Pracovní úkol

1. Změřte účiník:
   a. rezistoru,
   b. kondenzátoru ($C = 10\,\mu\text{F}$),
   c. cívky. Určete chybu měření. Diskutujte shodu výsledků s teoretickými hodnotami pro ideální prvky. Pro cívku vypočtěte indukčnost a odpor v sériovém a paralelním náhradním zapojení.
2. Změřte účiník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru ($C = 1; 2; 5; 10\,\mu\text{F}$). Z naměřených hodnot stanovte odpor rezistoru. Určete chyby měření a rozhodněte, které z obou zapojení je v daném případě vhodnější pro stanovení odporu.
3. Změřte závislost proudu a výkonu na velikosti zařazené do sériového RLC obvodu.
4. Výsledky úkolu 3 zpracujte graficky, v závislosti na zařazené kapacitě vyneste účiník, fázový posuv napětí vůči proudu a výkon.

Teoretická část

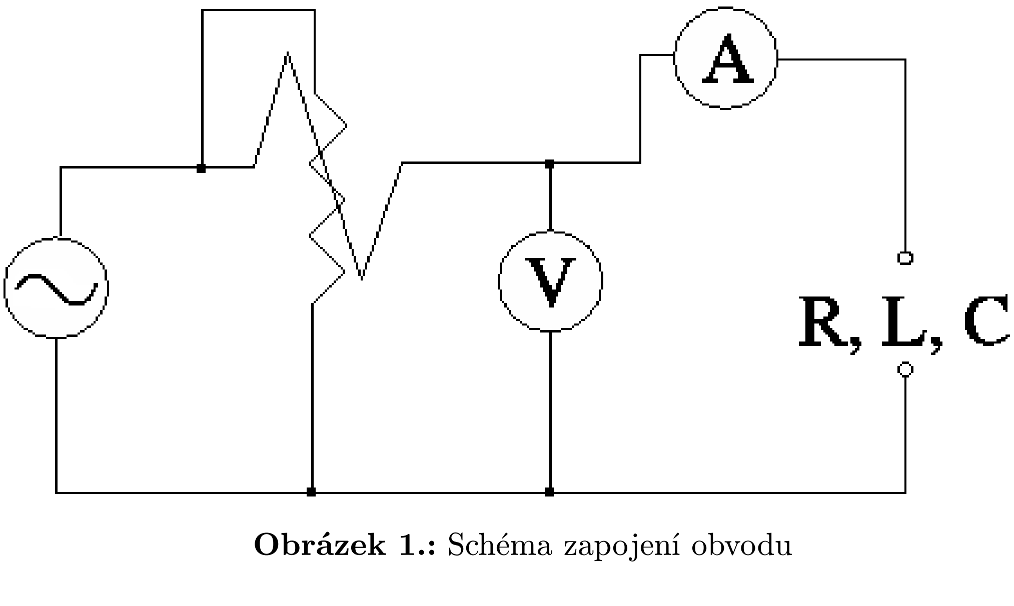
Střední hodnota výkonu je definována vztahem

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)dt, \tag{1}$$

kde $u(t)$ a $i(t)$ jsou okamžité hodnoty napětí a proudu v čase a T je doba kmitu. V případě střídavého proudu získáme integrací vztah

$$P = UI\cos\varphi, \tag{2}$$

kde U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, které měří přístroje ($U_e = U_0/\sqrt{2}$ a $I_e = I_0/\sqrt{2}$). Kosinus fázového posuvu φ proudu vůči napětí nazýváme účiník. Při měření používáme zapojení dle Obrázku 1.



Obrázek 1.: Schéma zapojení obvodu

Pro výpočet impedance střídavého obvodu používáme zobecněný ohmův zákon

$$Z^* = \frac{U^*}{I^*}, \tag{3}$$

kde Z^* je komplexní inpedance a

$$U^* = U_0 e^{j\varphi_u} \quad \text{a} \quad I^* = I_0 e^{j\varphi_i}$$

jsou komplexní amplitudy napětí a proudu.

