Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. XXI.

Název: Měření tíhového zrychlení z doby kmitu kyvadla

Pracoval: Radim Pechal   stud. skup. Y – 16   dne 3. března 2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:..

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Teoretický úvod

Tíhové zrychlení určuje velikost gravitační síly, kterou Země působí na objekty v blízkém okolí povrchu. Také tuto veličinu můžeme chápat jako velikost intensity gravitačního pole Země.

K měření tíhového tělesa se využívá fyzické kyvadlo. Doba kmitu fyzického kyvadla je udávána vzorcem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m hmotnost kyvadla, d vzdálenost těžiště od osy otáčení, α je maximální úhlová výchylka těřiště z rovnovážné polohy a g je hledané místní zrychlení. Z této rovnice vycházejí následující modely kyvadel, pomocí kterých je možné měřit místní tíhové zrychlení.

Matematické kyvadlo

Jedná se o ideální model, kdy je předpokládáno, že máme nehmotnou nit na které je zavěšen hmotný bod, který vykonává periodický pohyb. Moment setrvačnosti hmotného bodu je zde dán vztahem

$$I = ml^2 \tag{2}$$

pokud předpokládáme, že se kyvadlo pohybuje v malých výchylkách, můžeme člen $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ze vzorce (1) zanedbat. Úpravou pak získáváme vztah pro závislost místního gravitačního zrychlení g na periodě T_M

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2} \tag{3}$$

U zjednodušeného případu se dopouštíme největší chyby při zanedbání hmotnosti niťi a při idealizace závaží za hmotný bod. Tímto se výrazně změní moment setrvačnosti kyvadla. Pro výpočet chyby způsobené aproximací si rozdělím matematické kyvadlo na tři části. První je nit', kterou můžu nahradit homogenní tyčí o délce l_n a hmotnosti m_n, druhou částí je očko, kterým je kulička přichicena k niťi, tuto část také idealizuji homogenní tyčí o délce l_z a hmotnosti m_z a poloměru d_z. Poslední částí je samotný hmotný bod, který je realizován homogenní koulí o poloměru r a hmotnosti m_k.

Pro moment setrvačnosti homogenní koule platí vztah

$$I_k = \frac{2}{5}m_k r^2 \tag{4}$$

pro moment setrvačnosti homogenní tyče platí vztah

$$I_t = \frac{1}{12}m_t l^2 \tag{5}$$

Uvedené vztahy jsou vztaženy k ose otáčení procházejícím těžištěm těles (v případě homogenní tyče se jedná o osu kolmou k tyči). Pro výpočet momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k rovnoběžné ose s osou procházející těžištěm využiju Steinerovu větu

$$I = I_0 + Ma^2 \tag{6}$$

kde I_0 je původní moment setrvačnosti, M je hmotnost tělesa a a je vzáhemná vzdálenost os otáčení.

Celkový moment setrvačnosti tak získám jako součet momentů setrvačnosti dílčích částí matematického kyvadla

$$I = I_n + I_z + I_k \tag{7}$$

$$I = \frac{1}{12}m_n l_n^2 + m_n\left(\frac{1}{2}l_n\right)^2 + \frac{1}{12}m_z l_z^2 + m_z\left(\frac{1}{2}l_z + l_n\right)^2 + \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k\left(r + l_z + l_n\right)^2 \tag{8}$$

$$I = \frac{1}{3}m_n l_n^2 + \frac{1}{12}m_z l_z^2 + m_z\left(\frac{1}{2}l_z + l_n\right)^2 + \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k\left(r + l_z + l_n\right)^2 \tag{9}$$

Ke konečnému výpočtu mi ještě chybí určit vzdálenost těžiště od osy otáčení d. Jednostlivé části matematického kyvadla jsou symetrické, proto k určení vzdálenosti těžiště od osy otáčení použiu vážený průměr

$$d = \frac{m_n \cdot \frac{1}{2} \cdot l_n + m_z \cdot \left(l_n + \frac{1}{2}l_z\right) + m_k \cdot (l_n + l_z + r)}{m_n + m_z + m_k} \tag{10}$$

