Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM II – Elektřina a magnetismus

Úloha č. VII.

Název: Měření indukčnosti a kapacity metodou přímou

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. F – 11 dne 21. října 2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:.......................................

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Pracovní úkol

1. Změřte závislost indukčnosti cívky na procházejícím proudu pro tyto případy:
   a) cívka bez jádra
   b) cívka s otevřeným jádrem
   c) cívka s uzavřeným jádrem

2. Přímou metodou změřte odpor cívky a určete její kvalitu.

3. Změřte velikost kapacit kondenzátorů z kapacitní dekády.

4. Odhadněte přesnost měření.

Teoretický úvod

Pokud k dané cívce přivedeme zdroj střídavého napětí o známé frekvenc f, můžeme měřit indukčnost cívky L tak, že zaznamenáváme efektivní hodnotu i_{ef} střídavého proudu, který protéká cívkou při známé vělikosti efektivní hodnoty napětí u_{ef} na cívce. Jak je uvedeno v [1.] platí vztah:

$$i_{ef} = \frac{u_{ef}}{Z}, \tag{1}$$

kde Z je impedance obvodu s cívkou.

Pro skutečnou cívku, můžeme zavést náhradní obvod, který je sériovou kombinací rezistoru s odporem R_s a cívky s indukčností L. Odpor R_s představuje všechny ztráty, které vznikají při průchodu proudu cívkou. Jak je uvedeno v [2.], tak jsou tyto ztráty dány jednak stejnosměrnou složkou (která se dá snadno měřit), ale také složkou, která je závislá na frekveci. Tato složka zahrnuje ztráty způsobené skin efektem, ztráty v kostře cívky atd. Složka závislá na frekvenci je však zanedbatelná vůči sejnosměrné složce, proto nebude dále uvažována.

Impedance sériového zapojení cívky s indukčností L a ztrátového rezistoru R_s je dána vztahem:

$$Z = \sqrt{R_s^2 + X_L^2}, \tag{2}$$

kde X_L je reaktance cívky, která je dána vztahem $X_L = \omega \cdot L$. Kruhová frekvence ω je definována jako $\omega = 2\pi f$. Úpravou vztahu (2) je tak možné vyjádřit, jak závisí indukčnost cívky na efektivní hodnotě napětí, prudu a frekvence:

$$L = \frac{\sqrt{\frac{u_{ef}^2}{i_{ef}^2} - R_s^2}}{2\pi f}. \tag{3}$$

Měření odporu cívky R_s se provádí podobně jako měření indukčnosti. Pouze se použije regulovatelný zdroj stejnosměrného napětí U. Cívkou bude protékat proud I. Užitím vztahu (1) a uváženíme $Z = R_s$, $U = u_{ef}$ a $I = i_{ef}$ dostáváme vztah pro výpočet R_s:

$$R_s = \frac{U}{I}. \tag{4}$$

Kvalita cívky Q udává poměr indukčnosti a ztrátového odporu. Veličina je tedy bezrozměrná. V případě fázorového diagramu je dána úhlem, který svírá napětí na cívce s proudem procházejícím cívkou.

$$Q = \frac{X_L}{R_s}, \tag{5}$$

dosazením za X_L se dostane:

$$Q = \frac{2\pi f \cdot L}{R_s} \tag{6}$$

Při měření kapacity kondenzátorů se dá opět vycházet ze vztahu (1). Náhradní schéma pro skutečný kondenzátor se volí jako paralelní kombinace rezistoru s odporem R_p a kondenzátoru s kapacitou C. Impedance takového obvodu je pak dána vztahem:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{R_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{R_p \cdot C}{\sqrt{R_p^2 + X_C^2}}, \tag{7}$$

kde X_C je reaktance kondenzátoru daná vztahem $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Vztah (7), tak mohu upravit:

$$Z = \frac{R_p^2}{\sqrt{4\pi f^2 \cdot R_p^2 \cdot C^2 + 1}}. \tag{8}$$

Ze vztahu (1) a (8) mohu vyjádřit C:

$$C = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{i_{ef}^2}{u_{ef}^2 - \left(\frac{i_{ef}}{R_p}\right)^2}}. \tag{9}$$

