1. Pracovní úkol

1) Změřte indukčnosti L_A, L_B a vlastní kapacity C_A, C_B cívek A a B
2) Z měření celkové indukčnosti $L_{1,2}$ cívek A a B určete jejich vzájemnou indukčnost *M*. Diskutujte platnost vztahu mezi vzájemnou indukčností *M*, indukčnostmi cívek L_A, L_B a celkovou indukčností $L_{1,2}$.
3) Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4) Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vyneste do grafu.

2. Teoretická část

2.1 Rezonance v sériovém RLC obvodu

RLC obvod je tvořen cívkou, odporem a kondenzátorem, které jsou mezi sebou zapojeny sériově. Pro efektivní napětí **U** platí vztah

$$U = I\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\,[1]\,, \tag{1}$$

kde **I** je efektivní proud, **R** je odpor, **L** je indukčnost, **C** je kapacita a ω je úhlová frekvence střídavého proudu. Při určité hodnotě úhlové frekvence nastane rezonance obvodu, která je charakterizována maximální hodnotou efektivního proudu při určité konstantní hodnotě efektivního napětí. Pro rezonanční úhlovou frekvenci ω_r platí vztah

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r \;[1], \tag{2}$$

kde f_r je rezonanční frekvence.

2.2 Redukovaná rezonanční křivka

Představuje závislost $y = \frac{I}{I_r}$ na $x = \frac{\omega}{\omega_r}$, kde I_r je hodnota efektivního proudu při rezonanci. Využitím Ohmova zákona při rezonanci a vztahu (1) dostaneme výraz

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + (x - \frac{1}{x})^2}\,[1], \tag{3}$$

kde d je míra útlumu, pro kterou platí

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,[1] \tag{4}$$

Pro $y^2 = 0,5$ jest $d = |x_1 - x_2|$, kde x_1 a x_2 jsou hodnoty, při kterých funkce (3) nabývá hodnoty $y^2 = 0,5$.

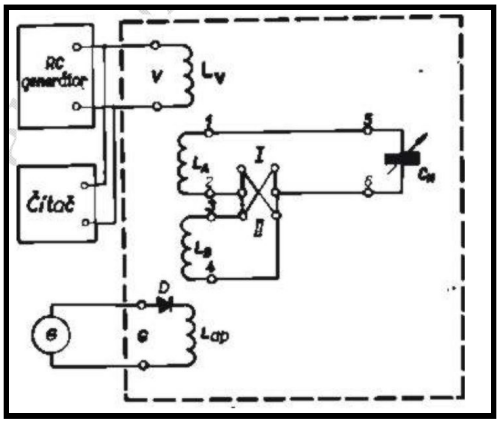
Činitel jakosti Q definujeme jako výraz

$$Q = \frac{\omega_r L}{R_s} = \frac{1}{d}\ [1], \tag{5}$$

kde R_S je sériový náhradní odpor obvod a platí pro něj vztah

$$R_s = d\omega_r L \tag{6}$$

2.3 Schéma obvodu



Obrázek 1 - Schéma obvodu [1]

2.4 Měření indukčnosti a vlastní kapacity

Cívku charakterizuje veličina indukčnost L. Reálné cívky mají ale také vlastní kapacitu C_0. Obě tyto veličiny se dají určit úpravou vztahu (2) do jiné podoby ve tvaru

$$\frac{1}{(2\pi f_r)^2} = LC + LC_0\ [1]. \tag{7}$$

Znalostí rezonanční frekvence f_r pro různé hodnoty kapacity můžeme koeficienty L a C_0 určit metodou nejmenších čtverců.

2.5 Měření vzájemné indukčnosti

Cívky A a B o indukčnostech L_A, L_B sériově. Jejich celková indukčnost je dána vztahem

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M\ [1], \tag{8}$$

kde M je vzájemná indukčnost cívek A a B, pro níž platí

$$M = \frac{L_{1,2} - L_{1,2'}}{4}[1], \tag{9}$$

kde $L_{1,2}$, resp. $L_{1,2'}$ jsou celkové indukčnosti cívek při dvou různých typech vinutí, což přímo souvisí se znaménkem $\pm$ ve vztahu (8).