Pro ideální rezistor je komplexní impedance

$$Z^* = R, \tag{4}$$

Impedance obvodu je tedy reálná a fázový posuv mezi proudem a napětím nulový.

Ideální kondenzátor má impedanci

$$Z^* = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}, \tag{5}$$

Impedance kapacity je tedy ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu je $-\frac{\pi}{2}$.

Pro ideální cívku platí

$$Z^* = \omega L e^{j\pi/2}. \tag{6}$$

Impedance indukčnosti je opět ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu je $\frac{\pi}{2}$.

V reálných situacích používáme součástky, které se značně liší od ideálních, proto užíváme tzv. náhradních zapojení. Skutečnou cívku nahradíme ideální cívkou a odporem zapojeným do série či paralelně. Pro sériové spojení indukčnosti L_s a odporu R_s platí

$$R_s = \frac{U}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{U}{I} |\cos \varphi|, \tag{7}$$

$$L_s = \frac{U}{\omega I} \cdot \sqrt{\frac{\tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{U}{\omega I} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}, \tag{8}$$

Pro náhradní odpor a indukčnost při paralelním zapojení platí

$$R_p = \frac{U}{I} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{U}{I |\cos \varphi|}, \tag{9}$$

$$L_p = \frac{U}{\omega I} \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi}} = \frac{U}{\omega I} \sqrt{\frac{1}{1 - \cos^2 \varphi}}, \tag{10}$$

Všechny vztahy viz [1].

	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos(\varphi)$
Rezistor	3.45 ± 0.03	59 ± 1	55 ± 2	1.06 ± 0.06
Kondenzátor	0.95 ± 0.03	59 ± 1	188 ± 8	0.086 ± 0.007
Cívka	0.83 ± 0.03	59 ± 1	35 ± 2	0.40 ± 0.04

Tabulka 1.: Účiník rezistoru, kondenzátoru a cívky

Měření

Pro všechna měření jsem používala zapojení dle Obrázku 1. Na ampermetru a voltmetru odečítáme efektivní hodnoty proudu a napětí, na wattmetru výkon obvodu.

Při měření byl použit voltmetr s přesností $\pm 0,1\%$ of rdg $\pm$ 3 digits. Vzhledem ke kolísání napětí jsem stanovila chybu naměřené hodnoty na 1 V. Třída přesnosti použitého ampérmetru byla 1.5. Výkon byl měřen wattmetrem s třídou přesnosti 0.2. Díky nepřesnému odečítání je chyba výkonu vyšší. Přesnost odečtu uvažuji 1 dílek. Odchylky byly zpracovány dle standardní teorie chyb (podrobně viz [2]).

Naměřená a zpracovaná data pro Úkol 1 udává Tabulka 1. Účiník byl vypočítán dle vztahu (2). Při měření byl použit kondenzátor o kapacitě 10.04 μF.

Dle vztahů (7) - (10) jsem vypočítala indukčnost a odpor cívky v sériovém a paralelním náhradním zapojení. Frekvenci střídavého proudu uvažuji $f = (50.0 \pm 0.5)$ Hz.

Výsledky udává tabulka 2.

zapojení	R [Ω]	L [H]
Seriové	700 ± 100	5.0 ± 0.3
Paralelní	4200 ± 600	6.0 ± 0.4

Tabulka 2.: Odpor a indukčnost reálné cívky

Výsledky Úkolu 2 udává Tabulka 3 a 4. Hodnotu účiníku jsem stanovila dle vztahu (2). Hodnota odporu rezistoru pro každé měření byla vypočtena dle vztahu (7) pro sériové a (9) pro paralelní zapojení. Vybereme-li hodnoty s nejmenší relativní chybou, dostáváme pro sériové zapojení $R_s = (1240 \pm 60)\,\Omega$ a pro paralelní zapojení $R_p = (910 \pm 40)\,\Omega$.