Hodnota odporu R_p je velmi vysoká (řádově v MΩ). Proto lze zanedbat člen $\frac{i_{ef}}{R_p}$. Vztah (9) se pak zjednoduší na

$$C = \frac{i_{ef}}{2\pi u_{ef} \cdot f}. \tag{10}$$

Výsledky měření

Nejdříve uvedu výsledky měření odporu R_s cívky. Tuto hodnotu pak budu moci využít k výpočtu indukčnosti cívky. Měřil jsem ampérmetrem s třídou přesnosti 1 a s voltmetrem s třídou přesnosti 0,5. Rozsahy na kterých jsem měřil jsou uvedeny v druhém sloupci tabulky 1.

I [A]	0,5 A	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
U [V]	1,2 V	0,16	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,96	1,12

Tabulka 1: Měření ztrátového odporu cívky

Z těchto dat jsem podle vzorce (4) určil $R_s = (2,79 \pm 0,04)\,\Omega$.

Dále jsem měřil indukčnost cívky bez jádra L_1, s jádrem L_2 a s uzavřeným jádrem L_3. K měření jsem používal voltmetr s třídou přesnosti 1,5 a ampérmetrem s třídou přesnosti 1,5.

i_ef [mA]	rozsah [mA]	ε_{ief} [mA]	u_ef [V]	rozsah [V]	ε_{uef} [V]
100	500	7,5	0,36	2,4	0,04
150	500	7,5	0,62	2,4	0,04
200	500	7,5	0,88	2,4	0,04
250	500	7,5	1,12	2,4	0,04
300	500	7,5	1,40	2,4	0,04
350	500	7,5	1,68	2,4	0,04
400	500	7,5	1,92	2,4	0,04
450	500	7,5	2,20	2,4	0,04
500	500	7,5	2,7	6	0,09

Tabulka 2: Měření impedance cívky L_1 bez jádra

V druhém a čtvrtém sloupci jsou uvedeny rozsahy, na kterých jsem měřil. Z nich a z výše uvedené třídy přesnosti jsem vypočetl chyby měření způsobené přístroji ε_{ief} a ε_{uef}. Vyšel jsem ze vztahu (3) a uvážil jsem odpor R_s cívky, který jsem změřil. Frekvence zdroje byla $f = (50,0 \pm 0,05)$ Hz. Hodnoty jsem nafitoval a vyšlo mi $L_1 = (14,17 \pm 0,13)$ mH. Po zohlednění chyb měřících přístrojů jsem dostal hodnotu $L_1 = (14,17 \pm 1,11)$ mH.

Pro cívky s jádrem a s uzavřeným jádrem jsem volil jiné hodnoty proudu i_{ef}.

