Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. XVII.

Název: Studium otáčení tuhého tělesa

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. Y – 16 dne 14. dubna 2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:.......................................

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Teoretický úvod

Metoda torzních kmitů

Pro měření momentu setrvačnosti tělesa J vzhledem k ose procházející těžištěm jde použít metoda torzních kmitů. Jedná se o metodu, kdy se na ocelový drát upevní těleso tak, aby drát vedl ve směru osy, kolem které se měří moment setrvačnosti. Konec drátu se pevně upne. Jakmile se těleso vychýlí z rovnovážné polohy, začne být drát torzně namáhán a těleso začne kmitat s periodou T. Doba této periody je podle [1.] dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{1}$$

kde D je tzv. direkční moment vlákna.

Pokud se na drát upevní těleso o známém momentu setrvačnosti J_v a těleso se rozkmitá periodickým pohybem s periodou T_v, je možno určit direkční momoment vlákna ze vztahu

$$D = 4\pi^2\frac{J_v}{T_v} \tag{2}$$

Po dosazení do vztahu (1) je možné určit moment setrvačnosti měřeného tělesa ze vztahu

$$J = \left(\frac{T}{T_v}\right)^2 \cdot J_v \tag{3}$$

Jako referenční těleso se využívá homogenní válec, jehož moment setrvačnosti je možné určit pomocí integrace jako

$$J_v = \frac{1}{2} \cdot m_V \cdot R_V^2 \tag{4}$$

kde m_v je hmotnost válce a R_v je poloměr válce. Dosazením do vztahu (3) jě možné získat výraz pro urční momentu setrvačnosti měřeného tělesa

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_v}\right)^2 \cdot m_v \cdot R_v^2 \tag{5}$$

kde T_V je naměřená perioda kmitů válce na ocelovém drátu. Pokud se při měření nepřekročí mez úměrnosti torzního vlákna, nezávisí prakticky doba kmitů na počáteční výchylce.

Momenty setrvačnosti vzhledem k různým osám procházejícím tělesem

Na moment setrvačnosti je možné se dívat jako na tenzor 2. řádu. Jeho složky je jdou rozložit do jednotlivých os, které tvoří ortonormální bázi. Moment setrvačnosti je pak lze složit z dílčích momentů setrvačnosti J_x, J_y, J_z kolem jednotlivých os

$$J = v_x^2 \cdot I_x + v_y^2 \cdot I_y + v_z^2 \cdot I_z \tag{6}$$

kde v_x, v_y, v_z jsou složky jednotkového vektoru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.

V úloze se měří homogenní kvádr. Zjišťuje se moment setrvačnosti vzhledem k tělesové úlopříčce. Ten jde zjistit jednak přímým měřenín, nebo z dílčích momentů setrvačnosti. Jednotkový vektor je dán složkami

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, v_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{7}$$

kde a, b a c jsou velikosti hran kvádru ve směru x, y a z.

Steinerova věta

Steinerova věta popisuje, jak se mění mement setrvačnosti tělesa, pokud změníme osu, kolem které se těleso otáčí. K ověření této věty se používá tyč, která má ve středu vyřezán závit sloužící k upnutí vlákna pro určení momentu setrvačnosti tozními kmity. Na konci má připevněn břit, který umožňuje kývat s tyčí. Jedná se pak o model fyzického kyvadla, které kmitá s periodou T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\cdot g\cdot d}}, J = \frac{m\cdot g\cdot d\cdot T^2}{4\pi^2} \tag{8}$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla, m je hmotnost kyvadla a d je vzdálenost osy otáčení od těžiště kyvadla.

Pomocí Steinerovy věty pak můžeme určit vztah mezi momentem setrvačnosti kyvadla kolem osy procházející těžištěm J_0, který se dá zjistit metodou torzních kmitů, a momentem setrvačnosti J kolem osy ve vzdálenosti d určené podle vztahu (8)

$$J_0 = J - m\cdot d^2 \tag{9}$$

Výsledky měření

Měření referenčního válce

Průměr válce $D_v = (108,04\pm 0,01)mm$, odtud jsem určil poloměr válce $R_v = (54,02\pm 0,01)mm$

Hmotnost válce $m_v = (903,7\pm 0,1)g$

Dosazením do vztahu (4) jsem určil moment setrvačnosti homogenního válce $J_v = (1,318\pm 0,001)g\cdot m^2$

Pro určení direkčního momentu vlákna jsem provedl 5 měření, během kterých jsem měřil 10 period kmitavého pohybu válce připevněného k ocelovému drátu. Časy jsem měřil s přesností $\pm 0,2s$.