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos\varphi$	R_s [kΩ]
1.00	0.30 ± 0.03	59.4 ± 1.0	17.5 ± 0.4	0.29 ± 0.04	980 ± 120
2.05	1.13 ± 0.03	59.4 ± 1.0	30 ± 1	0.62 ± 0.05	1250 ± 90
4.26	2.30 ± 0.03	59.3 ± 1.0	43 ± 2	0.90 ± 0.05	1240 ± 60
6.37	1.13 ± 0.03	59.3 ± 1.0	47 ± 2	1.02 ± 0.07	1280 ± 90
10.04	3.20 ± 0.03	59.2 ± 1.0	51 ± 2	1.07 ± 0.07	1255 ± 80

Tabulka 3.: Závislost účiníku na kapacitě v RC obvodu - sériové zapojení

Tabulka 5 obsahuje závislost proudu, výkonu, účiníku a fázového posunu napětí vůči proudu na kapacitě kondenzátoru zapojeného do sériového RLC obvodu. Vzhledem k tomu, že v některých měřeních je účiník větší než 1, nelze u těchto hodnot vypočítat fázový posun. Znaménko fázového posunu bylo doplněno podle konvence (viz teoretický úvod). grafické zpracování jsem zanesla do Grafů 1 - 3. Grafy jsou uvedeny na konci protokolu.

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos\varphi$	R_p [kΩ]
1.00	3.55 ± 0.03	59.0 ± 1.0	57 ± 2	1.05 ± 0.06	994 ± 59
2.05	3.60 ± 0.03	59.2 ± 1.0	65 ± 2	0.94 ± 0.05	974 ± 53
4.26	3.88 ± 0.03	59.4 ± 1.0	94 ± 2	0.69 ± 0.03	911 ± 41
6.37	4.05 ± 0.03	59.2 ± 1.0	130 ± 8	0.53 ± 0.04	865 ± 73
10.04	4.43 ± 0.03	59.4 ± 1.0	195 ± 8	0.39 ± 0.02	787 ± 50

Tabulka 4.: Závislost účiníku na kapacitě v RC obvodu - paralelní zapojení

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos\varphi$	φ
0.56	0.25 ± 0.03	59.3 ± 1.0	11.5 ± 0.4	0.37 ± 0.06	1.20
1.05	1.11 ± 0.03	59.5 ± 1.0	24.0 ± 0.8	0.78 ± 0.06	0.68
1.56	2.03 ± 0.03	59.5 ± 1.0	32.0 ± 0.8	1.06 ± 0.06	–
2.05	2.28 ± 0.03	59.4 ± 1.0	34.0 ± 0.8	1.13 ± 0.06	–
2.77	2.13 ± 0.03	59.5 ± 1.0	33.8 ± 0.8	1.06 ± 0.06	–
3.26	2.03 ± 0.03	59.5 ± 1.0	31.5 ± 0.8	1.08 ± 0.06	–
3.77	1.95 ± 0.03	59.5 ± 1.0	31.5 ± 0.8	1.04 ± 0.06	–
3.70	1.98 ± 0.03	59.3 ± 1.0	31.8 ± 0.8	1.05 ± 0.06	–
4.32	1.88 ± 0.03	59.3 ± 1.0	30.8 ± 0.8	1.03 ± 0.06	–
4.79	1.83 ± 0.03	59.2 ± 1.0	30.5 ± 0.8	1.01 ± 0.06	–
4.88	1.78 ± 0.03	58.9 ± 1.0	30.3 ± 0.8	1.00 ± 0.06	-0.04
5.37	1.76 ± 0.03	59.1 ± 1.0	30.0 ± 0.8	0.99 ± 0.06	-0.11
5.28	1.78 ± 0.03	59.1 ± 1.0	30.3 ± 0.8	0.99 ± 0.06	-0.12
6.28	1.71 ± 0.03	59.2 ± 1.0	29.8 ± 0.8	0.97 ± 0.06	-0.24
6.37	1.70 ± 0.03	59.2 ± 1.0	29.5 ± 0.8	0.97 ± 0.06	-0.23
8.01	1.61 ± 0.03	59.4 ± 1.0	28.7 ± 0.8	0.95 ± 0.06	-0.33
8.49	1.60 ± 0.03	59.3 ± 1.0	28.8 ± 0.8	0.94 ± 0.06	-0.35
9.50	1.58 ± 0.03	59.4 ± 1.0	28.6 ± 0.8	0.93 ± 0.06	-0.38
9.01	1.58 ± 0.03	59.3 ± 1.0	28.5 ± 0.8	0.93 ± 0.06	-0.37
10.06	1.55 ± 0.03	59.3 ± 1.0	28.5 ± 0.8	0.92 ± 0.06	-0.41