Tyto vztahy dosadím do rovnice (1). Opět předpokládám malé výchylky a tak můžu člen $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}$. A tak dostávám vztah pro místní zrychlení bez zanedbání momentu setrvačnosti

$$g = \frac{4\pi^2\left(\frac{1}{3}m_n l_n^2 + \frac{1}{12}m_z l_z^2 + m_z\left(\frac{1}{2}l_z + l_n\right)^2 + \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k\left(r + l_z + l_n\right)^2\right)}{T^2\left(m_n \cdot \frac{1}{2} \cdot l_n + m_z \cdot \left(l_n + \frac{1}{2}l_z\right) + m_k \cdot (l_n + l_z + r)\right)} \tag{11}$$

Reverzní kyvadlo

K měření místního gravitačního zrychlení se také používá reverzní kyvadlo. Jedná se o kyvadlo, které je přizpůsobeno tak, aby se mohlo kývat kolem dvou různých os. Pokud fyzické kyvadlo kývá kolem svých dvou os se stejnou periodou tak buď jsou tyto osy vzhledem k těžišti položeny symetricky, nebo jsou obě osy os sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla.

Pro určení místího zrychlení se využívá druhý případ. Hledají se dvě osy kolem kterých se kyvadlo kývá se stejnou periodou. Místní gravitační zrychlení můžeme pak určit ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \tag{12}$$

kde l_r je redukovaná délka kyvadla a T je naměřená perioda.

Při měření se využívá jako reverzního kyvadla tyč se dvěma rovnoběžnými břity vzdálenými o pevnou vzdálenost. Na jednom konci je kovová čočka, která slouží k dosažaní nesymetričnosti. Tato čočka jde posouvat. Při měření se snažíme dosáhnout toho aby perioda kmitů kyvadla kolem obou os byla stejná.

Při měření by stačilo naměřit pouze dvě krajní polohy a dobu periody odečíst pomocí grafické interpolace, ovšem vzhledem k nepřesnostem a k tomu, že vztah není zcela lineární je vhodné proměřit hodnoty v místě předpokládané stejné periody pečlivěji.

Výsledky měření

Měření pomocí matematického kyvadla

Nejdříve jsem měřil parametry nitě a použité kuličky pro měření metodou matematického kyvadla

Hmotnost kuličky a závěsu: $m_{kz} = (278,7 \pm 0,1)\, g$

Hmotnost niťi: $m_n = (0,1162 \pm 0,0002)\, g$

Délka niťě: $l_n = (998 \pm 1)\, mm$

Výška závěsu: $l_z = (13,28 \pm 0,02)\, mm$

Odhad průměru závesu: $d_z = (5 \pm 1)\, mm$

Vzhledem k opotřebování používané kuličky jsem měření průměru provedl několikrát na různých místech

d [mm]
40,42
39,80
39,90
40,10
40,44
40,42
40,12
40,38
39,86
40,26
39,98

Tabulka 1: Naměřené hodnoty průměru kuličky

Měření byla zatížena chybou $\pm 0,2 mm$. Z těchto naměřených dat jsem určil průměr použité kuličky: $d = (40,15 \pm 0,22) mm$. K výpočtu je potřeba znát poloměr kuličky, který je $r = (20,08 \pm 0,11) mm$

K měření periody jsem používal stopky ovládané optozávorou, díky tomu jsem dosáhl poměrně shodných dat.

$t_M [s]$	$T_M [s]$
10 period	1 perioda
20,3821	2,03821
20,3795	2,03795
20,3836	2,03836
20,3872	2,03872
20,3843	2,03843
20,3820	2,03820
20,3851	2,03851
20,3820	2,03820
20,3840	2,03840
20,3828	2,03828

Tabulka 2: Naměřené doba 10 period matematického kyvadla a vypočtená hodnota jedné periody

Z naměřených hodnot jsem určil dobu jedné periody jako $T_M = (2,038 \pm 0,001)s$.
Pro model matematického kyvadla dostávám hodnotu $g = (9,78 \pm 0,05)m \cdot s^{-2}$

Pro model s nezanedbatelným momentem setrvačnosti ještě musím dopočítat některé veličiny. Jedná se o hmotnost koule a hmotnost závěsu. Předpokládám, že se jedná o homogenní těleso.
Hmotnost kuličky: $m_k = (276,7 \pm 0,5)\,g$
Hmotnost závěsu: $m_z = (2,1 \pm 0,5)\,g$
Konečně získávám hodnotu místního tíhového zrychlení $g = (9,80 \pm 0,08)m \cdot s^{-2}$