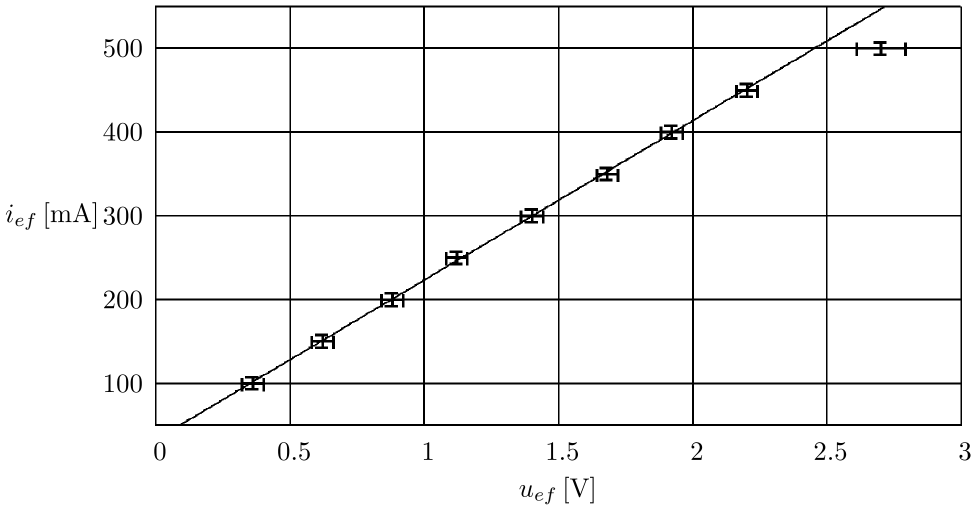
i_ef [mA]	rozsah [mA]	ε_{ief} [mA]	u_ef [V]	rozsah [V]	ε_{uef} [V]	u_ef [V]	rozsah [V]	ε_{uef} [V]
			s jádrem			s uzavřeným jádrem		
50	100	1,5	1,50	6	0,09	36	240	3,6
70	100	1,5	2,15	6	0,09	52	240	3,6
90	100	1,5	2,75	6	0,09	68	240	3,6
110	500	7,5	3,40	6	0,09	78	240	3,6
130	500	7,5	4,00	6	0,09	88	240	3,6
150	500	7,5	4,70	6	0,09	98	240	3,6
170	500	7,5	5,20	6	0,09	106	240	3,6
190	500	7,5	5,90	6	0,09	112	240	3,6
210	500	7,5	6,4	24	0,36	120	240	3,6
230	500	7,5	7,2	24	0,36	126	240	3,6
250	500	7,5	7,8	24	0,36	130	240	3,6

Tabulka 3: Měření indukčnosti cívky L_2 s jádrem a cívky L_3 s uzavřeným jádrem

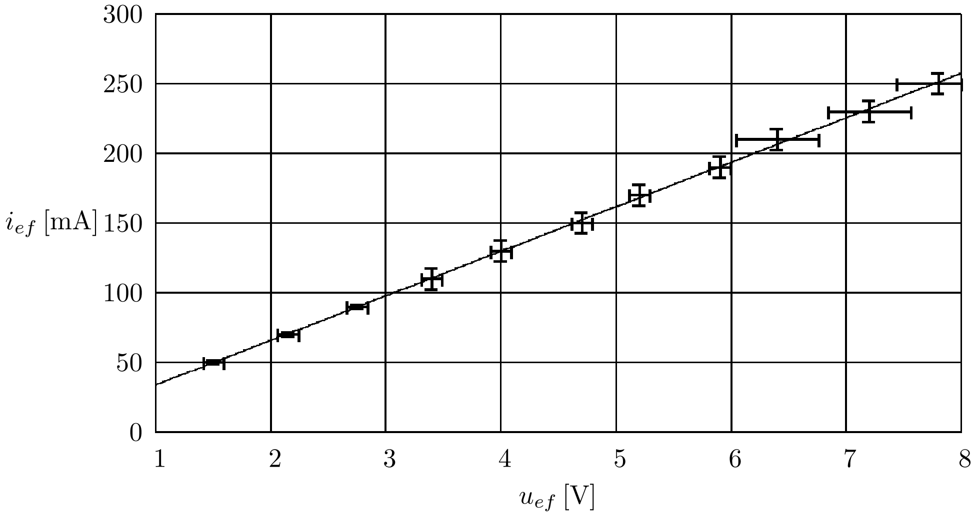
Při určování chyby měření jsem postupoval stejně jako u cívky L_1. Pomocí fitování funkce jsem určil hodnotu indukčnosti cívky s jádrem $L_2 = (99,3 \pm 6,1)$ mH. Pro cívku s uzavřeným jádrem jsem určil indukčnost $L_3 = (1,58 \pm 0,17)$ H.