Tabulka 5.: Závislost proudu, výkonu, účiníku a fázového posunu na kapacitě v RLC obvodu

Diskuse

Při měření účiníku rezistoru v Úkolu 1 se mnou zjištěná hodnota shoduje v rámci přesnosti měření s teorií, podle které při zapojení rezistoru nedochází k posuvu napětí vůči proudu ($cos\varphi = 1$). V případě měření s kondenzátorem a cívkou vyšly účiníky nenulové, což neodpovídá teoretickým předpokladům. To jsme ovšem očekávali, jelikož použité součástky rozhodně nebyly ideální. V případě cívky se projevil odpor vinutí, ze kterého je tvořena. U kondenzátoru se projevil vliv odporu přívodových vodičů a vodivost dielektrika v něm. Z výsledků je ovšem patrné, že kondenzátor měl malou vodivost, a tedy narozdíl od cívky se mnohem více blíží ideální součástce.

Relativní chyba účiníků byla ve všech případech do 10%.

V Úkolu 2 jsem stanovila účiník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru. Vzhledem k tomu, že při sériovém zapojení se více projeví vnitřní odpory měřících přístrojů, je měření v paralelním zapojení přesnější. Nejvýhodnější zapojení je takové, ve kterém se minimalizuje vliv vnitřního odporu kondenzátoru, neboli účiník je maximální, což v našem případě odpovídá paralelnímu zapojení s kapacitou $2\,\mu$F (s přihlédnutím k velikosti odchylky). Proto hodnota, která nejvíce vystihuje hodnotu odporu rezistoru je při tomto měření, kdy $R = (970 \pm 50)\,\Omega$. Nemá význam průměrovat hodnoty odporů jednotlivých měření, jelikož probíhala za různých podmínek.

Závislosti Úkolu 3 jsou zpracovány v grafech 1-3. Při malých hodnotách kapacity převažuje indukčnost, tedy napětí předbíhá proud. Při vyšších hodnotách převažuje vliv kapacity, tedy proud předbíhá napětí. V místě kde je komplexní impedance právě nulová, dochází k rezonanci. Z grafů je vidět, že rezonance nastává při kapacitě přibližně $2\,\mu$F. Rezonanční křivka je dobře patrná ze všech grafů.