2.6 Měření impedance kondenzátoru

Nejprve nastavíme rezonanci obvodu při kapacitě $C_1 = 800\,pF$ kondenzátoru vestavěného v rezonančním obvodu. Následně se k němu paralelně připojí kalibrovaný kondenzátor a na vestavěném měníme kapacitu na C_2 tak, aby znovu nastala rezonance. Kapacita C_x definovaná jako

$$C_x = C_1 - C_2\ [1] \tag{10}$$

je pak přímo kapacitou našeho kalibrovaného kondenzátoru.

3. Výsledky měření

Součástí úlohy nebylo měření měrného elektrického odporu, tudíž teplota neměla zásadní vliv na výsledky měření a nebylo proto měřena.

3.1 Chyby měření

Všechny chyby byly spočítány na hladině pravděpodobnosti $1\,\sigma$.

3.2 Naměřené hodnoty

3.2.1 Indukčnost cívek

Hodnota rezonanční frekvence byla určena průměrem dvou hodnot frekvencí f' a f'' na dvou různých stranách rezonanční křivky. Jedná se o přesnější metodu, než určování jedné rezonanční frekvence v oblasti maximálního proudu, protože tam je výchylka galvanometru na změnu frekvence či kapacity nejméně citlivá.

C[pF]	f' [kHz]	f'' [kHz]	f_r [kHz]
200	683,6	670,9	677,25
300	581	570,2	575,60
400	513,5	504,6	509,05
500	465,8	458,4	462,10
600	428,6	422,8	425,70
700	395	398,7	396,85
800	372,4	373,8	373,10

Tabulka 1 - Rezonanční frekvence v závislosti na kapacitě pro cívku A

C[pF]	f' [kHz]	f'' [kHz]	f_r [kHz]
200	655,1	721,3	688,20
300	543,6	601,2	572,40
400	527,2	474,9	501,05
500	475	427,3	451,15
600	391,5	435,5	413,50
700	363,5	404,7	384,10
800	340,7	379,6	360,15

Tabulka 2 - Rezonanční frekvence v závislosti na kapacitě pro cívku B

Výsledné indukčnosti cívek jsem spočítal metodou nejmenších čtverců.

$$L = \frac{7\sum_{i=1}^{7} C_i \frac{1}{(2\pi f_{ri})^2} - \sum_{i=1}^{7} C_i \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{(2\pi f_{ri})^2}}{7\sum_{i=1}^{7} C_i^2 - (\sum_{i=1}^{7} C_i)^2} [2], \tag{11}$$

kde C_i jsou kapacity pro jednotlivé rezonanční frekvence f_{ri} a číslo 7 udává počet naměřených hodnot. Konstanta D z lineárního předpisu $y(x) = Ax + D$ je rovna LC_0. Hodnota vlastní kapacity je tedy rovna

$$C_0 = \frac{D}{L} = \frac{\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{(2\pi f_{ri})^2} \sum_{i=1}^{7} C_i^2 - \sum_{i=1}^{7} C_i \sum_{i=1}^{7} C_i \frac{1}{(2\pi f_{ri})^2}}{7\sum_{i=1}^{7} C_i^2 - (\sum_{i=1}^{7} C_i^2)^2} \frac{1}{L} [2] \tag{12}$$

Chyba indukčnost σ_L i byla spočtena dle

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{7\sum_{i=1}^{7}((\frac{1}{2\pi f_{ri}})^2 - C_0 - LC_i)^2}{(7\sum_{i=1}^{7} C_i^2 - (\sum_{i=1}^{7} C_i)^2)\cdot 5}} [2] \tag{13}$$

Chyba konstanty D σ_D byla určena dle

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} C_i^2 \sum_{i=1}^{7}((\frac{1}{2\pi f_{ri}})^2 - C_0 - LC_i)^2}{(7\sum_{i=1}^{7} C_i^2 - (\sum_{i=1}^{7} C_i)^2)\cdot 5}} [2] \tag{14}$$

Z ní se následně určí chyba vlastní kapacity σ_{C_0} jako

$$\sigma_{C_0} = \frac{\sigma_D}{\sigma_L} \tag{15}$$

Cívka	A	B
L[μH]	211,1 ± 0,2	236,2 ± 0,3
$C_0[pF]$	62,2 ± 2,7	26,9 ± 2,7

Tabulka 3 - Výsledné indukčnosti a vlastní kapacity pro cívky A a B

3.2.2 Vzájemná indukčnost cívek

Měření probíhalo totožně s předchozími dvěmi s tím rozdílem, že se zde měřila celková indukčnost obou cívek dohromady jednak při souhlasném a nesouhlasném vinutí.