Podle vztahu (6) jsem určil kvalitu jednotlivých cívek:
$Q_{L1} = 1,60 \pm 0,13$
$Q_{L2} = 11,2 \pm 0,7$
$Q_{L3} = 177 \pm 19$

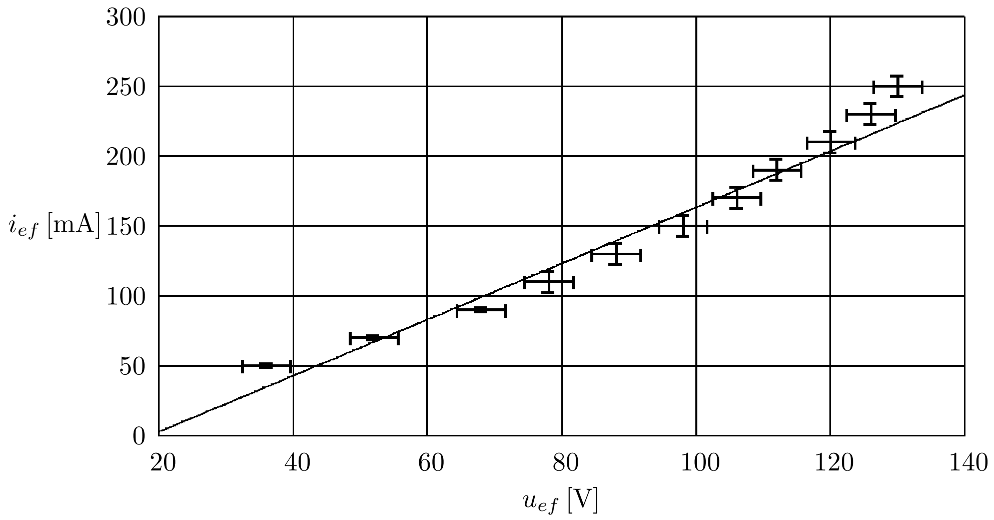
Graf 1.: Voltampérová charakteristika cívky L_1



Graf 2.: Voltampérová charakteristika cívky L_2



Graf 3.: Voltampérová charakteristika cívky L_3



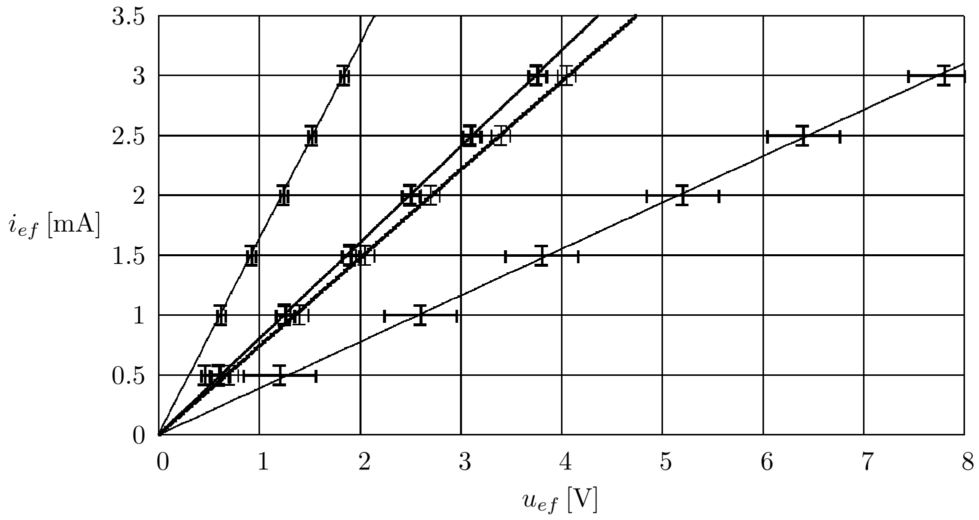
Kapacitu kondenzátorů jsem měřil stejným způsobem jako indukčnost cívek. Zde je odpor R_s zanedbatelný. K měření jsem používal ampérmetr s třídou přesnosti 1,5 a voltmetr také s třídou přesnosti 1,5. Měřil jsem 6 hodnot z kapacitní dekády, které jsem postupně označil C_1 až C_6.

