Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. XIII.

Název: Měření momentu setrvačnosti kola

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. Y – 16 dne 17. března 2008

Odevzdal dne: .....

Hodnocení:.....

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Teoretický úvod

Metoda kyvů

Při určení momentu setrvačnosti tělesa se využívá model matematického kyvadla. Ke kolu se připevní kulové závaží o hmotnosti m_z tak, aby jeho střed byl ve vzdálenosti l_z od osy otáčení. Kolo je připevněno tak aby se mohlo otáčet kolem osy o, která prochází jeho středem. Soustava kola a závaží se nachází v rovnovážné poloze a při vychýlení o úhel menší než 5° začne soustava kmitat s periodou T_k. Moment setrvačnosti je dán vztahem

$$J = m_z l_z \left(\frac{g T_k^2}{4\pi^2} - l_z \right) \tag{1}$$

kde g je místní zrychlení. Z konstrukčních důvodů kola je vhodnější změřit vzdálenost ráfku kola od osy otáčení l_r a průměr závaží d_z. Z těchto hodnot získám vzdálenost těžiště závaží od osy otáčení vztahem

$$l_z = l_r - \frac{d_z}{2} \tag{2}$$

Metoda otáčení

U této metody se využívá souosých válců, které jsou přidělány ke kolu . Na tyto válce o poloměru r je možno přidělat niť se závažím o hmotnosti m. Po uvolnění závaží se začne kolo roztáčet s úhlovým zrychlením ε. Při zanedbání tření získám tzv. nekorigovaný moment setrvačnosti J^* daný vztahem

$$J^* = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) \tag{3}$$

Působení sil se dá charakterizovat jejich momentem M_T. Předpokládá se, že velikost tření významně nezávisí na úhlové rychlosti otáčení kola. Moment setrvačnosti kola se zohledněným třením označím J_K

$$J_K = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_T \tag{4}$$

dosazením vztahu (3) a zavedením parametru α jako převrácenou hodnotu úhlového zrychlení ε upravím vzorec (4)

$$J_K = J^* - \alpha M_T \tag{5}$$

K měření úhlové rychlosti se používá počítač. Pohyb považujeme za rovnoměrně zrychlený daný vztahem

$$\omega = \varepsilon \cdot t \tag{6}$$

Pomocí lineární regrese je tak možné získat úhlové zrychlení ε jako směrnici regresní přímky.

Výsledky měření

Metoda kyvů

Hmotnost závaží: $m_z = (148,5294 \pm 0,0002)g$
Vzdálenost ráfku kola od osy otáčení: $l_r = (243 \pm 1)mm$
Průměr závaží $d_z = (24,0 \pm 0,1)mm$
Při měření periody kmytu jsem měřil dobu 10 period. Chybu měření vzhledem k reakční době pozorovatele jsem odhadl $\pm 0,3s$.

$t_{10}[s]$	$T[s]$
23,98	2,398
24,64	2,464
24,37	2,437
24,51	2,451
24,02	2,402
24,13	2,413
24,04	2,404
24,25	2,425
24,25	2,425
24,03	2,403