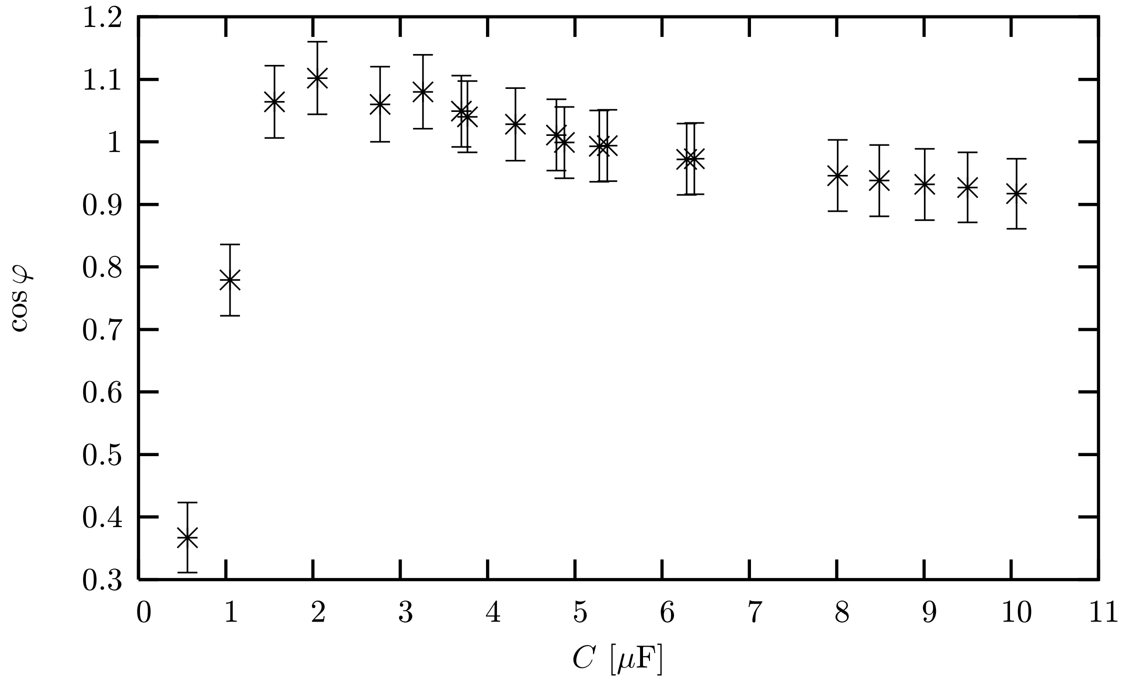
Při měření vyšel účiník ve dvou případech i v rámci chyby větší než 1, což by mohlo být způsobeno použitými přístroji. Nenulový odpor ampérmetru a konečný odpor voltmetru mohly do jisté míry ovlivnit výsledky. Další možnou příčinou je, že nebyl splněn předpoklad harmonického průběhu napětí, čemuž by odpovídalo značné kolísání hodnot na voltmetru. Všechny naše úvahy předpokládají ideální harmonický průběh, což zajisté splněno nebylo.

Závěr

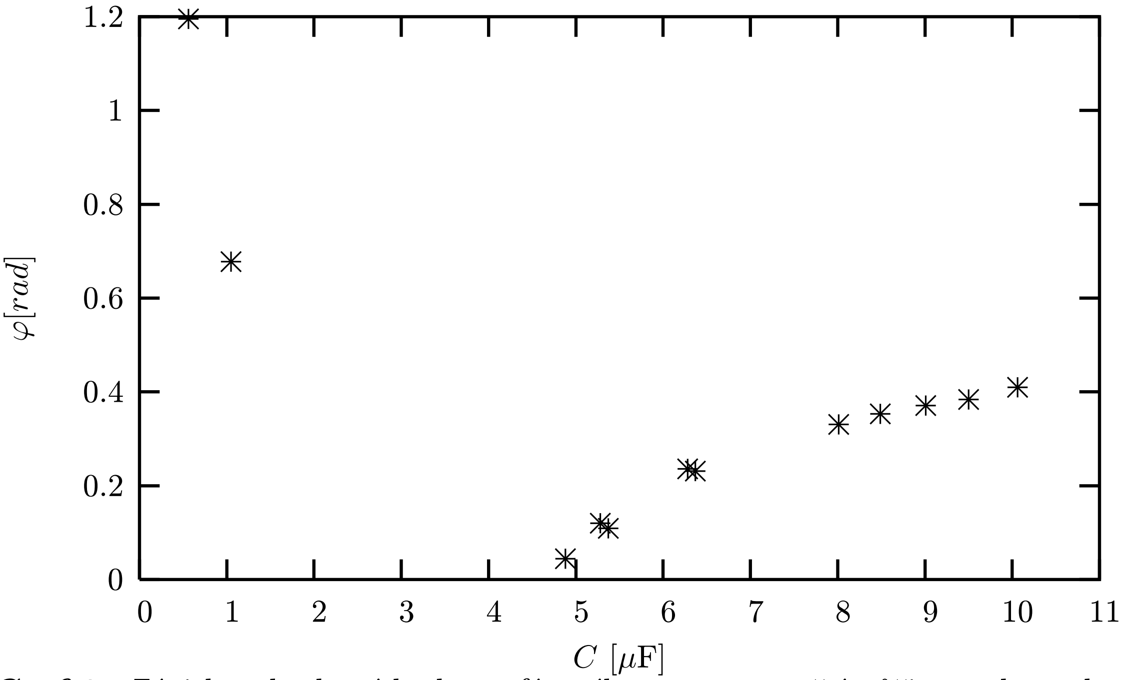
Výsledky Úkolu 1 - 3 udávají Tabulky 1 - 5. Změřila jsem účiník rezistoru, kondenzátoru a cívky a to jak samostatně, tak i v sériovém a paralelním zapojení. Stanovená hodnota odporu je $R = (970 \pm 50)\,\Omega$. Zjištěná indukčnost cívky je 5.5 H. Grafické zpracování je zaneseno do Grafů 1-3.

