Pracovní úkol

1. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé (plankonvexní) čočky jednak Besselovou metodou, jednak metodou dvojího zvětšení.
2. Z následnjících možností vyberte jednu:
   a. Změřte kulovou vadu vyšetřované ploskovypuklé čočky v obou směrech pro dvě vzdálenosti předmětu $a = 30$ cm, $a = 60$ cm. Získané výsledky zpracujte do jednoho grafu a diskutujte velikost kulové vady v jednotlivých případech.
   b. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé čočky Besselovou metodou s modrým a červeným filtrem. Vyhodnoťte barevnou vadu vyšetřované čočky, použijte i výsledku z Úkolu 1.
3. Užitím goniometru určete vzdálenost hlavních rovin čočky měřené v bodě 1 a tlusté ploskovypuklé čočky.
4. Na základě výsledků získaných v bodě 1. a 3. diskutujte, která z uvedených metod měření ohniskové vzdálenosti dle bodu 1. je v uvedeném uspořádání přesnější. Porovnejte relativní chyby měření. Odhadněte systematickou chybu, které se dopouštíme při měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou.

Teoretická část

Základem pro experimentální stanovení ohniskové vzdálenosti f je zobrazovací rovnice čočky

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \tag{1}$$

kde a, resp. a' je vzdálenost předmětu, resp. obrazu od hlavní předmětové, resp. obrazové roviny. V případě tenké čočky jsou předmětové a ohniskové roviny totožné.

Pro pevný součet vzdáleností $D = a + a'$ a při splnění podmínky $D > 4f$ má rovnice (1) dvě řešení. Pro pevnou vzdálenost předmětu a obrazu tedy mohu najít dvě polohy čočky, při kterých je obraz ostrý. Jejich rozdíl, který lze jednoduše změřit, označme Δ. Pokud uvažuji tenkou čočku, platí

$$2a = D - \Delta \qquad a \qquad 2a' = D + \Delta\,. \tag{2}$$

Dosazením do (1) dostávám výraz pro ohniskovou vzdálenost, určenou tzv. *Besselovou metodou*

$$f = \frac{D^2 - \Delta^2}{4D} \tag{3}$$

Pokud čočku nelze považovat za tenkou, je třeba znát ještě vzdálenost hlavních rovin δ. V tomto případě platí $D = a + a' + \delta$ a vztah (3) je třeba upravit na

$$f = \frac{(D-\delta)^2 - \Delta^2}{4(D-\delta)}\,. \tag{4}$$

Pro určení vzdálenosti hlavních rovin využíváme skutečnosti, že při otáčení čočky kolem předmětového uzlového bodu si dopadající a vycházející paprsky zachovávají svůj směr. Obecný vztah pro vzdálenost dvou rovin se u plankoncexní čočky redukuje na

$$\delta = (1 - \frac{1}{n})d\,, \tag{5}$$

čímž jsme dostali vztah mezi tloušťkou čočky d, vzdáleností hlavních rovin δ (kterou umíme měřit pomocí goniometru dle návodu v [1] str 27) a jejím indexem lomu n.

Při stanovení ohniskové vzdálenosti *metodou dvojího zvětšení* vycházíme opět ze zobrazovací rovnice (1) a ze zkutečnosti, že platí

$$f \cdot \frac{y'}{y} = f \cdot \frac{a'}{a}\,, \tag{6}$$

kde y, resp. y' je velikost předmětu, resp. obrazu. Změřím-li příčná zvětšení $\frac{y'}{y}$ pro dvě různé vzdálenosti obrazu a', mohu ohniskovou vzdálenost vyjádřit jako

$$f = \frac{|a'_2 - a'_1|}{|(\frac{y'}{y})_2 - (\frac{y'}{y})_1|}\,. \tag{7}$$

Pokud se při měření neomezíme na paraxiální paprsky, vzniká jev tzv. *kulové vady čočky.* Paprsky dopadající na čočku ve vzdálenosti h od osy čočky vytváří obraz jinde, než paraxiální paprsky. Tento rozdíl charakterizuje kulovou vadu a je tedy dán vztahem

$$\Delta a'(h) = a'_p - a'(h)\,, \tag{8}$$

kde a'_p je poloha obrazu pro paraxiální paprsky. Ukazuje se, že $\Delta a'(h)$ lze aproximovat kvadratickou závislostí

$$\Delta a'(h) = Kh^2\,. \tag{9}$$

Měření

Nejprve jsem Besselovou metodou a metodou dvojího zvětšení změřila ohniskovou vzdálenost ploskovypuklé čočky. Výsledky udávají Tabulka 1 a 2. Vzdálenost D předmětu a stínítka jsem ponechala pevnou a nastavila dvě polohy čočky, při kterých byl obraz na stínítku ostrý. Chybu měření D odhaduji na 2 mm, chybu určení a vzhledem k subjektivitě posouzení ostrosti obrazu na 4 mm. Zvětšení jsem měřila milimetrickým posunem rysky na stínítku s odhadnutou chybou 1 mm. Velikost předmětu byla zadána $y = 10,0\,\mathrm{mm}$.

