Úloha 9: Modul pružnosti v tahu

Josef Melcr

13. dubna 2009

Úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

Teorie

Působíme-li na drát délky l o průměru d silou F ve směru délky, dosáhneme prodloužení drátu. Závislost prodloužení na působící síle vyjadřuje vztah:

$$\Delta l = \frac{4lF}{E\pi d^2} \tag{1}$$

kde Δl značí prodloužení drátu a E modul pružnosti v tahu pro daný materiál.

Prodloužení drátu budeme měřit zrcátkovou metodou, pro kterou s přiblížením platí:

$$\Delta l = \frac{d_k \Delta\alpha}{2} = d_k \frac{n - n_0}{4L} \tag{2}$$

kde d_k označuje průměr kolečka u aparatury, $\Delta\alpha$ značí pootočení zrcátka, n_0 a n počáteční a naměřená hodnota na měřící stupnici a L vzdálenost osy otáčení zrcátka od stupnice.

Za použití předchozích vztahů docházíme ke vzorci, který použijeme pro výpočty:

$$E = \frac{m}{\Delta n} \cdot \frac{16Llg}{\pi d_k d^2} \tag{3}$$

kde m je hmotnost zavěšovaného závaží, Δn označuje rozdíl $n - n_0$, g gravitační zrychlení.

Položíme-li trámek obdélníkového průřezu na dva břity ve vzdálenosti l a pověsíme-li na prostředek závaží hmostnosti m, trámek se začne prohýbat podle rovnosti:

$$E = \frac{mgl^3}{4yab^3} \tag{4}$$

kde E je modul pružnosti v tahu daného materiálu, m hmotnost závaží pověšeného uprostřed trámku, l vzdálenost břitů, y výchylka po zavěšení, a šířka trámku, b výška trámku.

Pomůcky

Posuvné měřidlo (mm), pásové meřidlo (mm), mikrometr ($10\mu m$), drát z oceli, trámky z mosazi a oceli, aparatura pro měření prodloužení drátu, aparatura pro měření průhybu trámku, zrcátko, polohovací stolek, stupnice s dalekohledem, závaží, sklíčko se stupnicí ($100\mu m$), zavěšovací miska na závaží, objektiv.

Měření

Nejdříve jsme změřili E z protažení drátu. Změřili jsme pásovým měřidlem délku drátu a vzdálenost osy otáčení zrcátka od stupnice; mikrometrem průměr drátu na více místech; posuvným měřidlem průměr kolečka ve více místech. Pro průměr drátu d jsme naměřili osmkrát hodnotu $0,51mm$. U délky drátu l jsme třikrát opakovaně došli k hodnotě $114,5cm$. Vzdálenost osy otáčení zrcátka od stupnice byla $L = (96,8 \pm 0,1)cm$, průměr kolečka $d_k = (39,0 \pm 0,5)mm$. Souhrnně:

$$\begin{aligned} d &= (0,51 \pm 0,005)mm \\ l &= (114,5 \pm 0,05)cm \\ L &= (96,8 \pm 0,1)cm \\ d_k &= (39,0 \pm 0,5)mm \end{aligned}$$

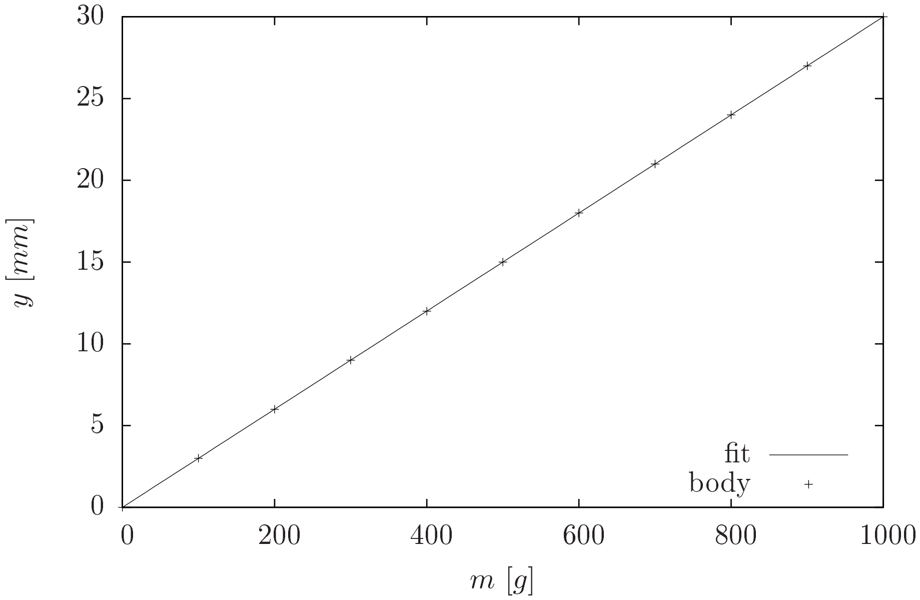
Před měřením jsme drát vypjali závažím o hmotnosti 1kg a nastavili otočení zrcátka. Postupně jsme přidávali závaží a sledovali protažení drátu dalekohledem u stupnice. Po té, co jsme došli k zatížení 2kg, závaží jsme odebírali. Naměřené hodnoty se při přidávání resp. odebírání nelišily, viz tabulka 1.

