Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. IX.

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. Y – 16 dne 31. března 2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:..

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Teoretický úvod

Měření modulu E z protažení drátu

Pokud působíme na materiál silou, dochází k jeho deformaci. Pro malý tah lze použít elementární Hookeův zákon pro tah, který popisuje poměr mezi napětím σ, které působí na materiál, a relativním prodloužení materiálu ε. Dostaneme výslednou veličinu, která se nazývá modul pružnosti v tahu E. Napětí σ, které působí na meteriál je dáno vztahem

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{1}$$

kde F je síla působící na materiál a S je jeho průřez. Relativní prodloužení (deformace) ε udává poměr

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{2}$$

kde Δl je změna délky materiálu a l_0 je výchozí dálka materiálu.

Z výše uvedených vztahů tak plyne

$$E = \frac{l_0 \cdot F}{\Delta l \cdot S} \tag{3}$$

K měření modulu pružnosti v tahu lze použít drát o průměru d. Na konec drátu je umístěna mistička na kterou se postupně přidává závaží a tak se zvyšuje síla působící na drát, která je dána vztahem $F = g \cdot m$, kde m je hmotnost závaží na mističce. Měřením změny délky drátu je možno určit hledaný modul pružnosti v tahu pomocí vztahu (3). Průřez drátu je dán vztahem

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \tag{4}$$

K měření změny délky drátu se používá tzv. zrcátková metoda. U této metody je drát zakončen kladkou o průměru D na jejiž osu je připojeno zrcátko. Protažení drátu způsobí pootočení zrcátka. Ve vzdálenosti L od zrcátka je umístěna rovnoměrně osvětlená stupnice, kterou je možné sledovat pomocí dalekohledu přes zrcátko. Změnu délky drátu je možno určit vztahem

$$\Delta l = \frac{D}{2} \Delta\alpha \tag{5}$$

kde $\Delta\alpha$ je úhel o který se otočilo zrcátko, pro malé úhly lze příjmout přibližný vztah $\Delta\alpha = \frac{n-n_0}{2L}$, kde n_0 je počáteční hodnota na sledované stupnici. n je aktuální hodnota na stupnici. Modul pružnosti metodou protažení drátu tak můžeme určit vztahem

$$E = \frac{16 g \cdot m \cdot l_0 \cdot L}{\pi d^2 \cdot D \left(n - n_0\right)} \tag{6}$$

Měření modulu E z průhybu trámku

Jedná se o nepřímou metodu měření modulu pružnosti v tahu. Na trámek obdélníkového průřezu výšky b a šířky a, který je podepřen na břitech vzdálených l, se postupně zavěšují závaží o hmotnosti m. Tyto závaží působí silou, která vyvolá průhyb trámku Δy, z něhož lze určit modul pružnosti v tahu vztahem

$$E = \frac{g \cdot m \cdot l^3}{4\Delta y \cdot a \cdot b^3} \tag{7}$$

Průhyb trámku y se měří pomocí objektivového mikrometru. Hodnotu průhybu lze zjistit podobně jako u změny délky drátu v metodě protažení drátu. Průhyb $\Delta y = y - y_0$ kde y_0 je průhyb v nulové poloze, což je případ, kdy je na trámek zavěšena prázdná miska.

Výsledky měření

Měření probíhala při teplotě $T = (22,5 \pm 0,1)°C$

Měření modulu E z protažení drátu

Naměřené parametry měřící soustavy:
Délka drátu $l_0 = (1142 \pm 2)mm$
Průměr drátu $d = (0,52 \pm 0,01)mm$
Průměr kladky $D = (38,55 \pm 0,05)mm$
Vzdálenost zrcátka od stupnice $L = (941 \pm 1)mm$
Z [2.] jsem určil místní gravitační zrychlení $g = 9,810769 m \cdot s^{-2}$

Měření jsem pro jednotlivé hmotnosti prováděl dvakrát. Jednou při postupném přidávání závaží a podruhé při odebírání závaží. Dílky na stupnici jsem odečítal s přesností $\pm 1mm$. Hmotnost závaží je zatížena relativní chybou ± 1 %. Počáteční zatížení bylo dáno závažím $m_0 = (1 \pm 0,01)Kg$ a hmotností misky při hodnotě na stupnici $n_0 = (222 \pm 1)mm$. V tabulce dále udávám pouze hmotnost přidaných závaží.