Hodnotu ohniskové vzdálenosti f_B Besselovou metodou jsem určila dle vztahu (3). Střední hodnota ohniskové vzdálenosti potom je

$$f_B = (16.3 \pm 0.3)\ \mathrm{cm}\,.$$

Ohniskovou vzdálenost f_Z určenou metodou dvojího zvětšení jsem vypočítala dle vzorce (7). Střední hodnota je

$$f_Z = (16.6 \pm 0.8)\ \mathrm{cm}\,.$$

Odchylky jsou dány statistickým zpracováním a výše odhadnutými chybami.

D [cm]	a_1 [cm]	a_2 [cm]	Δ [cm]	f_B [cm]
80	21.5	55.3	33.8	16.43
85	20.4	61.1	40.7	16.38
90	19.8	66.7	46.9	16.39
95	19.3	72.5	53.2	16.30
100	18.8	78.0	59.2	16.24

Tabulka 1.: Měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou

D [cm]	y'_1 [cm]	y'_2 [cm]	f_Z [cm]
80	24.8	4.1	16.33
85	28.0	3.7	16.75
90	31.5	3.2	16.57
95	34.6	2.7	16.68
100	38.2	2.6	16.63

Tabulka 2.: Měření ohniskové vzdálenosti metodou dvojího zvětšení

Kulovou vadu čočky jsem změřila pro dvě vzdálenosti předmětu $a_1 = 30$ cm a $a_2 = 60$ cm a pro čtyři vzdálenosti h od osy. Výsledky měření udává Tabulka 3. Pro obě polohy předmětu jsem uvažovala dva směry čočky, tj. kulovým rozhraním k předmětu x'_k a rovinným rozhraním k předmětu x'_r. Pro stanovení přesnosti měření vzdálenosti x' jsem pětkrát změřila tuto vzdálenost pro čočku s kulovým rozhraním k předmětu ve vzdálenosti $a = 30$ cm a pro $h = 15$ mm. Výsledky udává Tabulka 4.

Graficky je měření zpracováno v Grafu 1 pro vzdálenost $a_1 = 30$ cm a v Grafu 2 pro vzdálenost $a_2 = 60$ cm, které jsou přiloženy na konci dokumentu. Pomocí programu `Gnuplot` jsem určila regresí koeficienty K ve vztahu (9). Výsledky jsou

vzdálenost $a_1 = 30$ cm

$$\textit{rovinným rozhraním k předmětu}: \; K_{r1} = (18.7 \pm 0.8)\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\textit{kulovým rozhraním k předmětu}: \; K_{k1} = (16.5 \pm 0.9)\,\mathrm{m}^{-1}$$

vzdálenost $a_2 = 60$ cm

$$\textit{rovinným rozhraním k předmětu}: \; K_{r2} = (9.6 \pm 0.5)\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\textit{kulovým rozhraním k předmětu}: \; K_{k2} = (4.2 \pm 0.4)\,\mathrm{m}^{-1}$$

h [mm]	x'_{r1} [cm]	x'_{r2} [cm]	x'_{k1} [cm]	x'_{k2} [cm]
5	66.0	83.9	66.8	82.4
15	65.5	83.8	66.4	82.3
25	64.8	83.3	65.6	82.1
35	63.8	82.7	64.9	81.9

Tabulka 3.: Měření kulové vady čočky

č.m.	x'_{k1}[cm]
1	66.1
2	66.3
3	66.2
4	65.8
5	66.2
$\overline{x'_{k1}}$	66.1
$\sigma_{x'_{k1}}$	0.2

Tabulka 4.: Měření kulové vady čočky pro $a = 30$ cm a $h = 15$ mm

Pomocí goniometru jsem určila vzdálenost hlavních rovin tenké čočky měřené v Úkolu 1. Výsledky udává Tabulka 5. Tato vzdálenost je

$$\delta = (4.1 \pm 0.8)\,\mathrm{mm}$$

Výslednou chybu měření jsem stanovila na základě statistické odchylky a chyby, kterou odhaduji vzhledem k obtížnosti určení správné polohy čočky na 0.5 mm.

