Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. XVII

Název: Studium otáčení tuhého tělesa

Pracoval: Jiří Vackář stud. skup. 11 dne 5. 5. 2008

Odevzdal dne: 12. 5. 2008

Hodnocení:

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: ..... dne .....

1 Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

2 Teoretická část

2.1 Měření momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů

Těleso visící svisle na závěsu se orientuje do stabilní polohy. Pootočením tělesa podle svislé osy, která v tomto stavu splývá se závěsem, dojde ke zkroucení závěsu. Torzní napětí takto vyvolané v závěsu (drátu válcového průřezu) způsobí harmonické kmitání tělesa podle svislé osy s periodou T danou podle [1] výrazem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{1}$$

kde D je *direkční moment* závěsu, nezávisející na zavěšeném tělese.

Direkční moment můžeme určite ze vzorce 1 pokud změříme dobu kmitu T_T jiného tělesa na tomtéž vlákně, jehož moment setračnosti I_T zjistíme jiným způsobem, například výpočtem. Moment setrvačnosti válce o hmotnosti M a poloměru R je dle [1]

$$I_{valec} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{2}$$

Do rovnice 1 indexované V pro válec dosadíme moment setrvačnosti válce dle vztahu 2, vyjádříme D a po dosazení do obecné rovnice 1 vyjádříme moment setrvačnosti I obecného tělesa vůči zvolené ose kmitajícího na daném závěsu s periodou T

$$I = \frac{T^2}{2T_V^2}MR^2 \tag{3}$$

2.2 Moment setrvačnosti kvádru

Pomocí momentů setrvačnosti homogenního kvádru I_x, I_y, I_z vůči hlavním osám setrvačnosti kolmým na stěny kvádru a procházejícím jeho těžištěm lze podle [1] vypočítat moment setrvačnosti I vůči obecné ose jako

$$I = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_z \tag{4}$$

kde v_x, v_y, v_z jsou složky jednotkového vektoru ve směru zvolené osy vsouřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.

Při volbě označení délek hran kvádru a, b, c rovnoběžně po řadě s osami x, y, z má zadaná osa procházející těžištěm směr rovnoběžný s úhlopříčkou stěny a x b. Složky jednotkového vektoru tedy jsou

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, v_z = 0 \tag{5}$$

2.3 Steinerova věta

Steinerova věta [1] popisuje vztah mezi momentem setrvačnosti I tělesa o hmotnosti m vůči ose procházející jeho těžištěm a momentem setrvačnosti I_d vůči rovnoběžné ose vzdálené o vzdálenost d

$$I_d = I + md^2 \tag{6}$$

Moment setrvačnosti I_d homogenní tyče o hmotnosti m vůči ose procházející jejím koncovým bodem (vzdáleným d od těžiště tyče) změříme, necháme-li tyč kolem této osy kývat jako fyzické kyvadlo. Pro jeho periodu T platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{7}$$

vyjádříme-li I

$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} \tag{8}$$

Moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející jejím středem lze určit z upraveného vztahu 6 a metodou torzních kmitů srovnáním s válcem zadaných rozměrů pomocí vztahu 3. Srovnáním takto nezávislými metodami změřeného momentu setrvačnosti experimentálně potvrdíme Steinerovu větu.

3 Průběh a výsledky měření

3.1 Moment setrvačnosti vzhledem k hlavním osám

Čas T jsem měřil elektronickými stopkami s přesností 0,01 s pro 5 kmitů při počáteční výchylce 70–90 °. Na tělese jsem nakreslil značku a stopky spouštěl a zastavoval při průchodu značky okolo stojanu. Reakční zpoždění by tedy mělo mít stejný vliv na začátek i konec měření s odhadnutou nejistotou do 0,2 s. Standartní odchylka pěti měření je v rozmezí 0,05–0,15 s.

Průměr R jsem změřil jako polovinu průměru válce. Při měření hmotnosti jsem do závitu ve středu válce zašrouboval šroub ze stejného materiálu, který jej právě vyplnil.

$$2R = (107,99 \pm 0,03)\,\mathrm{mm}$$

$$M = (904,0 \pm 0,1)\,\mathrm{mm}$$

Osa jsou označeny x, y, z pořadě sestupně dle délky.

Časy pěti kyvů válce [s]	60,34	60,29	60,5	60,27	60,25

Výsledná perioda kyvu $T_V = (12,07 \pm 0,04)\,\mathrm{s}$

Časy pěti kyvů kvádru dle osy x [s]	31,74	31,76	31,68	31,66	31,74

Výsledná perioda kyvu $T_x = (6,34 \pm 0,04)\,\mathrm{s}$

Časy pěti kyvů kvádru dle osy y [s]	57,65	57,89	57,99	58,00	57,97

Výsledná perioda kyvu $T_y = (11,58 \pm 0,04)\,\mathrm{s}$

Časy pěti kyvů kvádru dle osy z [s]	64,44	64,57	64,52	64,61	64,47

Výsledná perioda kyvu $T_z = (12,90 \pm 0,04)\,\mathrm{s}$

Dle vzorce 3 jsem vypočítal momenty setrvačnosti.