C[pF]	f' **[kHz]**	f'' **[kHz]**	f_r **[kHz]**
200	460,6	442,2	451,40
300	383	367,5	375,25
400	334,3	321,4	327,85
500	300,6	289,1	294,85
600	275,8	264,4	270,10
700	256,3	245,3	250,80
800	240,4	229,8	235,10

Tabulka 4 - Rezonanční frekvence v závislosti na kapacitě pro společné zapojení cívek A a B při vinutí I

C[pF]	f' **[kHz]**	f'' **[kHz]**	f_r **[kHz]**
200	583,8	566,7	575,25
300	470,6	485,2	477,90
400	423,3	411,9	417,60
500	379,9	371,1	375,50

600	347,4	340,5	343,95
700	316,5	322	319,25
800	295,9	303,6	299,75

Tabulka 5 - Rezonanční frekvence v závislosti na kapacitě pro společné zapojení cívek A a B při vinutí II

$L_{1,2'}[\mu H]$	556,8 ± 0,6
$L_{1,2}[pF]$	342,9 ± 0,4

Tabulka 6 - Celkové indukčnosti při dvou různých zapojení cívek A a B

Dosazením do vztahu (9) určím vzájemnou indukčnost M cívek. Chyba σ_M vzájemné indukčnosti se určí dle

$$\sigma_M = \sqrt{(\frac{\partial M}{\partial L_{1,2}}\sigma_{L_{1,2}})^2 + (\frac{\partial M}{\partial L_{1,2'}}\sigma_{L_{1,2'}})^2}\ [2] \qquad (16)$$

M[μH]	53,47 ± 0,19

Tabulka 7 - Vzájemná indukčnost M cívek A a B

3.2.3 Proměření rezonanční křivky

Křivka byla proměřována při vinutí II při kapacitě 600 pF jak bylo doporučeno v [1]. Rezonanční frekvence byla stanovena z tabulky 5, tedy 343,95 kHz. Při rezonanci byla maximální výchylka galvanometru 47 dílků a tedy y^2 a x se v této situaci rovnalo 1 viz tabulka 8.

f [kHz]	y^2	x	dílky	f [kHz]	y^2	x	dílky
367,95	0,064	1,070	3	343,95	1,000	1,000	47
364,95	0,085	1,061	4	341,95	0,851	0,994	40
361,95	0,106	1,052	5	340,95	0,723	0,991	34
358,95	0,149	1,044	7	339,95	0,596	0,988	28
355,95	0,213	1,035	10	338,15	0,404	0,983	19
352,95	0,298	1,026	14	334,95	0,191	0,974	9

349,95	0,489	1,017	23	331,95	0,106	0,965	5
346,95	0,809	1,009	38	328,95	0,064	0,956	3
				322,95	0,021	0,939	1

Tabulka 8 - Změřené počty dílků na galvanometru při změnách frekvence

Míra útlumu d byla určena jako rozdíl hodnot x_1 a x_2, při kterých funkce (3) nabývala hodnoty $y^2 = 0,5$.

Hodnota míry utlumu byla určena následovně: Nejprve jsem bodem [1,017;0,489] vedl přímku rovnoběžnou s osou x, jelikož v tomto bodě byla funkční hodnota nejblíže číslu 0,5. Následně jsem sestrojil obecnou rovnici přímky spojující body [0,988;0,596] a [0,983;0,404]. Průnikem přímky $y^2 = 0,489$ a přímky spojující body [0,98; 0,596] a [0,983;0,404] byl bod o souřadnicích [0,985;0,489]. Vzdálenost bodů [0,985;0,489] a [1,017;0,489] je dle pythagorovy věty číslo 0,032 a to je právě aproximační hodnota míry utlumu d.

Chyba měření míry útlumu σ_d byla odhadnuta na 20% z naměřené hodnoty.