č.m.	x_1[mm]	x_2[mm]
1	20,6	16,5
2	20,7	16,8
3	20,4	16,4
4	20,9	16,7
5	20,5	16,3
$\overline{x}$	20.6	16.5
σ_x	0.2	0.2

Tabulka 5.: Měření polohy uzlových bodů tenké ploskovypuklé čočky

Nyní tedy můžeme provést korekci ohniskové vzdálenosti určené Besselovou metodou dle vztahu (4). Pokud vezmu v úvahu, že hlavní roviny čočky nejsou totžné, je naměřená ohnisková vzdálenost rovna

$$f_B = (16.2 \pm 0.3)\ \mathrm{cm}\,.$$

Výsledky měření vzdálenosti hlavních rovin tlusté ploskovypuklé čočky udává Tabulka 6. Vzdálenost hlavních rovin tlusté čočky je

$$\delta = (12.9 \pm 0.7)\,\mathrm{mm}$$

Dle [1] je tloušťka čočky $d = 38$ mm. Mohu tedy užitím vztahu (5) určit index lomu skla čočky

$$n = 1.5 \pm 0.1\,.$$

č.m.	x_1[mm]	x_2[mm]
1	14.7	27.7
2	14.6	27.5
3	14.8	27.6
4	14.6	27.5
5	14.7	27.7
$\overline{x}$	14.7	27.6
σ_x	0.1	0.1

Tabulka 6.: Měření polohy uzlových bodů tlusté ploskovypuklé čočky

Diskuze

Ohniskové vzdálenosti získané Besselovou metodou a metodou dvojího zvětšení se v rámci přesnosti měření shodují. Relativní chyba ohniskové vzdálenosti změřené Besselovou metodou je $\delta_{f_B} = 2\%$, změřené metodou dvojího zvětšení $\delta_{f_Z} = 5\%$. Tedy je zřejmé, že Besselova metoda je přesnější a navíc méně náročná na měření. Největší nepřesnosti byly dány subjektivitou měření. I při použití lupy je obtížné stanovit ostrost obrazu. Další chyby, které výrazně ovlivnily výslednou odchylku, vznikaly při měření obrazu na stínítku. Proto je metoda dvojího zvětšení méně přesná.

Oprava Ohniskové vzdálenosti získané Besselovou metodou je stejného řádu jako chyba bez započítané korekce. Čočku tedy můžeme považovat za tenkou.

Jak je vidět z Grafu 1 a 2, závislost kulové vady na vzdálenosti paprsků od osy vychází dle předpokladů kvadratická. Obecně by mělo platit, že v případě vzdáleného předmětu je vhodné otočit k němu čočku kulovým rozhraním. Naopak v případě, kdy je vzdálenost předmětu menší než vzdálenost obrazu, bude kulová vada nižší, když je k předmětu natočeno rovinné rozhraní. Z Grafů je patrné, že se nám toto nepodařilo ověřit. Pro vzdálenosti a_1 platí $a_1 < a_1'$. Pro vzdálenost a_2 je tomu naopak. V mém měření ovšem vychází natočení kulovým rozhraním vždy výhodnější.

Výsledná chyba měření uzlových bodů je dána především obtížností nalezení hledané polohy čočky. Při určování polohy uzlových bodů tlusté čočky byl největší problém v zaostření dalekohledu. Při měření totiž překážela sama čočka. Proto by bylo vhodnější použít při měření goniometr větších rozměrů.

Závěr

V tomto praktiku jsem se seznámila s měřením parametrů tlusté a tenké ploskovypuklé čočky. Změřila jsem ohniskovou vzdálenost tenké čočky Besselovou metodou. Po započítání korekce je tato hodnota $f_B = (16.2 \pm 0.3)$ cm . Ohnisková vzdálenost změřená metodou dvojího zvětšení je $f_Z = (16.6 \pm 0.8)$ cm.

