
ψ_2	$19°28' \pm 2'$	$19°36' \pm 2'$	$41°12' \pm 2'$	$41°28' \pm 2'$
$\varphi \pm 1'24''$	$160°45'30''$	$160°39'30''$	$138°51'30''$	$138°37'30''$

Tabulka 3: Měření pro určení úhlové disperse.



Graf 1.: Kalibrační křivka.

Diskuse výsledků

Měření jsem prováděl pro mížku na které byl uveden údaj $570\,\mathrm{mm}^{-1}$. Odtud vychází $d_{teor} = 1,754\,\mu$m, což se shoduje v rámci chyby s mnou naměřenou hodnotou $d = (1,751 \pm 0,003)\,\mu$m. Výslednou hodnotu mřížkové konstanty jsem určil jako střední hodnotu měření sodíkového dubletu pro 1. a 2. řád.

Chybu měření úhlů jsem u všech měření odhadl jako $\pm 2'$. Obvykle se používá polovina nejmenšího dílku, ale já jsem předpokládal chybu větší, neboť při odečtu z nonia nebylo vždy zcela zřejmé, které dva dílky se příkrývají. Vlnovou délku λ jsem nalezl uvedenu v [1.]. Veličina zde byla uvedena s přesností na dasetiny. Chyba nebyla uvedena, proto jsem předpokládal, že byla použita konvence, kdy se předpokládá, že při neuvedení chyby měření se předpokládá, že je chyba rovna polovině nejmenšího řádu. V tomto případě $\sigma\lambda = 0,05\,\mathrm{nm}$.

K určení rozlišovací schopnosti spektrometru jsem používal sodíkový dublet. Při mém pozorování se potvrdil teoretický předpoklad, že pro 2. řád, je rozlišovací schpnost vyšší. Při pozorování sodíkového dubletu při maximu v 1. řádu, bych pravděpodobně rozeznal dvě asi i polovičně vzdálené čáry, něž byly pozorované čáry s vlnovou délkou $\lambda_1 = (589,00 \pm 0,05)\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_2 = (589,60 \pm 0,05)\,\mathrm{nm}$. Subjektivně bych tedy rozlišovací schpnost 1. řádu odhadl pomocí vztahu (5) na

$$R_{sub\,1} \approx 2000\,,$$

což je asi 4× méne, něž je teoreticky očekávaná hodnota. Pro 2. řád bych odhadl, že by paprsky mohl být zhruba ve čtvrtinové vzdálenosti. Rozlišovací schopnost 2. řádu jsem tak odhadl jako

$$R_{sub\,2} \approx 8000\,.$$

což je 4× méně, než je teoretická hodnota. Pozorovaný výsledek je menší než teoretický, neboť mé oči mají horší vlastnosti, než metoda očekává. Při výpočtu teoretické hodnoty rozlišovací schpnosti jsem určil průměr vstupní pupily kolimátoru, který jsem nalezl v [1.].

Při měření vlnových délek čar u rtuťové výbojky jsem narazil ja zajímavou věc. Dle tabulky v [1.] jsem měl viděl jednu modrozelenou čáru, ovšem byly dobře viditelné dvě. Pro čáru, která nebyla uvedená v tabulce mi vyšla vlnová délka $\lambda = (496,1 \pm 0,4)\,\mathrm{nm}$.

Úhlovou dispersi pro 1. a 2. řád jsem určil jak teoreticky, tak pomocí měření žlutých čar rtuťové výbojky. Při měření úhlové disperse mi vyšla velmi vysoká chyba měření. Tato chyba je dána použitou metodou, kdy se dělí dvě velmi malá čísla. Obecně platí, že při rozdílu se velmi zvětšuje relativní chyba.

Závěr

Určil jsem mřížkovou konstantu

$$d = (1,751 \pm 0,003)\,\mu\mathrm{m} = 1,751\,\mu\mathrm{m} \pm 0,17\%\,.$$

která se v rámci chyby měření shoduje s očekávanou hodnotou. Naměřená data jsou zaneseny v tabulce 1.

Rozlišovací schopnost mi teoreticky vyšla

$$R_{teor\,1} = (8,4 \pm 0,8) \cdot 10^3 = 8,4 \cdot 10^3 \pm 9,5\%\,,$$

$$R_{teor\,2} = (16,9 \pm 1,7) \cdot 10^3 = 16,9 \cdot 10^3 \pm 10\%\,.$$

Pozorováním jsem odhadl rozlišovací schopnost mřížky na

$$R_{sub\,1} \approx 2000\,,$$

$$R_{sub\,2} \approx 8000\,.$$

Proměřil jsem vlnovou délku čar rtuťové výbojky. Výsledku jsou zaznamenány v tabulce 2. Kalibrační křivna, kterou jsem sestavil z těchto dat, je v grafu 1.

Pomocí měření žlutých čar jsem určil úhlovou dispersi

$$D_{a\,1} = (6 \pm 120)\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} = 6\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} \pm 2000\%\,,$$

$$D_{a\,2} = (14 \pm 120)\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} = 14\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} \pm 857\%\,.$$

Tuto veličinu jsem také teoreticky vypočetl jako

$$D_{a\,teor\,1} = (6,05 \pm 0,05)\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} = 6,05\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} \pm 0,83\%\,,$$

$$D_{a\,teor\,2} = (15,2 \pm 0,3)\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} = 15,2\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1} \pm 2,0\%\,.$$

Seznam použité literatury

[1] I. Pletant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fähnrich: *Fyzikální praktikum III.* Optika. Karolinum, Praha 1993. ISBN 80–7066–763–X

[2] J. Englich: *Zpracování výsledků fyzikálních měření.* Praha 2000. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.pdf`