i_{ef} [mA] rozsah 5 mA $\varepsilon_{ief} = 0,08\,\mathrm{mA}$	u_{efC_1} [V] rozsah 2,4V $\varepsilon_{uC1} = 0,04\,\mathrm{V}$	u_{efC_2} [V] rozsah 6V $\varepsilon_{uC2} = 0,09\,\mathrm{V}$	u_{efC_3} [V] rozsah 6V $\varepsilon_{uC2} = 0,09\,\mathrm{V}$	u_{efC_4} [V] rozsah 24V $\varepsilon_{uC4} = 0,4\,\mathrm{V}$
0,50	0,46	0,60	0,70	1,2
1,00	0,62	1,25	1,40	2,6
1,50	0,92	1,90	2,05	3,8
2,00	1,24	2,50	2,70	5,2
2,50	1,52	3,10	3,40	6,4
3,00	1,84	3,75	4,05	7,8

Tabulka 4: Měření impedance kondenzátorů $C_1 - C_4$

Pro výpočet kapacity kondenzátorů jsem použil vztah (10). Pomocí lineární regrese jsem určil hodnoty kapacit kondenzátorů:
$C_1 = (5,19 \pm 0,32)\,\mu\mathrm{F}$
$C_2 = (2,55 \pm 0,40)\,\mu\mathrm{F}$
$C_3 = (2,35 \pm 0,43)\,\mu\mathrm{F}$
$C_4 = (1,23 \pm 0,56)\,\mu\mathrm{F}$

Graf 4.: Voltampérová charakteristika kondenzátorů C_1 až C_4



Pro kondenzátory C_5 a C_6 jsem volil jiný rozsah proudů.

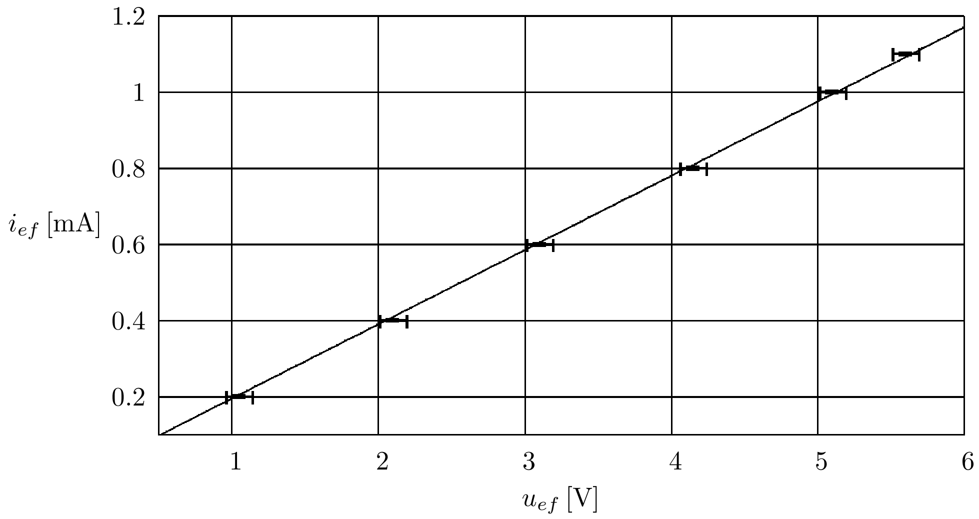
i_{ef} [mA] rozsah 2 mA $\varepsilon_{ief} = 0,03\,\mathrm{mA}$	u_{efC_5} [V] rozsah 6V $\varepsilon_{uC5} = 0,09\,\mathrm{V}$	u_{efC_6} [V] rozsah 6V $\varepsilon_{uC6} = 0,09\,\mathrm{V}$
0,2	1,05	1,10
0,4	2,10	2,15
0,6	3,10	3,20
0,8	4,15	4,20
1,0	5,10	5,20
1,1	5,60	5,70