Tabulka 1: Doba jedné periody při měření metodou kyvů

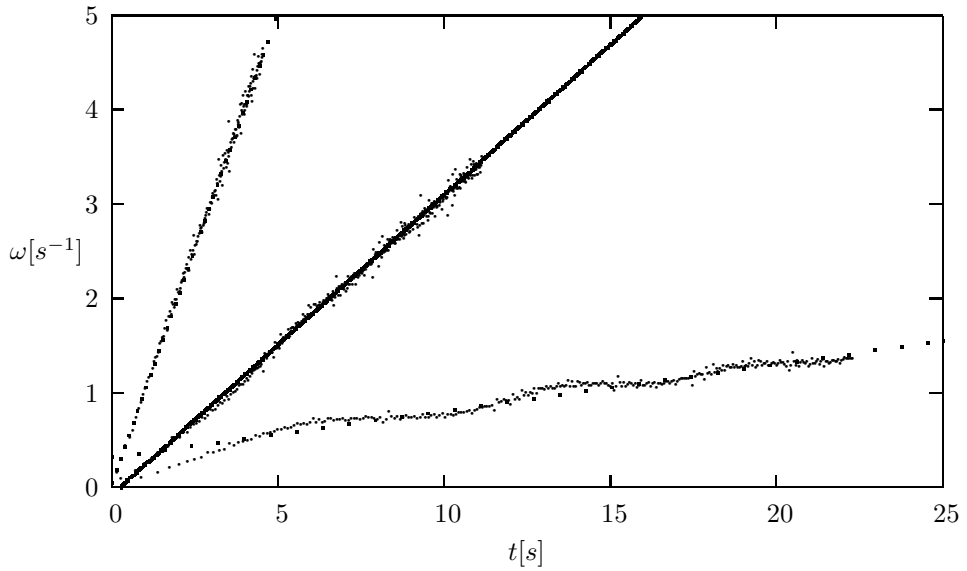
Určil jsem průměrnou hodnotu dobu periody $\tilde{T} = 2,422s$ a odhad statistické chyby $\tilde{\sigma_T^2} = 0,002s^2$. Perioda jednoho kmitu $T = (2,42 \pm 0,05)s$
Ze vztahu (2) jsem určil vzdálenost těžiště tělesa od osy otáčení jako $l_z = (219 \pm 1)mm$.
Místní gravitační zrychlení jsem našel v tabulkách [2.]$g = (9,809980 \pm 0,000012)m \cdot s^{-2}$
Dosazením do vztahu (1) jsem určil moment setrvačnosti kola $J = (0,040 \pm 0,004)kg \cdot m^2$

Metoda otáčení

K měření jsem používal 5 závaží s hmotnostmi
$m_1 = (9,9714 \pm 0,0002)g$
$m_2 = (14,9480 \pm 0,0002)g$
$m_3 = (19,8977 \pm 0,0002)g$
$m_4 = (29,9133 \pm 0,0002)g$
$m_5 = (49,7958 \pm 0,0002)g$
Při měření poloměrů souosých válců jsem musel u větších průměrů změřit vnější válec a odečíst rozdíl poloměrů, to způsobilo větší chybu měření.
$r_1 = (29,90 \pm 0,05)mm$
$r_2 = (49,77 \pm 0,05)mm$
$r_3 = (69,40 \pm 0,1)mm$
$r_4 = (89,85 \pm 0,1)mm$
Po té jsem prováděl měření rychlosti otáčení pomocí počítače. Z těchto hodnot jsem určil hodnotu lineární regrese ε.

$\varepsilon[s^{-2}]$	r_1	r_2	r_3	r_4
m_1	$0,0493 \pm 0,0006$	$0,0906 \pm 0,0007$	$0,1281 \pm 0,0011$	$0,1821 \pm 0,0013$
m_2	$0,0833 \pm 0,0008$	$0,1454 \pm 0,0008$	$0,2142 \pm 0,0014$	$0,2874 \pm 0,0018$
m_3	$0,1135 \pm 0,0007$	$0,2023 \pm 0,0010$	$0,3052 \pm 0,0018$	$0,3830 \pm 0,0023$
m_4	$0,1742 \pm 0,0009$	$0,3180 \pm 0,0013$	$0,4624 \pm 0,0025$	$0,5871 \pm 0,0032$
m_5	$0,3107 \pm 0,0014$	$0,5434 \pm 0,0021$	$0,7754 \pm 0,0041$	$0,9988 \pm 0,0051$

Tabulka 2: Závislost úhlového zrychlení na poloměru hřídele a hmotnosti závaží se statistickými chybami



Graf 1: Závislost úhlového zrychlení na čase

V grafu 1 jsou znázorněny naměřená data a regresní přímka, kterou jsem tyto data proložil. Data s největším zrychlením jsou voleny pro m_5 a r_4. Prostřední data ukazují data při m_4 a r_2. Data s nejmeším ε jsou pro zvolené m_1 a r_1.