$$I_x = (0,365 \pm 0,007)\,\mathrm{gm}^2$$

$$I_y = (1,22 \pm 0,02)\,\mathrm{gm}^2$$

$$I_z = (1,51 \pm 0,02)\,\mathrm{gm}^2$$

3.2 Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose

Pusuvným měřidlem a mikrometrem jsem změřil rozměry kvádru

$$a = (127,86 \pm 0,03)\,\mathrm{mm}$$

$$b = (64,01 \pm 0,03)\,\mathrm{mm}$$

$$c = (18,98 \pm 0,01)\,\mathrm{mm}$$

Dle vztahu 5 mají složky jednotkového vektoru zadané osy složky

$$v_x = 0,8942, v_y = 0,4477, v_z = 0$$

Podle vzorce 4 je moment setrvačnosti rotace podle zadané osy

$$I_osa = (0,538 \pm 0,01)\,\mathrm{gm}^2$$

Moment setrvačnosti jsem též změřil obdobně jako momenty podle hlavních os

Časy pěti kyvů kvádru dle obecné osy [s]	38,36	38,42	38,51	38,55	38,45

Výsledná perioda kyvu $T_osa = (7,69 \pm 0,04)\,\mathrm{s}$

Moment setrvačnosti

$$I_osa = (0,536 \pm 0,01)\,\mathrm{gm}^2$$

3.3 Steinerova věta

Délku tyče jsem měřil jako vzdálenost od břitu k otvoru sečtenou s polovinou průměru otvoru. Prostřední otvor však nebyl vyvrtán přesně v polovině, protože tyč se po zavěšení neustálila ve vodorovné poloze. Vzhledem k tomuto odhaduji chybu na 2 mm.

$$d = (157 \pm 2)\mathrm{mm}$$

$$m = (281,8 \pm 0,1)\mathrm{g}$$

Časy 25 kyvů tyče podle konce [s]	23,44	23,53	23,49	23,53	23,55

Průměrná perioda kmitu $T = (0,94 \pm 0,02)$ s
Dle vztahu 8 jsem vypočítal moment setrvačnosti tyče podle konce

$$I_0 = (9,6 \pm 0,3)\ \mathrm{gm}^2$$

Dále jsem nechal tyč torzně kmitat podle středu

Časy pěti kyvů tyče podle středu [s]	87,72	87,78	87,81	87,69	87,66

Průměrná perioda kmitu $T = (17,55 \pm 0,01)$ s
Dle vzorců 3 a 6 jsem vypočítal moment setrvačnosti tyče kolem koncového břitu

$$I_{Steiner} = (9,74 \pm 0,08)\ \mathrm{gm}^2$$

4 Diskuse výsledků

Při všech měřeních pravděpodbně dochází k největším chybám v měření času, protože tam hraje důležitou roli reakční doba pzorovatele.

Při měření hmotnosti válce byl do otvoru ve středu, určeného na upevnění závěsu, zašroubován šroub ze stejného materiálu, který otvor přesně vyplnil. Šroub na závěsu je sice o 5 g těžší, avšak mým cílem bylo změřit hmotnost tělesa s rovnoměrným rozložením hmoty, abychom ho mohli považovat za homogenní válec.

Vypočítaný moment setrvačnosti kvádru vůči zadané obecné ose je pravděpodobně zatížen systematickou chybou, neboť počítá s plným kvádrem. Měřené těleso však mělo oříznuté rohy.

Platnost Steinerovy věty nebyla měřením vyvrácena, naměřená a vypočítaná hodnota se shodují v rámci své chyby, ve svých středních hodnotách liší o 1,5 %.

5 Závěr

Momenty setrvačnosti podle hlavních os jsem změřil

$$I_x = 0,365 \pm 0,007)\ \mathrm{gm}^2$$

$$I_y = 1,22 \pm 0,02)\ \mathrm{gm}^2$$

$$I_z = 1,51 \pm 0,02)\ \mathrm{gm}^2$$

Složky jednotkového vektoru ve směru zadané osy mají složky

$$v_x = 0,8942, v_y = 0,4477, v_z = 0$$

Vypočítaný moment setrvačnosti rotace podle zadané osy

$$I_osa = (0,538 \pm 0,01)\ \mathrm{gm}^2$$

Změřený moment setrvačnosti rotace podle zadané osy

$$I_osa = (0,536 \pm 0,01)\ \mathrm{gm}^2$$

Změřený moment setrvačnosti tyče metodou fyzikálního kyvadla

$$I_0 = (9,6 \pm 0,3)\ \mathrm{gm}^2$$

Moment setrvačnosti tyče vypočítaný ze Steinerovy věty

$$I_{Steiner} = (9,74 \pm 0,08)\ \mathrm{gm}^2$$

Reference

[1] Studijní text fyzikálního praktika http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_117.pdf

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980