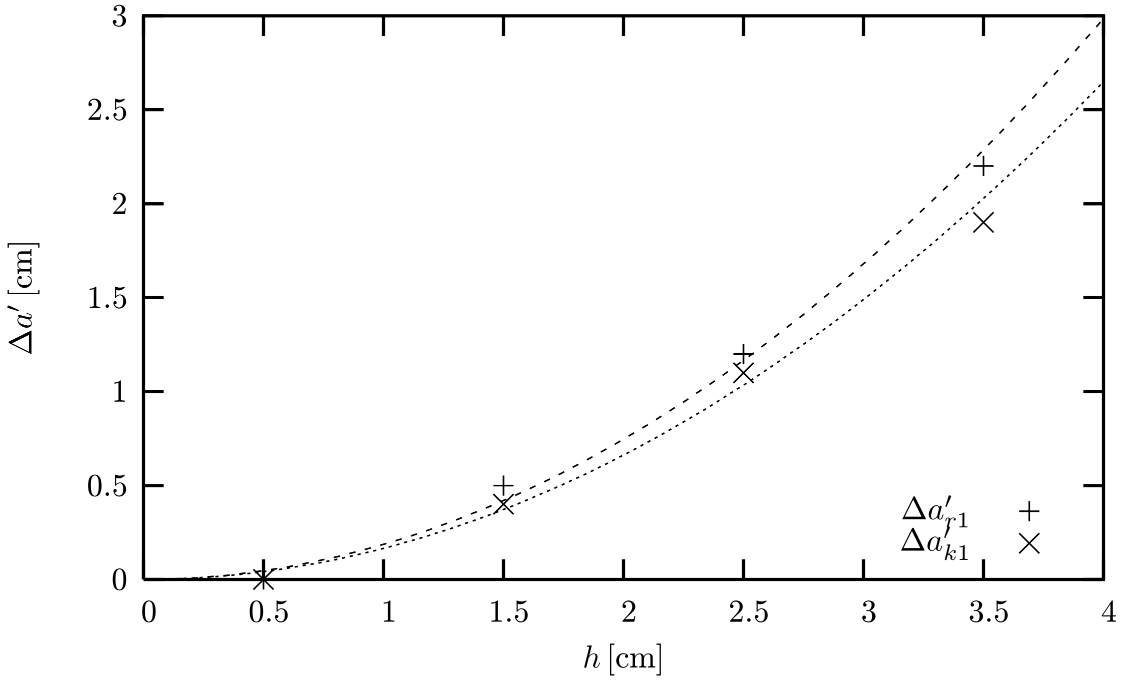
Proměřila jsem kulovou vadu čočky. Výsledky udává Graf 1 a 2.

Užitím goniometru jsem určila vzdálenost hlavních rovin tenké čočky měřené v bodě 1 jako $\delta = (4.1 \pm 0.8)$ mm. Pro tlustou čočku je tato vzdálenost $\delta = (12.9 \pm 0.7)$ mm.

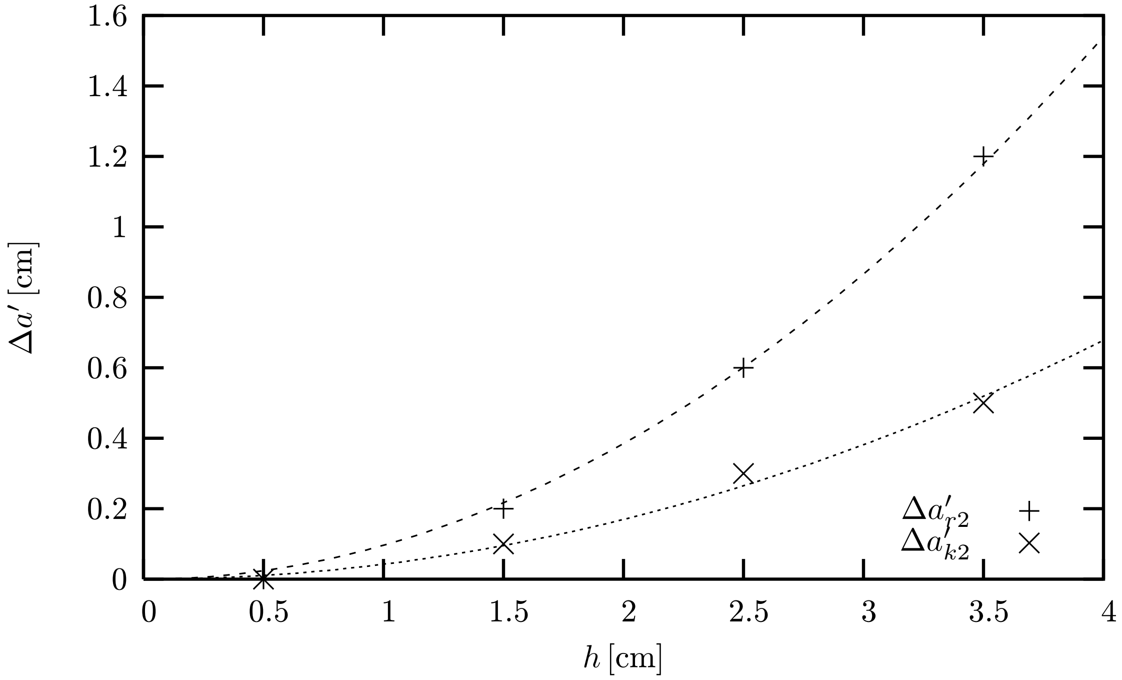
Na základě získaných výsledků je pro měření ohniskové vzdálenosti výhodnější Besselova metoda.

Literatura

[1] Fyzikální praktikum III., I. Pelant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fähnrich, Praha 1993



Graf 1.: Měření kulové vady čočky pro vzdálenost $a_1 = 30$ cm. Parabolou je vyneseno kvadratické proložení



Graf 2.: Měření kulové vady čočky pro vzdálenost $a_2 = 60$ cm. Parabolou je vyneseno kvadratické proložení