Míra útlumu d	0,032 ± 0,006

Tabulka 9 - Vypočtená míra útlumu

Činitel jakosti Q se určil dle (5) s chybou σ_Q definovanou jako

$$\sigma_Q = \frac{1}{d^2}\sigma_d \text{ [2]} \tag{17}$$

Činitel jakosti Q	31,25 ± 5,86

Tabulka 10 - Vypočtený činitel jakosti

Sériový náhradní odpor R_s byl určen dle (6) a jeho chyba σ_{R_s} je pak

$$\sigma_{R_s} = \sqrt{(\omega_r L_{1,2}\sigma_d)^2 + (dL_{1,2}\sigma_{\omega_r})^2 + (d\omega_r\sigma_{L_{1,2}})^2} \text{ [2]}, \tag{18}$$

kde σ_{ω_r} je dána dle

$$\sigma_{\omega_r} = 2\pi\sigma_{f_r} \text{ [2]} \tag{19}$$

, $\sigma_{L_{1,2}}$ je známo z tabulky 6 a σ_{f_r} je pak určeno dle

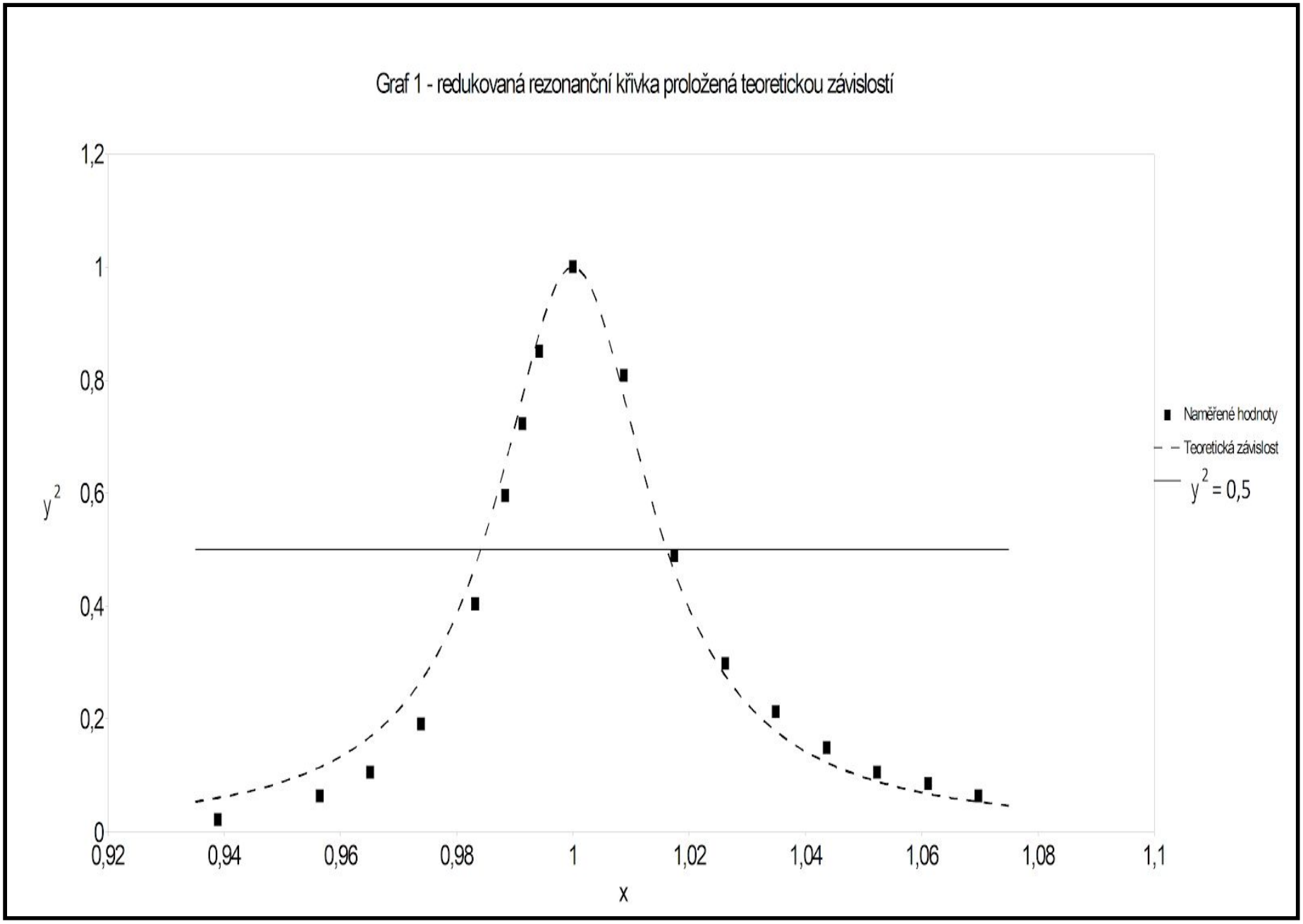
$$\sigma_{f_r} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \text{ [2]} \tag{20}$$