Tabulka 5: Měření impedance kondenzátorů C_5 a C_6

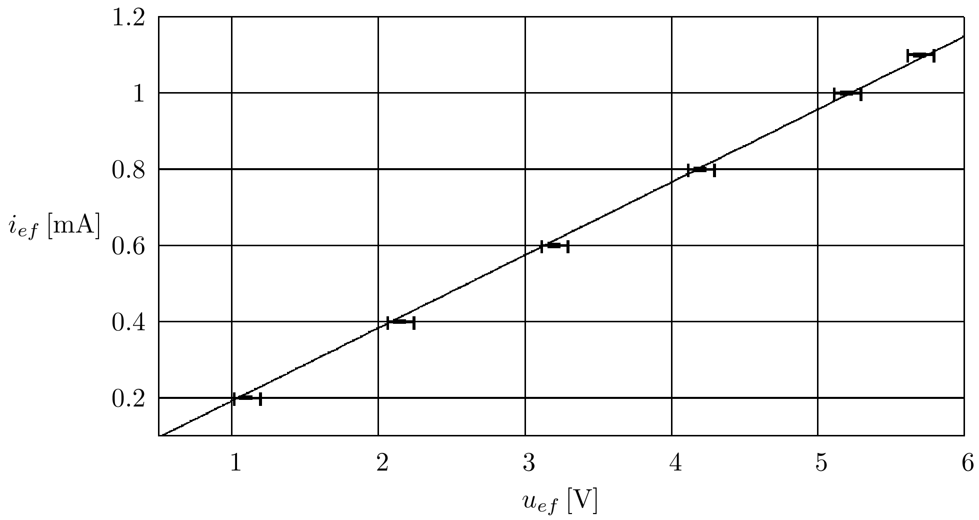
Stejně jako u kondenzátorů C_1 až C_4 jsem i zde pomocí fitování funkce (10) určil hodnotu kapacity kondenzátorů C_5 a C_6. (Hodnoty jsou velmo blízké, proto je pro přehlednost uvádím ve dvou grafech).

Výsledné hodnoty jsou:
$C_5 = (620,5 \pm 2,2)\,\mathrm{nF}$
$C_6 = (608,7 \pm 4,3)\,\mathrm{nF}$

Graf 5.: Voltampérová charakteristika kondenzátoru C_5



Graf 6.: Voltampérová charakteristika kondenzátoru C_6



Diskuse výsledků

Naměřená data jsem fitoval pomocí výše zmíněných funkcí pomocí programu GNUplot. Pomocí tohoto programu jsem také určoval statistické chyby měření. K určení celkové chyby měřících přístrojů jsem používal kvadratický zákon přenosu chyb.

Při určování odporu R_s cívky jsem vycházel ze vztahu (4). Chyba měření proudu způsobená ampér-metrem byla $\varepsilon_I = 0,01\,\mathrm{A}$. Chyba měření napětí způsobená voltmetrem byla $\varepsilon_U = 0,01\,\mathrm{V}$. Pomocí fitování dat jsem dostal hodnotu odporu $R_s = (2,79 \pm 0,01)\,\Omega$.