Nejdříve jsem proměřil závislost při postupném přidávání závaží.

m $[Kg]$	n $[mm]$	$\|n - n_0\|$ $[mm]$	m $[Kg]$	n $[mm]$	$\|n - n_0\|$ $[mm]$	m $[Kg]$	n $[mm]$	$\|n - n_0\|$ $[mm]$
0	222	0	1,0	194	28	2,0	166	56
0,1	220	2	1,1	191	31	2,1	163	59
0,2	217	5	1,2	188	34	2,2	160	62
0,3	214	8	1,3	185	37	2,3	157	65
0,4	211	11	1,4	182	40	2,4	154	68
0,5	209	13	1,5	179	43	2,5	152	70
0,6	206	16	1,6	177	45	2,6	149	73
0,7	202	20	1,7	174	48	2,7	146	76
0,8	200	22	1,8	171	51	2,8	143	79
0,9	197	25	1,9	169	53			

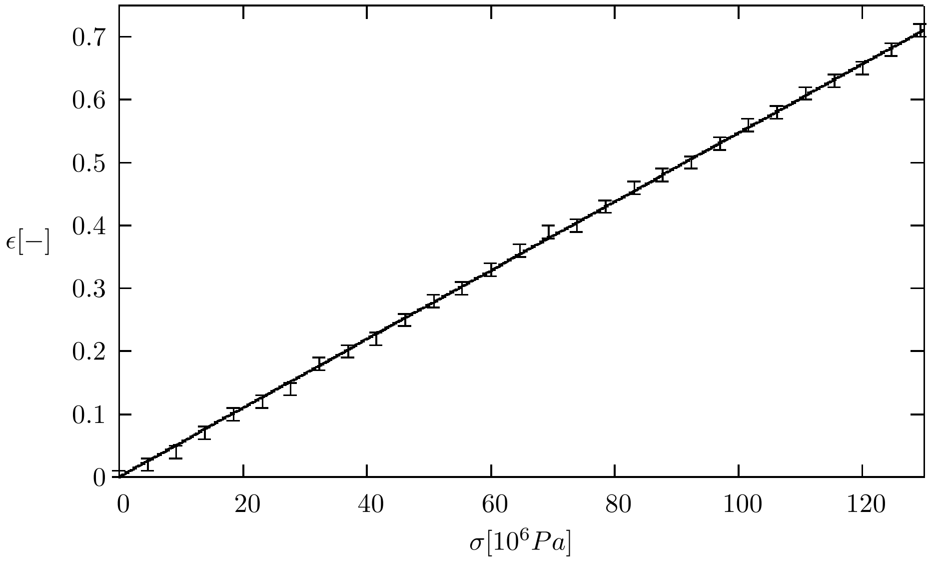
Tabulka 1: Závislost změny velikosti výchylky na hmotnosti při postupném zvyšování hmotností

Další měření probíhalo při odebírání závaží.

m $[Kg]$	n $[mm]$	$\lvert n-n_0\rvert$ $[mm]$	m $[Kg]$	n $[mm]$	$\lvert n-n_0\rvert$ $[mm]$	m $[Kg]$	n $[mm]$	$\lvert n-n_0\rvert$ $[mm]$
0	221	0	1,0	193	28	2,0	165	56
0,1	218	3	1,1	190	31	2,1	162	59
0,2	215	6	1,2	187	34	2,2	159	62
0,3	213	8	1,3	185	36	2,3	156	65
0,4	209	12	1,4	182	39	2,4	154	67
0,5	206	15	1,5	179	42	2,5	151	70
0,6	204	17	1,6	176	45	2,6	149	72
0,7	202	19	1,7	173	48	2,7	146	75
0,8	199	22	1,8	170	51	2,8	143	78
0,9	196	25	1,9	168	53			

Tabulka 2: Závislost změny velikosti výchylky na hmotnosti při postupném odebírání hmotností

Pokud porovnáme výsledky měření změny výchylky v závislosti na hmotnosti, tak pro případ, kdy se závaží odebírá získáme hodnoty, které se od případu, kdy hmotnost přidáváme, liší průměrně o hodnotu, která je rovna chybě měření změny výchylky. Z čehož se dá usoudit, že změna výchylky nezávisí na tom, zda jsme hodnoty přidávali, či ubírali. Pro další zpracování budu používat hodnoty pro měření velikosti výchylky na hmotnosti při postupném přidávání hmotností.



