Vojtěch Hrubý Úloha 4

## Pracovní úkol

1. Změřte odpor šesti drátů Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem Metra – MTW. Vysvětlete rozdíly ve výsledcích měření.
2. Stanovte měrný odpor jednotlivých vzorků i s příslušnou chybou výsledku. Stanovené hodnoty porovnejte s hodnotami uváděnými v tabulkách.

## Teoretická část

Měření malých odporů vyžaduje zvláštní pozornost, protože měříme odpory srovnatelné velikosti s odpory přívodních vodičů. Jednoduché dvoubodové připojení měřeného odporu můžeme použít u větších odporů, kde je chyba zanedbáním přívodů poměrně malá. Pro malé odpory však používáme čtyřbodové připojení měřeného odporu, kterým se odstraní negativní vliv odporu přívodů. V tomto případě přivádíme na vzorek zvlášť proud, který měříme, a ke svorkám co nejblíže vzorku připojujeme voltmetr. Odpor proudových přívodů se potom neuplatní vůbec, chyba způsobená vnitřním odporem voltmetru je vzhledem k velikosti měřeného odporu zanedbatelná.

Velmi přesná měření lze provádět pomocí můstkových měřicích obvodů. Jednodušší Wheatstoneův můstek používá dvoubodové přípojení měřeného odporu, Thomsonův můstek používá čtyřbodové zapojení.

Můstkové metody obecně pracují na principu porovnávání neznámé veličiny se známými (s normálem). Schéma Wheatstoneova můstku je na obrázku 2 na straně 26 v [2]. Je-li můstek v rovnováze, galvanometrem neteče žádný proud. To nastává v případě

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{1}$$

V použitém měřicím přístroji je $R_2$ tvořen pětimístnou odporovou dekádou, $R_3$ a $R_4$ můžeme volit z hodnot 1, 10, 100 a 1000 Ω. $R_1$ je neznámý odpor. Označíme-li $R_1 = R_x$, $R_2 = R$, $R_3 = a$ a $R_4 = b$, pak neznámý odpor určíme vztahem

$$R_x = \frac{a}{b} R, \tag{2}$$

pro takové hodnoty, kdy galvanometrem neteče žádný proud.

Schéma Thomsonova můstku je na obrázku 3 na straně 27 v [2]. V tomto případě je měřený odpor přípojen čtyřbodově, takže lze očekávat přesnější měření. V přístroji Metra MTW nastává rovnováha můstku pokud platí

$$R_x = \frac{R_n}{R_p} R, \tag{3}$$

kde $R_x$ je neznámý odpor, $R_n$ je normál, $R_p$ je pevný odpor volitelný 1, 10, 100 a 1000 Ω a $R$ je hodnota odečtená z pětimístné odporové dekády.

Chybu měření odporu můžeme určit odhadem jako chybu na posledním desetinném místě. V této chybě však není zahrnuta systematická chyba Wheatstoneova můstku. Tu můžeme snížit tím, že od naměřeného odporu odečteme odpor přívodních vodičů. Potom je korigovaná hodnota měřeného odporu

$$R_{xk} = R_x - R_v, \tag{4}$$

kde $R_v$ je odpor přívodních vodičů.

Měrný odpor je definován vztahem

$$\varrho = R\frac{S}{l}, \tag{5}$$

kde $S$ je průřez vodiče, což je pro drát kruhového průřezu $S = \pi d^2/4$, a $l$ je délka vodiče. Chybu měrného odporu určíme vztahem odvozeným podle [1]

$$\Delta\varrho = \varrho\left(\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}\right), \tag{6}$$

kde $\Delta x$ je chyba veličiny $x$. Známe-li pro některou veličinu více různých chyb (měření, statistická, a pod.), celková chyba veličiny je

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta_1 x)^2 + \cdots + (\Delta_n x)^2}. \tag{7}$$