Tabulka 1: naměřené hodnoty protažení drátu

$m\,[kg]$	$\Delta n\,[cm]$	
	přidáváno	odebíráno
1,0		0,0
1,1		0,3
1,2		0,6
1,3	0,9	0,9
1,4	1,2	1,2
1,5	1,5	1,5
1,6	1,8	1,8
1,7	2,1	2,1
1,8	2,4	2,4
1,9	2,7	2,7
2,0	3,0	3,0

pozn: první tři hodnoty u přidávání závaží jsme vynechali, protože jsme nechtěně pohnuli se zrcátkem.

Obrázek 1: závislost výchylky u stupnice na hmotnosti pověšeného závaží u drátu z oceli



Došli jsme k výsledku:

$$E = (182 \pm 3) GPa$$

Před měřením průhybu trámků jsme zjistili rozměry zkoumaných trámků a a b mikrometrem měřením na různých místech a vzdálenost břitů l pásovým měřidlem.

mosaz	ocel
$a = (11,870 \pm 0,005)\, mm$	$a = (11,9 \pm 0,2)\, mm$
$b = (1,990 \pm 0,005)\, mm$	$b = (2,97 \pm 0,01)\, mm$

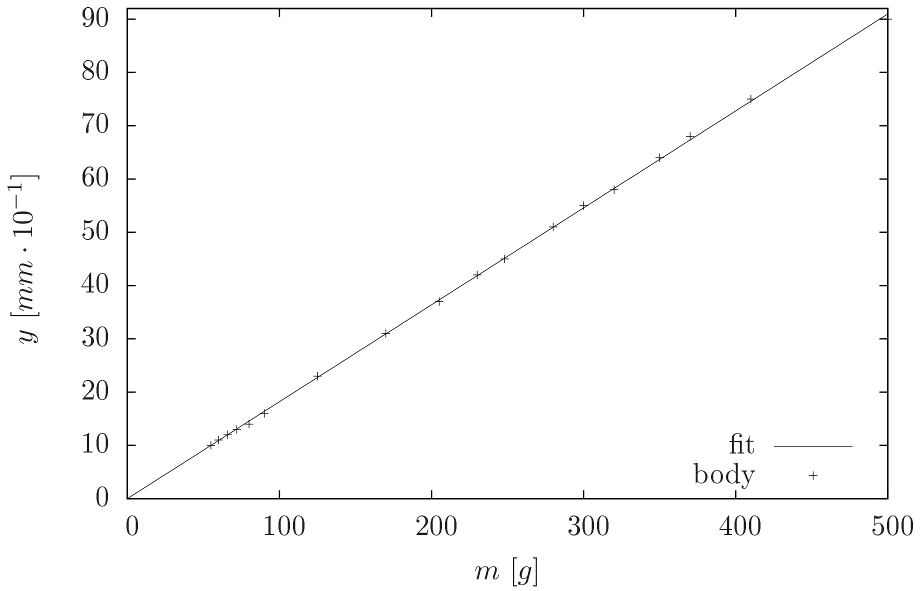
$$l = (41,2 \pm 0,1) cm$$

Výsledky ukazují, že trámek z mosazi měl pravidelnější tvar. Nastavili jsme aparaturu a začali jsme přidávat závaží. Naměřené hodnoty jsou zaznamenány v tabulce 2.