Měření pomocí reverzního kyvadla

Nejdříve jsem změřil redukovanou délku kyvadla $l_r = (996 \pm 1)mm$
Po té jsem nejdříve nastavil čočku do nulové polohy změřil periodu kmitání kolem jednotlivých os. Po té jsem nastavil čočku do maximální polohy a opět změřil periodu jednotlivých kmitní.

h [mm]	t [s]	T [s]	t [s]	T [s]
	10 period	1 perioda	10 period	1 perioda
	osa A	osa A	osa B	osa B
0	20,5228	2,05228	20,1199	2,01199
	20,5203	2,05203	20,1162	2,01162
49,36	18,3587	1,83587	19,7269	1,97269
	18,3576	1,83576	19,7281	1,97281

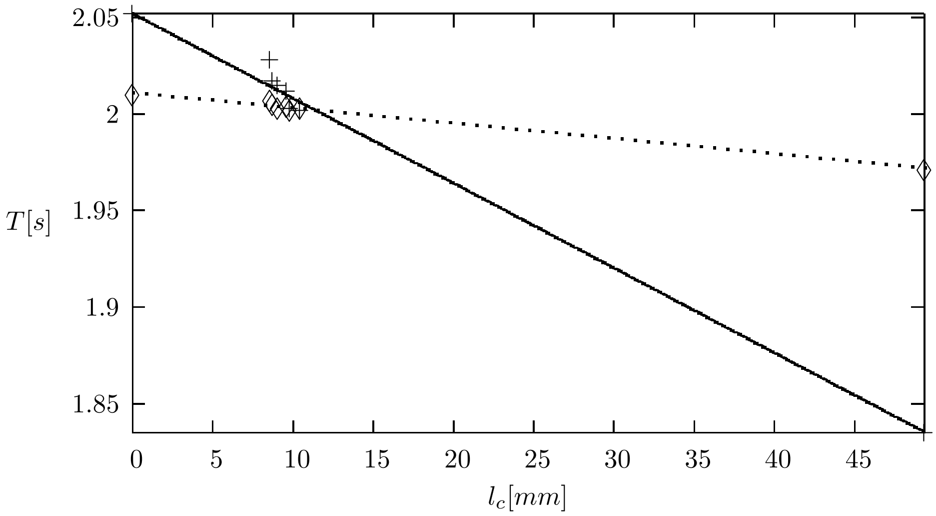
Tabulka 3: Naměřené doba 10 period reverzního kyvadla v mezních polohách čočky

Tyto výsledky jsem zanesl do grafu a pomocí grafické interpolace jsem odhadl výchylku čočky, pro kterou jsou periody kmitání stejné.

h [mm]	t [s]	T [s]	t [s]	T [s]
	10 period	1 perioda	10 period	1 perioda
	osa A	osa A	osa B	osa B
8,56	20,2831	2,02831	20,0818	2,00818
	20,2821	2,02821	20,0816	2,00816
8,72	20,1798	2,01798	20,0658	2,00658
	20,1779	2,01779	20,0650	2,00650
9,06	20,0620	2,00620	20,0433	2,00433
	20,0651	2,00651	20,0460	2,00460
9,60	20,1264	2,01264	20,0551	2,00551
	20,1249	2,01249	20,0559	2,00559
9,82	20,0381	2,00381	20,0327	2,00327
	20,0390	2,00390	20,0372	2,00372
10,46	20,0282	2,00282	20,0404	2,00404
	20,0200	2,00200	20,0406	2,00406

Tabulka 4: Naměřené doba 10 period reverzního kyvadla kolem předpokládané polohy

Z naměřených časů je zřejmé, že doby period se shodují v čase $T = (2,003 \pm 0,001)s$. Dosazením do vztahu (12) získávám místní tíhoví zrychlení $g = (9,800 \pm 0,020)m \cdot s^{-2}$.



Graf 1: Závislost periody kyvadla na vychýlení kovové čočky

Diskuse výsledků

Nejdříve jsem měřil místní tíhové zrychlení pomocí metody matematického kyvadla. Tato metoda nabízí dva možné přístupy. Prvním přístupem je zanedbání momentu setrvačnosti nitě a celkové nahlížení na úlohu jako na zidealizovaný hmotný bod na nehmotné niťi. Díky tomu stačí k určení gravitačního zrychlení pouze změřit dvě hodnoty. Díky tomu je chyba způsobená nepřestnostmi přístrojů menší než při druhém přístupu, kdy jsem se pokusil moment setrvačnosti co nejméně zanedbat. Ovšem toto zjednodušení způsobuje větší systematickou chybu danou prací s více vstupními veličinami.