### Měření

Měření Wheatstoneovým můstkem bylo provedeno postupem uvedeným v teoretické části. Odpor na dekádě jsem nastavoval od nejhrubějších řádů po nejjemnější, abych dosáhl co největší přesnosti i rychlosti měření. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1 včetně odporu samotných přívodů a následené korekce odporu vzorků

| | $R\,[\Omega]$ | $a\,[\Omega]$ | $b\,[\Omega]$ | $R_x\,[\Omega]$ | $R_{xk}\,[\Omega]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Wolfram | 145.1 | 1 | 1000 | $0.1451 \pm 0.0001$ | $0.1169 \pm 0.0002$ |
| Měď | 49.3 | 1 | 1000 | $0.0493 \pm 0.0001$ | $0.0211 \pm 0.0002$ |
| Konstantan | 3609.0 | 1 | 1000 | $3.6090 \pm 0.0001$ | $3.5808 \pm 0.0002$ |
| Železo | 664.6 | 1 | 1000 | $0.6646 \pm 0.0001$ | $0.6364 \pm 0.0002$ |
| Mosaz | 249.6 | 1 | 1000 | $0.2496 \pm 0.0001$ | $0.2214 \pm 0.0002$ |
| Chromnikl | 1206.4 | 1 | 1000 | $1.2064 \pm 0.0001$ | $1.1782 \pm 0.0002$ |
| Vodiče | 28.2 | 1 | 1000 | $0.0282 \pm 0.0001$ | |

**Tabulka 1.:** Odpor drátů naměřený Wheatstoneovým můstkem

Při měření Thomsonovým můstkem jsem volil $R_p$ vždy takový, abych mohl co nejlépe využít rozsah dekády. Naměřené hodnoty shrnuje tabulka 2. Odpor normálu byl

$$R_n = 0.1\,\Omega.$$

| $R\,[\Omega]$ | $R_p\,[\Omega]$ | $R_x\,[\Omega]$ |
|---|---|---|
| 1390 | 1000 | $0.1390 \pm 0.0001$ |
| 200.3 | 1000 | $0.02003 \pm 0.00001$ |
| 3596 | 100 | $3.596 \pm 0.001$ |
| 6440 | 1000 | $0.6440 \pm 0.0001$ |
| 2216 | 1000 | $0.2216 \pm 0.0001$ |
| 1179 | 100 | $1.179 \pm 0.001$ |

**Tabulka 2.:** Odpor drátů naměřený Thomsonovým můstkem

Pro výpočet měrného odporu vzorků potřebujeme znát ještě parametry $l$ a $d$. Měření délky vzorků je málo přesné, protože dráty nebyly dobře napnuté. Toto je potřeba zohlednit odhadem větší chyby měření. Za délku drátů tedy považuji vzdálenost břitů, ve kterých byly uchyceny, s chybou mnohem větší, než by odpovídala přesnosti pásového měřítka

$$l = (0.902 \pm 0.005)\ \mathrm{m}.$$

Měření průměru drátů $d$ také nebylo bez nesnází. Bylo potřeba ověřit, zda mají dráty všude stejný průměr. Proto jsem vždy měřil ve čtyřech náhodně zvolených místech. Naměřená data uvádím v tabulce 3. Chyba měřidla je větší než statistická chyba, proto považuji průměr za dostatečně stejný ve všech místech drátu vzhledem k přesnosti měření.

| | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $\bar{d}$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | všechny hodnoty jsou v mm | | | | | | | |
| Wolfram | 0.68 | 0.68 | 0.69 | 0.68 | 0.68 | 0.002 | 0.01 | 0.01 |
| Měď | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 1.01 | 0.99 | 0.006 | 0.01 | 0.01 |
| Konstantan | 0.39 | 0.40 | 0.39 | 0.39 | 0.39 | 0.003 | 0.01 | 0.01 |
| Železo | 0.48 | 0.48 | 0.49 | 0.48 | 0.48 | 0.002 | 0.01 | 0.01 |
| Mosaz | 0.59 | 0.59 | 0.59 | 0.60 | 0.59 | 0.002 | 0.01 | 0.01 |
| Chromnikl | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.003 | 0.01 | 0.01 |

**Tabulka 3.:** Naměřené průměry drátů. $d_i$ jsou naměřené hodnoty, $\bar{d}$ je jejich aritmetický průměr, $\sigma_1$ je směrodatná odchylka průměru, $\sigma_2$ je chyba měřidla a $\sigma$ je celková chyba

Konečně tabulka 4 přináší srovnání naměřeného měrného odporu zkoumaných vzorků s tabulkovými hodnotami z [3]. Tabulkovou hodnotu pro železo jsem nenašel, a proto uvádím hodnotu pro ocel.