kde Δ je nejmenší dílek přístroje. V mém případě se jednalo o hodnotu 0,1 kHz. Přístroj měl dokonce ještě o 3 řády větší počet desetinných míst, ale dle mého názoru bylo plně postačující jen jedno desetinné místo, protože jsem frekvenci měnil maximálně o desetinu kHz.

Náhradní sériový odpor $R_S\,[\Omega]$	23,72 ± 4,45

Tabulka 11 - Vypočtený náhradní sériový odpor

Graf 1 - redukovaná rezonanční křivka proložená teoretickou závislostí

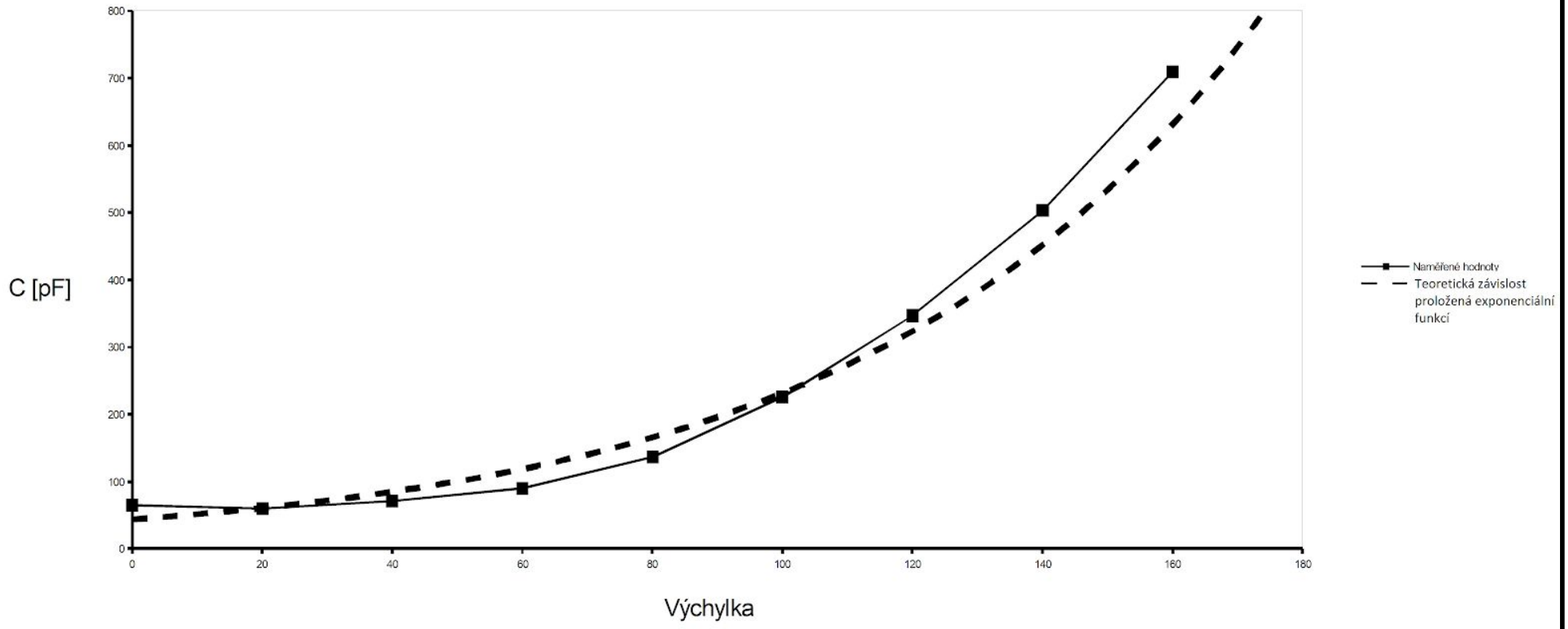


3.2.4 Kalibrace kondenzátoru

výchylka	$C_1[pF]$	$C_2[pF]$	$C_x[pF]$
0	800	735	65
20	800	740,5	59,5
40	800	729	71
60	800	710	90
80	800	663,5	136,5
100	800	574	226
120	800	453	347
140	800	297	503
160	800	90	710

Tabulka 12 - Kapacita kalibrovaného kondenzátoru C_x v závislosti na výchylce na jeho stupnici

Graf 2 - Závislost kapacity kalibrovaného kondenzátoru na výchylce na jeho stupnici



4. Diskuse

Měření indukčností cívek A a B by bylo přesnější nejen při měření většího množství kapacit ve vestavěném rezonančním obvodu ale i při větším počtu změřených frekvencí f' a f'' neboť jedna změřená hodnota na každé straně rezonanční křivky implikuje nejmenší možnou přesnost měření. Z časových důvodů však nebylo možné větší počet hodnot naměřit.

Dosazením indukčnosti změřené u cívky A a u cívky B do vztahu (8) dostaneme pro celkovou indukčnost $L_{1,2}$ resp. $L_{1,2'}$ hodnoty vypsané v tabulce ve druhém sloupci.

	dle vztahu (8)	naměřené
$L_{1,2'}[\mu H]$	554,2	556,8 ± 0,6
$L_{1,2}[\mu H]$	340,36	342,9 ± 0,4

Tabulka 13 - Porovnání různého způsobu výpočtu celkové indukčnosti cívek A a B

Z tabulky lze vidět, že celkové indukčnosti se oproti naměřeným liší jen v řádu tří jednotek, z čehož se dá usoudit platnost vztahu (8) a relativně přesné měření.