Graf 1: Závislost relativního prodloužení ϵ drátu na napětí σ

Z naměřených hodnot jsem pomocí lineární regrese získal hodnotu modulu pružnosti v tahu z prodlouženého drátu $\underline{E = (178 \pm 49)GPa}$.

Měření modulu E z průhybu trámku

Měření probíhalo s dvěma trámky. První trámek byl vyroben z oceli. Druhý trámek byl vyroben z mosazi.

Šířka trámku vyrobeného z oceli: $a_O = (11,85 \pm 0,05)mm$

Výška trámku vyrobeného z oceli: $b_O = (3,00 \pm 0,05)mm$

Šířka trámku vyrobeného z mosazi: $a_m = (11,80 \pm 0,05)mm$

Výška trámku vyrobeného z mosazi: $b_m = (2,45 \pm 0,05)mm$

Vzdálenost břitů aparatury: $l = (411 \pm 1)mm$

Měřil jsem závislost průhybu trámky v závislosti na hmotnosti zavěšeného závaží. Toto měření jsem pro jednotlivé trámky měřil vždy dvakrát. Jednou při přidávání jednotlivých závaží a podruhé při odebírání závaží. Hmotnost závaží je zatížena relativní chybou ± 1 %. Počáteční hodmotnost je dána vahou misky, na kterou jsem ukládal závaží. Při této hmotnosti se trámek z oceli prohnul o $y_0o = (3,5 \pm 0,1)mm$ a trámek z mosazi se prohnul o $y_0m = (7,5 \pm 0,1)mm$. Prohnutí trámku jsem měřil s přesností $\pm 0,1mm$.

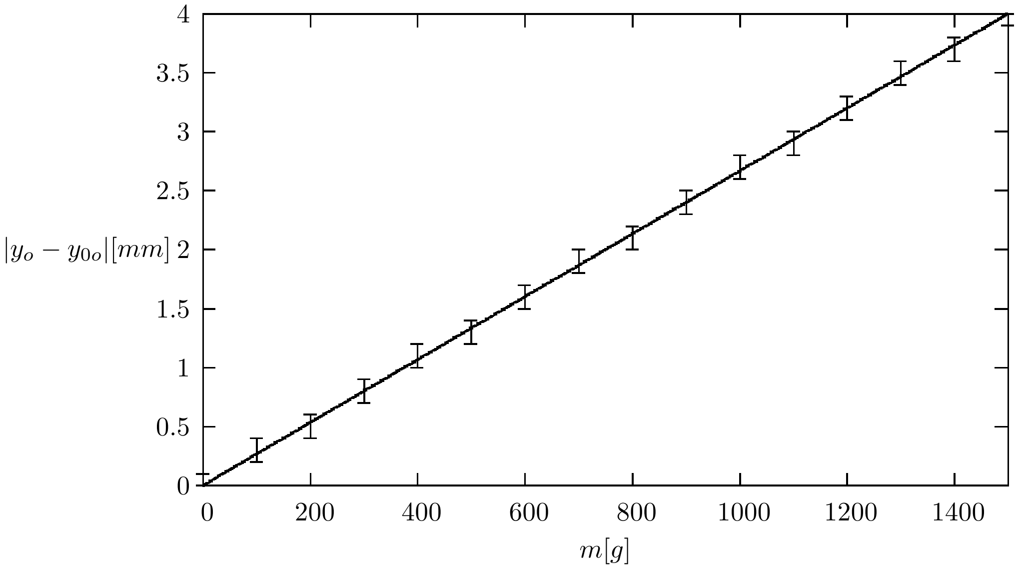
m $[g]$	y_o $[mm]$ přidávání závaží	$\lvert y_o - y_{0o}\rvert$ $[mm]$ přidávání závaží	y_o $[mm]$ odebírání závaží	$\lvert y_o - y_{0o}\rvert$ $[mm]$ odebírání závaží
0	3,5	0,0	3,5	0,0
100	3,8	0,3	3,7	0,2
200	4,0	0,5	4,0	0,5
300	4,3	0,8	4,3	0,8
400	4,6	1,1	4,6	1,1
500	4,8	1,3	4,9	1,4
600	5,1	1,6	5,1	1,6
700	5,4	1,9	5,4	1,9
800	5,6	2,1	5,7	2,2
900	5,9	2,4	5,9	2,4
1000	6,2	2,7	6,2	2,7
1100	6,4	1,9	6,4	2,9
1200	6,7	3,2	6,7	3,2
1300	7,0	3,5	6,9	3,4
1400	7,2	3,7	7,2	3,7
1500	7,5	4,0	7,5	4,0