V prvním případě bylo potřeba určit velikost vzdálenosti hmotného bodu od osy, což jsem získal jako součet vzdáleností jednotlivých částí $l = l_n + l_z + r$. K měření času jsem využíval stopek, které byly spouštěny a zastavovány pomocí optočlenu a tak jejich chyba měření byla velice malá a při měření 10 period jsem dostával chybu vzhledem k jedné periodě $\pm 0,0001$. Po dosazení hodnot do vztahu (3) jsem dostal hodnotu místního tíhového zrychlení $g = (9,78/pm0,05)m \cdot s^{-2}$.

V případě, že jsem se pokusil nezanedbat moment setrvačnosti matematického kyvadla, jsme postupoval tak, že jsem nahradil kyvadlo třemi částmi. Hmotnost závěsu a hmotnost koule jsem musel vypočítat, neboť tyto dvě části k sobě byly pevně přidělány. Proto jsem změřil výšku závěsu l_z a odhadl poloměr válečku, kterým jsem aproximoval očko závěsu. Zde jsem se dopustil asi největší chyby, neboť závěs měl matematicky velmi obtížně popsatelný tvar.

Z tvar koule a závěsu jsem určil hustotu materiály a vypočetl hmotnosti jednotlivých dílů pomocí vztahu $\varrho = \frac{m_{kz}}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_k^3 + l_z \cdot \pi \left(\frac{d_z}{2}\right)^2}$. Odtud jsem pak určil hmotnost závěsu m_z a koule m_k. Pak jsem již dosadil do vztahu (11) a určil místní táhové zrychlení $g = (9,80 \pm 0,08)m \cdot s^{-2}$

Při měření závislosti místního gravitačního zrychlení pomocí reverzního kyvadla, jsem se největší relativní chyby dopouštěl při měření redukované délky kyvadla. Neboť při použití zmíněných stopek spouštěným optočleme jsem dosáhl poměrně vysoké spolejlivosti při měření periody kmitání. Nadále jsem prováděl pouze dvě měření pro dané podmínky. K dalším výpočtům jsem využíval periodu kmitání s platností na tisíciny. K odhadnutí vychýlení čočky při které je perioda kmitů kolem obou os stejná jsem využil grafickou interpolaci. Nejdříve jsem kovovou čočku nstavil do nulové polohy. Po proměření jsem ji předunul do maximální polohy, což bylo vychýlení o $49,38mm$. Místo grefické interpolace jsem mohl tuto úlohu řešit početně, jako systém dvou rovnic o dvou neznámých.

Závislost není zcela lineární a při odečtení či výpočtu periody by došlo k nárůstu chyby měření, proto jsem dále podrobněji proměřil periodu kmitání v závislosti na vychýlení čočky. Mým cílem bylo najít takové vychýlení při kterém doby period kmitání kyvadla kolem obou os bude stejné. Nakonec se mi podařilo najít shodnost periody s přesností na tisíciny sekundy pro periody kmitů kolem jednotlivých os.

Následně jsem pouze vypočetl místní gravitační zrychlení $g = (9,800 \pm 0,020)m \cdot s^{-2}$.

Závěr

Změřil jsem místní tíhové zrychlení pomocí několika metod. Jako nejspolehlivější metoda se ukázala metoda reverzního kyvadla. U této metody mi vyšlo $g = (9,800 \pm 0,020)$.

Dalším způsobem měření místního tíhového zrychlení bylo použití modelu matematického kyvadla. Pro jeho reprezentaci jsem využil dvou modelů. Jedním byl model se zanedbaným momentem setrvačnosti niti a závěsu, zde mi vyšlo tíhové zrychlení $g = (9,78 \pm 0,05)m \cdot s^{-2}$. Při druhém modelu, když jsem nezanedbával moment setrvačnosti, mi vyšlo místní tíhové zrychlení $g = (9,80 \pm 0,08)m \cdot s^{-2}$. Což je rozdíl pouze o $1,83$ %. Ovšem vinou použítí více naměřených hodnot mi vzrostla chyba měření.

Seznam použité literatury

Studijní materiály na stránkách fyzikálního praktika. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/
Kolektiv: *Matematicko fyzikální tabulky pro střední školy*, SPN Bratislava 2002
Englich, J.: *Úvod do praktické fyziky I*. Matfyzpress Praha 2006.