Rezonanční křivka téměř odpovídá teoretické závislosti. Podobně jako u měření indukčnosti u cívek, tak i zde bylo potřeba proměřit větší počet hodnot pro zvětšení přesnosti daného měření, což nebylo z časových důvodů možné. I přes relativně nedostatečný počet naměřených hodnot je daná rezonanční křivka velmi podobná teoretické závislosti z čehož lze usoudit na přesnost měření. Velký vděk dané přesnosti však právem patří měřícím přístrojům.

Křivka popisující závislost kapacity kalibrovaného kondenzátoru v závislosti na výchylce na jeho stupnici zcela neodpovídá exponenciální funkci viz graf 2. I přes nepodobnost křivky a exponenciály lze tvrdit, že kapacita roste víc a víc když zvětšujeme výchylku na kalibrovaném kondenzátoru. Nemůže však růst nade všechny meze, jelikož počet dílků na stupnici kalibrovaného kondenzátoru musí být konečný.

5. Závěr

Změřil jsem indukčnosti cívek L a jejich vlastní kapacity C_0.

Cívka	A	B
L[μH]	211,1 ± 0,2	236,2 ± 0,3
$C_0[pF]$	62,2 ± 2,7	26,9 ± 2,7

Dále byla změřena jejich vzájemná indukčnost M

M[μH]	53,47 ± 0,19

Z rezonanční křivky byla určena míra útlumu d, činitel jakosti Q a náhradní sériový odpor R_s.

Míra útlumu d	0,032 ± 0,006

Činitel jakosti Q	31,25 ± 5,86

Náhradní sériový odpor R_s [Ω]	23,72 ± 4,45

Křivka, která popisuje závislost kapacity kalibrovaného kondenzátoru v závislosti na výchylce na jeho stupnici připomíná exponenciální funkci.

6. Seznam použité literatury

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK. Studijní text k měření: Měření impedancí rezonanční metodou [cit. 2018-10-13]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_208.pdf

[2] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I.. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-867-3293-2