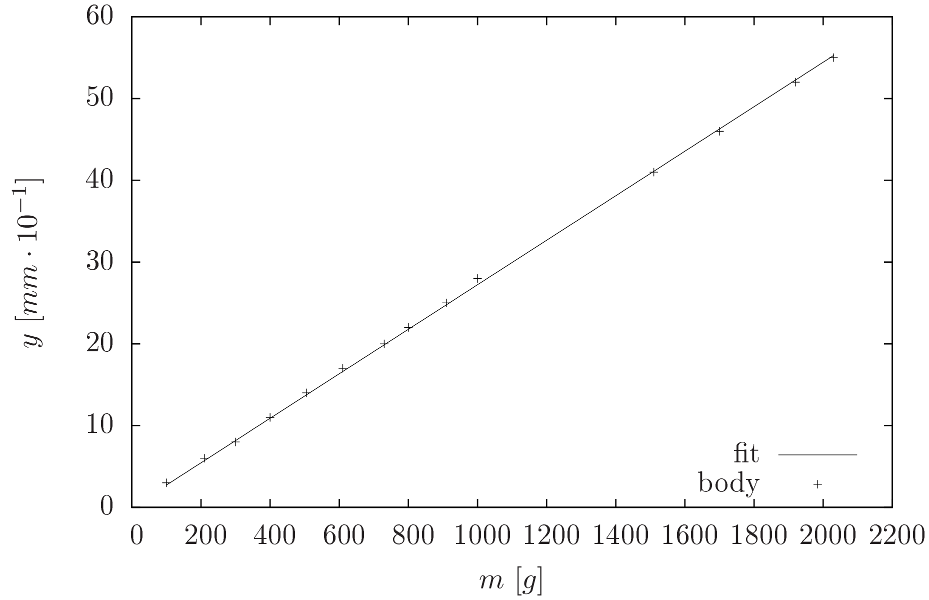
Tabulka 2: naměřené hodnoty průhybů trámků

mosaz		ocel	
$y\,[\mu m]\cdot 10^2$	$m\,[g]$	$y\,[\mu m]\cdot 10^2$	$m\,[g]$
10	55	3	100
11	60	6	210
12	66	8	300
13	72	11	400
14	80	14	505
16	90	17	610
23	125	20	730
31	170	22	800
37	205	25	910
42	230	28	1000
45	248	41	1510
51	280	46	1700
55	300	52	1920
58	320	55	2030
64	350		
68	370		
75	410		
90	500		

Obrázek 2: závislost výchylky na hmotnosti pověšeného závaží u trámku z mosazi



Obrázek 3: závislost výchylky na hmotnosti pověšeného závaží u trámku z oceli



Došli jsme k výsledkům:

$$E_{ocel} = (200 \pm 20) GPa$$
$$E_{mosaz} = (101 \pm 5) GPa$$

Tabelované hodnoty z [3]:

$$E_{ocel} \doteq 200 GPa$$
$$E_{mosaz} \doteq 100 GPa$$
$$g = 9,81 ms^{-1}$$

Diskuse

Při srovnání naměřených hodnot s hodnotami z MFChT [3] dojdeme k závěru, že se experiment s trámky povedl, naměřené hodnoty se s tabelovanými shodují. Z experimentu s drátem zjišťujeme, že materiál, ze kterého byl drát vyroben nejspíš není čistá ocel. Naměřená hodnota je nižší než tabelovaná.

Neopatrnou manipulací jsme u experimentu s drátem při přidávání závaží nechtěně hnuli se zrcátkem. Proto jsme museli vynechat první tři naměřené hodnoty.

Zejména při měření s trámkem z oceli se projevovaly nepřesnosti opracování trámku. Výchylka při nižším zatížení „přeskakovala" nejspíše vlivem zakřivení. Museli jsme dát pozor, jak je trámek prohnutý.

U trámku z mosazi jsme vyřadili 2 hodnoty pro $y = 1$ a $19\,\mu m \cdot 10^2$, protože se výrazně vychylovaly. Myslíme si, že byly způsobeny jevem z předchozího odstavce.

U měření s trámkem jsme také zanedbávali počáteční prohnutí, které bylo způsobeno měřícím sklíčkem a miskou na závaží. Předpokládáme však (a výsledky tak i ukazují), že tento jev neměl na měření vliv.

Grafy jsme vytvořili pomocí programu Gnuplot4.2, ve kterém jsme i provedli fitování lineární funkcí procházející počátkem. V grafech neuvádíme interval nejistoty, protože by znázornění znepřehlednil.

Závěr

Změřili jsme modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu:

$$E = (182 \pm 3) \cdot 10^9 Pa$$

Změřili jsme modul pružnosti v tahu E oceli a mosazi z průhybů trámků:

$$E_{ocel} = (200 \pm 20) \cdot 10^9 Pa$$

$$E_{mosaz} = (101 \pm 5) \cdot 10^9 Pa$$

Literatura

[1] Studijní text k úloze 9.

[2] Jiří Englich: Úvod do praktické fyziky I, matfyzpress, Praha 2006

[3] Kolektiv autorů: Matematické, fyzikální a chemické tabulky, SPN, 1970