Měření také ovlivnily použité měřící přístroje, které mají jistý vnitřní odpor. Při porovnání metody měření pro malé a velké odpory jsem zjistil, že se nemění hodnota porudu. Proto jsem použil metodu pro malé odpory a chybu zanedbal. Metodu pro malé odpory také podporuje fakt, že $R_s \ll R_V$, kde R_V je vnitřní odpor voltmetru. Celkovou chybu jsem tak určil jako $\varepsilon_R = 0,04\,\Omega$. Tento předpoklad jsem také ověřil tím, že jsem zkusil odpor měřit metodou pro veliké odpory. U této metody byla hodnota napětí asi o 10% vyšší, což odpovídá předpokladu.

Chybu měření cívek nejvíce ovlivňovaly nępřesnosti měřících přístrojů. Vnitřní odpory měřících přístrojů jsem opět mohl zanedbat, neboť stejně jako při měření vnitřního odporu cívky, jsem i zde ověřil, že vhodnější je zapojení pro měření malých odporů. Reaktance cívky s největší indukčností je $X_{L3} = 496\,\Omega$, což by mělo být řádově menší, než vnitřní odpor voltmetru.

Měření ovlivňovala také použitá frekvence. Použitý generátor využíval frekvenci napájecí sítě. Napájecí síť by měla mít frekvenci s přesností $\pm 0,5\,\mathrm{Hz}$.

Kvality jednotlivých cívek jsem určil pouze pomocí výpočtu z naměřených hodnot pomocí vztahu (6).

Měření kapacit kondenzátorů probíhalo stejným způsobem jako měření indukčnosti cívek. Bylo ovlivněno stejnými měřícími přístroji a nepřesností frekvence. Vnitřní odpor jsem mohl opravdu zanedbat. Provedl jsem měření statického odporu kondenzátoru a tento odpor R_p mi vyšel řádově $5\,\mathrm{M\Omega}$. Člen v $\left(\frac{i_e f}{R_p}\right)^2$ je pak řádu 10^-10 až 10^-12, což můžu spolehlivě zanedbat v rámci chyby měření.

Na kapacitní dekádě byly uvedeny kapacity pro kondenzátory $C_1 = 4,84\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 2,41\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = 2,2\,\mu\mathrm{F}$, $C_4 = 1,16\,\mu\mathrm{F}$, $C_5 = 0,57\,\mu\mathrm{F}$ a $C_6 = 0,56\,\mu\mathrm{F}$. Což jsou hodnoty, které se od mých liší asi řádově o 10%.

Závěr

Proměřil jsem indukčnost a kvalitu cívek. Cívka L_1 bez jádra měla indukčnosti $L_1 = (14,17 \pm 1,11)\,\mathrm{mH}$ a kvalitu $Q_1 = 1,60 \pm 0,13$. Cívka L_2 s jádrem $L_2 = (99,3 \pm 6,1)\,\mathrm{mH}$, $Q_2 = 11,2 \pm 0,7$. Cívka L_3 s uzavřeným jádrem $L_3 = (1,58 \pm 0,17)\,\mathrm{H}$, $Q_3 = 177 \pm 19$. Vnitřní odpor R_s cívky byl $R_s = (2,79 \pm 0,04)\,\Omega$. Tedy cívka s jádrem je kvalitnější a má větší indukčnost.

Dále jsem proměřil kondenzátory na kapacitní dekádě. $C_1 = (5,19 \pm 0,32)\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = (2,55 \pm 0,40)\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = (2,35 \pm 0,43)\,\mu\mathrm{F}$, $C_4 = (1,23 \pm 0,56)\,\mu\mathrm{F}$, $C_5 = (620,5 \pm 2,2)\,\mathrm{nF}$ a $C_6 = (608,7 \pm 4,3)\,\mathrm{nF}$. Tyto hodnoty se lišily řádově o 10% od hodnot uvedených na dekádě.

Seznam použité literatury

[1.] B. Sedlák, R. Bakule: *Elektřina a magnetismus.* Státátní pedagogické nakladatelství, Praha 1980.
[2.] J. Maťátko: *Elektronika.* IDEA SERVIS, 5. vydání Praha 2002. Str. 63.