Tabulka 3: Závislost průhybu ocelového trámku na hmotnosti závaží, během přidávání a během odebírání závaží

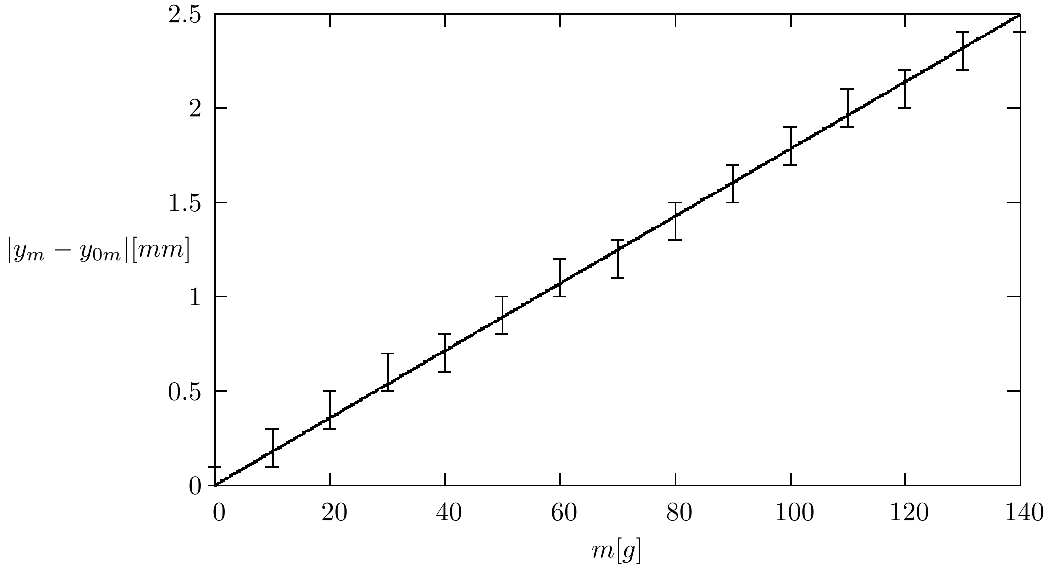
I u tohoto měření jde vidět, že výsledky měření, když se závaží přidávala, a výsledky měření, když se závaží odebírala, se liší maximálně v rámci chyby měření. Tudíž výsledky nezávisí na tom, zde jsem závaží přidával, či ubíral. Proto nadále budu pracovat s daty naměřenými při postupném přidávání závaží. Obdobně i pro měření modulu pružnosti mosazi (výsledky viz. dále).

m $[g]$	y_m $[mm]$	$\lvert y_m - y_{0m}\rvert$ $[mm]$	y_m $[mm]$	$\lvert y_m - y_{0m}\rvert$ $[mm]$
	přidávání závaží	přidávání závaží	odebírání závaží	odebírání závaží
0	$7,5$	$0,0$	$7,5$	$0,0$
10	$7,7$	$0,2$	$7,7$	$0,2$
20	$7,9$	$0,4$	$7,9$	$0,4$
30	$8,1$	$0,6$	$8,1$	$0,6$
40	$8,2$	$0,7$	$8,2$	$0,7$
50	$8,4$	$0,9$	$8,4$	$0,9$
60	$8,6$	$1,1$	$8,6$	$1,1$
70	$8,7$	$1,2$	$8,8$	$1,3$
80	$8,9$	$1,4$	$8,9$	$1,4$
90	$9,1$	$1,6$	$9,1$	$1,6$
100	$9,3$	$1,8$	$9,3$	$1,8$
110	$9,5$	$2,0$	$9,5$	$2,0$
120	$9,6$	$2,1$	$9,6$	$2,1$
130	$9,8$	$2,3$	$9,8$	$2,3$
140	$10,0$	$2,5$	$10,0$	$2,5$

Tabulka 4: Závislost průhybu ocelového trámku na hmotnosti závaží, během přidávání a během odebírání závaží



Graf 2: Závislost prohnutí ocelového trámku $|y_O - y_{0o}|$ na hmotnosti závaží m.