Měření	$T_{10v}[s]$	$T_v[s]$
1	$121,82\pm 0,20$	$12,18\pm 0,02$
2	$121,74\pm 0,20$	$12,17\pm 0,02$
3	$122,00\pm 0,20$	$12,20\pm 0,02$
4	$121,84\pm 0,20$	$12,18\pm 0,02$
5	$121,75\pm 0,20$	$12,18\pm 0,02$
$\tilde{T}$	$121,83$	$12,18$
σ_T	$0,10$	$0,01$

Tabulka 1.: Perioda kmitů referenčního válce

V tabulce 1. je $\tilde{T}$ označena střední hodnota a σ_T je statistická chyba. Periodu T_v jsem určil $T_v = (12,18 \pm 0,02)s$.

Měření homogenního tělesa

K měření jsem použil těleso tvaru kvádru, které mělo seříznuty rohy. Rozměry tohoto tělesa byly:

$$a = (127,79 \pm 0,01)mm, b = (63,98 \pm 0,01)mm, a = (19,21 \pm 0,01)mm$$

měření jsme pro jednotlivé rozměry prováděl na více místech, ale vyšly i vždy stejné hodnoty.

Hmotnost tělesa $m_t = (1068,2 \pm 0,1)g$

Obecná osa o, pro kterou bylo zadánáno proměření momentu setrvačnosti, ležela v rovině dané osami x a y. Osa tvořila úlopříčku pomyslného obdélníku a ležela uprostřed tělesa. Jednotkový vektor ve směru osy z je tak nulový. Dosazením do vztahu (7) jsem získal jednotkový vektor

$$v_x = (0,886 \pm 0,001), v_y = (0,444 \pm 0,001), v_z = 0$$

Pro osy x, y, z a o jsem provedl měření periody. Měřil jsem vždy 10 period s přesností $\pm 0,2s$.

Měření	$T_{10x}[s]$	$T_x[s]$	$T_{10y}[s]$	$T_y[s]$	$T_{10z}[s]$	$T_z[s]$	$T_{10o}[s]$	$T_o[s]$
	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$
1	64,21	6,42	116,60	11,66	130,36	13,04	77,90	7,79
2	63,93	6,39	116,82	11,68	130,30	13,03	77,47	7,75
3	63,91	6,39	116,75	11,68	130,37	13,04	77,61	7,76
4	64,02	6,40	115,98	11,60	130,28	13,03	77,52	7,75
5	64,00	6,40	116,82	11,68	130,21	13,02	77,95	7,80
$\tilde{T}$	64,01	6,40	116,59	11,66	130,30	13,03	77,69	7,77
σ	0,12	0,02	0,35	0,04	0,07	0,01	0,22	0,02

Tabulka 2.: Perioda kmitů homogenního tělesa kolem různých os

Hodnota σ uvedená v tabulce 2. znamená pouze statistickou chybu.

Pomocí metody torzních kmitů (konkrétně vzrahu (5)) určil moment setrvačnosti vzhledem k jednotlivým osám.

$$J_x = (0,364 \pm 0,004)g \cdot m^2, J_y = (1,208 \pm 0,009)g \cdot m^2, J_z = (1,509 \pm 0,007)g \cdot m^2$$

Pro zadanou osu mi vyšel výsledek $\underline{J_o = (0,537 \pm 0,005)g \cdot m^2}$.

Užitím vzorce (6) jsem určil moment setrvačnosti vzhledem k zadané ose podle měření momentu setrvačnosti k dílčím osám $\underline{J_o = (0,52 \pm 0,01)g \cdot m^2}$.

Ověření Steinerovy věty

Hmotnost použitého kyvadla $m_k = (281,7 \pm 0,1)g$

Vzdálenost břitu a od osy otášení $d_a = (156 \pm 1)mm$

Vzdálenost břitu b od osy otášení $d_b = (157 \pm 1)mm$

Z tabulek [2.] jsem určil místní gravitační zrychlení $g = 9,809980 \pm 0,000012)kg \cdot m^2$

Pro zjištění momenty setrvačnosti jsem použil metodu trzních kmitů. Měřil jsem opět 5 měření o 10 kmitech. Pro zjištění momentu setrvačnosti kolem koncových os jsem použil model fyzického kyvadla. Měření jsem prováděl pro oba krajní břity.

Měření	$T_{10t}[s]$	$T_t[s]$	$T_{10a}[s]$	$T_a[s]$	$T_{10b}[s]$	$T_b[s]$
	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$	$\pm 0,20s$	$\pm 0,02s$
1	$177,20$	$17,72$	$9,37$	$0,94$	$9,35$	$0,94$
2	$177,35$	$17,74$	$9,44$	$0,94$	$9,28$	$0,93$
3	$177,42$	$17,74$	$9,35$	$0,94$	$9,41$	$0,94$
4	$177,17$	$17,72$	$9,12$	$0,91$	$9,40$	$0,94$
5	$177,25$	$17,73$	$9,27$	$0,93$	$9,26$	$0,93$
$\tilde{T}$	$177,28$	$17,73$	$9,31$	$0,93$	$9,34$	$0,93$
σ	$0,10$	$0,01$	$0,12$	$0,01$	$0,07$	$0,01$