| | Wheatstone $\varrho\,[\mu\Omega \cdot \mathrm{m}]$ | Wheatstone k. $\varrho\,[\mu\Omega \cdot \mathrm{m}]$ | Thomson $\varrho\,[\mu\Omega \cdot \mathrm{m}]$ | Tabulky $\varrho\,[\mu\Omega \cdot \mathrm{m}]$ |
|---|---|---|---|---|
| Wolfram | $0.059 \pm 0.002$ | $0.047 \pm 0.002$ | $0.056 \pm 0.002$ | 0.053 |
| Měď | $0.042 \pm 0.001$ | $0.018 \pm 0.001$ | $0.017 \pm 0.001$ | 0.018 |
| Konstantan | $0.48 \pm 0.03$ | $0.48 \pm 0.03$ | $0.48 \pm 0.03$ | 0.50 |
| Železo | $0.13 \pm 0.01$ | $0.13 \pm 0.01$ | $0.13 \pm 0.01$ | $0.1 - 0.2$ |
| Mosaz | $0.076 \pm 0.003$ | $0.068 \pm 0.003$ | $0.068 \pm 0.003$ | 0.08 |
| Chromnikl | $1.03 \pm 0.03$ | $1.01 \pm 0.03$ | $1.01 \pm 0.03$ | 1.1 |

**Tabulka 4.:** Naměřené a tabulkové měrné odpory materiálů

### Diskuse

Celá diskuse se opírá o výsledky uvedené v tabulce 4. Zcela zřetelné jsou rozdíly výsledků měření Wheatstoneovým a Thomsonovým můstkem. Rozdíl je pochopitelně zřetelnější pro malé odpory. Například pro konstantan dostáváme naprosto stejné výsledky, pro měď je naproti tomu rozdíl obrovský. To je způsobeno nenulovým odporem přívodních vodičů při měření Wheatstoneovým můstkem. Potvrzuje to dobrá shoda výsledků, odečteme-li od hodnot naměřených Wheatstoneovým můstkem odpor samotných vodičů (Wheatstone k.). Kromě wolframu se pak výsledky shodují v rámci chyby měření s Thomsonovou metodou.

Srovnání s tabulkovými hodnotami přináší mnoho obtíží. V rámci chyby se jsou ve shodě pouze výsledky pro měď a konstantan (srovnávám korigované hodnoty Wheatstoneovou metodou a výsledky Thomsonoým můstkem s tabulkami). Naměřené hodnoty pro železo jsou v tabulkovém intervalu pro ocel. Výsledky měření na wolframu jsou dosti podivné, protože se neshodují ani korigovaná Wheatstoneova metoda s Thomsonovou ani s tabulkami. Thomsonova metoda alespoň přinesla výsledek, jehož rozsah chyby je velmi blízko tabulkové hodnotě. Možných příčin je více—například hrubá chyba v odečítání z dekády, přechodové odpory v uchycení drátu nebo příliš velký průhyb.

Mnohem zajímavější jsou výsledky pro chromnikl a mosaz. V těchto případech se korigovaná Wheatstoneova a Thomsonova metoda ve výsledcích shodují, ale tabulkové hodnoty jsou výrazně odlišné. Tyto kovy jsou vždy slitiny dvou kovů, takže záleží na jejich skutečném poměru. Ten není uveden ani v tabulkách ani na vzorcích, takže se ve skutečnosti mohou značně lišit (přinejmenším namám o jejich shodě jistotu). Druhou možností je opět přílišný průhyb drátu.

## Závěr

Shrnutí výsledků měření a srovnání s tabulkovými hodnotami je v tabulce 4. Měření jasně ukázalo, že Wheatstoneův můstek je nevhodný pro měření malých odporů, protože zanáší podstatnou systematickou chybu dvoubodovým připojením vzorku. Pro odpory řádově $1\,\Omega$ a vyšší se již tato chyba uplatňuje málo. Pro menší odpory, které jsou stále ještě větší než odpor přívodů, můžeme zlepšit měření odečtením odporu přívodů od výsledku. Pro menší odpory je tato metoda již naprosto nevhodná. Tyto problémy výborně odstranila Thomsonova metoda.

Srovnání s tabulkovými hodnotami přineslo v některých případech shodu (měď, konstantan, železo) v rámci chyby měření, v případě mosazi a chromniklu se neshodují s tím, že nemám konkrétní informace o složení těchto slitin, a při měření wolframu zřejmě došlo ke hrubé chybě.

## Literatura


[1] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.
[2] Bakule, R., Šternberk, J.: Fyzikální praktikum II. Praha 1989.
[3] Mikulčák, J., Klimeš, B., Široký, J., Šůla, V., Zemánek, F.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky. SPN. Praha 1988.