Po dosazení do vzorce (3) získávám hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti kola

$J^*[kg \cdot m^2]$	r_1	r_2	r_3	r_4
m_1	$0,0593 \pm 0,0424$ %	$0,0537 \pm 0,0234$ %	$0,0529 \pm 0,0178$ %	$0,0482 \pm 0,0131$ %
m_2	$0,0526 \pm 0,0259$ %	$0,0502 \pm 0,0148$ %	$0,0474 \pm 0,0114$ %	$0,0457 \pm 0,0094$ %
m_3	$0,0514 \pm 0,0187$ %	$0,0480 \pm 0,0111$ %	$0,0443 \pm 0,0088$ %	$0,0456 \pm 0,0080$ %
m_4	$0,0503 \pm 0,0126$ %	$0,0459 \pm 0,0075$ %	$0,0439 \pm 0,0069$ %	$0,0447 \pm 0,0064$ %
m_5	$0,0470 \pm 0,0079$ %	$0,0446 \pm 0,0053$ %	$0,0435 \pm 0,0059$ %	$0,0435 \pm 0,0055$ %

Tabulka 3: Závislost nekorigovaného momentu setrvačnosti na m a r s odhadem relativní chyby

Tyto hodnoty jsem použil ve vztahu (5) a pomocí lineární regrese jsem určil hodnotu momentu setrvačnosti kola $\underline{J_K = (0,0433 \pm 0,0010) Kg \cdot m^2}$ a momentu třecích sil $\underline{M_K = (0,0009 \pm 0,0001) N \cdot m}$.

Diskuse výsledků

Při určování momentu setrvačnosti metodou kyvů jsem se dopouštěl největší systematické chyby idealizováním oscilátoru a zanedbáním tlumení oscilátoru. Předpokládal jsem, že za 10 kmitů by nemělo dojít k výraznému projevu této chyby.

Měření bylo teké zatíženo chybou způsobenou reakcí pozorovatele při měření periody 10 kmitů, kterou jsem odhadl na $\pm 0,3s$. Měření periody vycházelo se standartní odchylkou $\sigma = 0,007$ s. Také bylo složitější měřit vzdálenost těžiště závaží od osy otáčení. Neboť jsem musel nejdříve změřit vzdálenost ráfku od osy otáčení. Po té jsem musel změřit průměr závaží. U závaží jsem předpokládal, že je osově souměrné.

Při měření metodou otáčení se ukázalo, že největší chyby vznikali při závažích s malými hmotnostmi, které také měly malé průměry. Relativní chyby určení redukovaného mementu setrvačnosti jsou k nalezení v tabulce 3. Problém byl také s nepřesnotsí geometrie kola, která způsobovala oscilaci ráfku. Další nepřesností bylo zanedbávání nitě. Neboť při rozmotávání nitě se mění i hmotnost závaží.

Bylo by možné vždy změřit délku odmotané nitě a určit její hmotnot a její polovinu připočítat k hmotnosti závaží. Ovšem tuto změnu hmotnosti jsem nakonec zanedbal, neboť niť se napínala a při měření pomocí počítače vždy chvíli trvalo než závaží zastavilo, což znemožňovalo určit hmotnost nitě dostatečně přesně aby to mělo význam uvažovat.

Závěr

Proměřil jsem moment setrvačnosti předloženého kola dvěmi rozdílnými metodami. Pomocí metody kmitů jsem určil moment setrvačnosti $J = (0,040 \pm 0,004) Kg \cdot m^2$. Při metodě otáčení mi vyšel moment setrvačnosti $J_K = (0,0433 \pm 0,0010) Kg \cdot m^2$. U této metody jsem také určil moment třecích sil $M_T = (0,0009 \pm 0,0001) N \cdot m$.

Jako přesnější metoda se ukázala metoda otáčení. Je to dáno přesnějším fyzikálním modelem a lepším vybavením pro měření. To umožnilo získat větší množství dat pro statistické zpracování.

Seznam použité literatury

[1.] *Studijní materiály na stránkách fyzikálního praktika*. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/
[2.] Kolektiv: *Matematicko fyzikální tabulky pro střední školy*, SPN Bratislava 2002