Tabulka 3.: Ověření platnosti Steinerovy věty

Pro osy procházející středem jsem zjistil moment setrvačnosti $\underline{J_o = (2,793 \pm 0,015) g \cdot m^2}$

Z tabulky 2. jde vidět, že pro obě osy vyšly časy stejné. Nadále proto budu provádět výpočty pouze jednou. Vyšel mi moment setrvačnosti $\underline{J_{ab} = (9,46 \pm 1,50) g \cdot m^2}$. Z této hodnoty jsem podle vztahu (9) určil moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm $\underline{J'_o = (2,61 \pm 3,02) g \cdot m^2}$.

Diskuse výsledků

Při měření referenčního válce jsem se dopouštěl největší chyby při měření hmotnosti válce. Při měření průměru uvádím chybu $\pm 0,01mm$, tuto chybu jsem zjistil z referenční příručky pro použitou elektronickou šupleru. Vzorek jsem proměřoval na více částech, ale vždy mi vyšla tato hodnota. Přesto předpokládám, že by tato chyba měla být větší.

Při měření jsem také zanedbával vliv uchycení. Největší vliv měl šroub, jehož parametry jsem odměřil $d = (15,97 \pm 0,01)mm$ (jedná se o nejširší průměr), $m = (8,9922 \pm 0,0001)g$. Při výpočtu jsem dostal hodnotu $J = 0,00029 g \cdot m^2$, což je asi 0,022 % vypočítané hodnoty referenčního válce. Výsledná hodnota ukazuje, že jsem to mohl zanedbat.

Při měření časů by bylo lepší provést více měření, ale vzhledem k časové náročnosti, jsem raději volil méně měření, ovšem s více periodama, což mělo za následek zmenšení vlivu mé reakční doby při ovládání stopek. Svou reakční chybu jsem odhadl na $\pm 0,2s$.

U měření homogenního kvádru jsem určil hodnotu momentu setrvačnosti dvěmi způsoby. Určené hodnoty se po zaokrouhlení na stejný počet platných míst liší o 3,7 %. Což je o něco málo více, než mi připouští chyba měření. Může to být způsobeno špatným odhedem systematické chyby, nebo chybami vzniklými při zaokrouhlování, neboť při zaokrouhlení na setiny, je již výsledek správný.

Ověření Steinerovy věty jsem prováděl pomocí torzních kmitů a pomocí metody fyzického kyvadla. Ukázalo se, že metoda fyzického kyvadla vnáší do výsledku větší chybu, neboť se zde výrazněji projeví chyby měření vzdálenosti břitů od těžiště. Výsledné hodnoty se liší asi o 6,6 %, což ovšem odpovídá vypočítané chybě.

Při výpočtu chyb jsem používal kvadratický zákon přenosu chyb a chyby statistické.

Závěr

Metodou torzních kmitů jsem určil moment setrvačnosti předloženého tělesa pro jeho jednotlivé tři osy.

$$J_x = (0,364 \pm 0,004)g \cdot m^2, J_y = (1,208 \pm 0,009)g \cdot m^2, J_z = (1,509 \pm 0,007)g \cdot m^2$$

Výpočtem jsem určil moment setrvačnost vzhledem k zadané ose $J_o = (0,52 \pm 0,01)g \cdot m^2$.

Tento výsledek jsem ověřil měřením momentu setrvačnosti opět metodou torzních kmitů $J_o = (0,537 \pm 0,005)g \cdot m^2$.

V tomto měření jsem dosáhl shody, neboť se hodnoty lišily pouze o 3,2 %. Což neodpovídá chybě měření. Tento fakt může být dán špatným odhadnutím chyb měření nebo vinou zaokrouhlovacích chyb.

Dále jsem ověřil platnost Steinerovy věty. Pomocí torzních kmitů jsem určil moment setrvačnosti vzhledek s ose procházející těžištěm $J_o = (2,793 \pm 0,015)g \cdot m^2$.

Pro osu vzdálenou o $d = (156 \pm 1)mm$ jsem určil metodou fyzického kyvadla moment setrvačnosti $J_{ab} = (9,46 \pm 1,50)g \cdot m^2$.

Užitím Steinerovy věty jsem vypočetl hodnotu momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm $J'_o = (2,61 \pm 3,02)g \cdot m^2$.

Což je shoda výsledků, lišící se pouze o 6,6 %. Tento rozdíl odpovídá vypočítané chybě měření.

Seznam použité literatury

[1.] *Studijní materiály na stránkách fyzikálního praktika* pro úlohu 17.
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/117.html

[2.] MIKULČÁK Jiří, KLIMEŠ Bohdan, ŠŮLA Václav. *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Prometheus 1988. ISBN 80–85849–84–4