Literatura

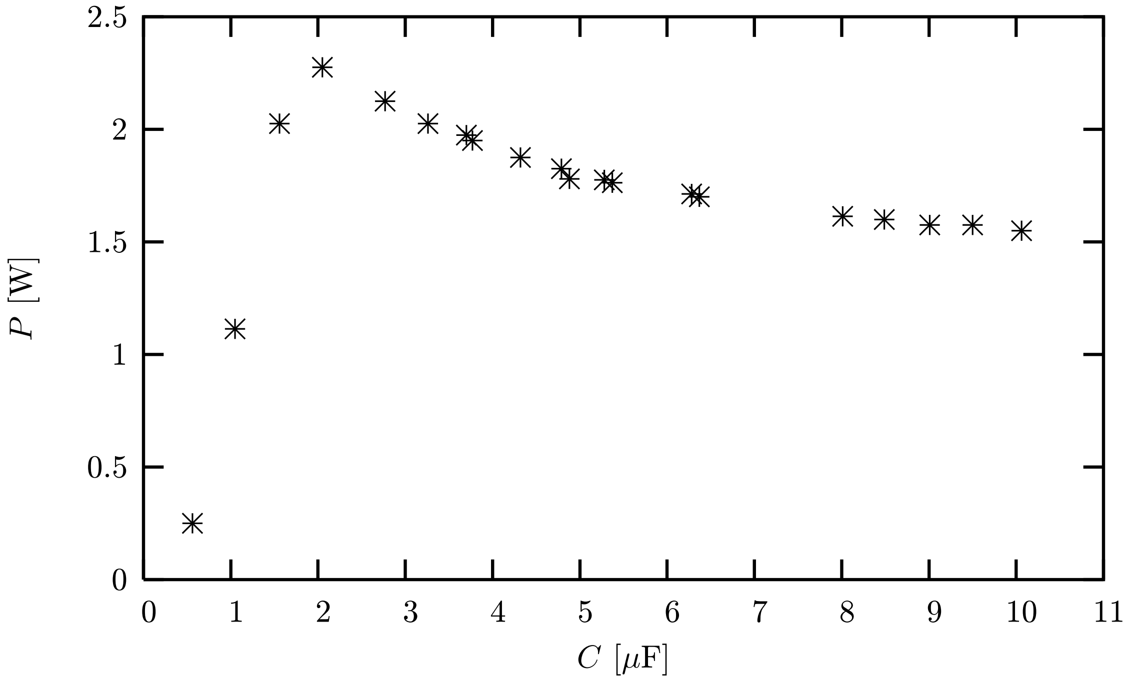
[1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II., SPN, Praha 1989
[2] J. Englich: Zpracování výsledků fyzikálních měření, Praha 2000



Graf 1.: Závislot účiníku na kapacitě kondenzátoru pro sérový RLC obvod



Graf 2.: Závislot absolutní hodnoty fázového posuvu napětí vůči proudu na kapacitě kondenzátoru pro sérový RLC obvod



Graf 3.: Závislot výkonu na kapacitě kondenzátoru pro sérový RLC obvod