Graf 3: Závislost prohnutí mosazného trámku $|y_m - y_{0m}|$ na hmotnosti závaží m.

Pomocí lineární regrese jsem získal hodnoty modulu pružnosti pomocí měření průhybu trámku. Pro ocel mi vyšlo $\underline{E_o = (199 \pm 3) GPa}$. Pro mosaz mi vyšlo $\underline{E_m = (109 \pm 2) GPa}$.

Diskuse výsledků

K určení modulu pružnosti E jsem používal elementární Hookův zákon pro tah. Ukázalo, že použití tohoto zákona, který počítá malým napětím působícím na drát, bylo vhodné, neboť měření bylo zatíženo poměrně malou statistickou chybou $\sigma = 0,33 \cdot 10^9 Pa$.

Při měření se také potvrdilo, že nezáleželo na tom, zda jsem závaží přidával či ubíral. Pro měření, kdy jsem přidával závaží, mi vyšla hodnota $E = (178 \pm 49) GPa$. Pro měření, kdy jsem závaží, mi vyšla hodnota $E = 179 GPa$, což je hodnota velice blízká, která zpadá do vypočtené chyby. Postupné přidávání či odebírání nebylo zcela ideální, neboť jsem musel vzhledem k používané sadě závaží v některých okamžících nahradit některá závaží většími (např. 5 kusů $100g$ závaží nahradit jedním závažím a s hmotností $500g$), v těcho okažicích jsem porušil to, že byly závaží stále přidávána či ubírána. Pokud by mělo přidávání či ubírání závaží nějaký vliv, muselo by se to projevit v okamžicích, kdy jsem přidával pouze $100g$ závaží. Ovšem také podle teorie jsem vliv, zda byla závaží přidávána, či nikoliv, neočekával.

Chyba měření je dána statistickou chybou a pak přispěním chyby, kterou jsem vypočetl z kvadratického zákona přenosu chyb. Zde jsem počítal s přesnostmi veličin, které jsem uvedl ve výsledcích měření. Přesnost hmotnosti jsem odhadl asi na 1 %. Pravděpodobně tato chyba bude nižší. Ale při měření náhodných $100g$ vzorků na laboratorních vahách, naměřené hodnoty vždy spadaly do odhadnuté přesnosti 1 %.

V tabulkách [3.] jsem nalezl hodnotu modulu pružnosti v tahu E pro tažnou ocel $E = (1,90$ až $2,15) \cdot 10^5 MPa$, žíhanou ocel $E = (1,70$ až $1,80) \cdot 10^5 MPa$, kalená ocel $E = (1,80$ až $1,85) \cdot 10^5 MPa$. Modul pružnosti v tahu závisí na složení, ale v porovnání s tabulkovými hodnotami pro různé druhy oceli jsem zjistil, že se můj výsledek řádově shoduje.

Měření modulu pružnosti E metodou průhybu trámku mi vyšlo s řádově menší chybou. Je to dáno tím, že se mi zde tak neprojevila chyba hmotnosti závaží, kterou jsem i zde odhadl na 1 %. Také mi u této metody nevystupovaly poměrně nepřesné hodnoty jako bylo nepříklad vzálenost stupnice od osy otáčení nebo určení l_0, jako tomu bylo u metody protažení drátu.

I zde jsem určil chybu z statictické chyby a z kvadratického zákona přenosu chyb. Chyby jednotlivých veličin udávám ve výsledcích měření. I u této metody se potvrdil předpoklad, že na měření nemá vliv, zda jsem závaží přidával, či zda jsem závaží odebíral.

V tabulkách [3.] je uveden modul pružnosti v tahu pro mosaz $E = (0,90 \text{ až } 1,00) \cdot 10^5 MPa$. Což je hodnota, která je řádově rovna mým výsledků. Můj výsledek je větší asi o 9 %, než je horní určení momentu pružnosti. Může to být dáno tím, že měřený materiál není zcela čistá mosaz, ale jedná se o slitinu s jiným kovem.

Závěr

Proměřil jsem modul v pružnosi předložených materiálů. Pro modul pružnosti ocelového drátu jsem použil metodu protažení drátu. Vyšlo mi $E = (178 \pm 49)GPa$ což je hodnota, která se v rámci chyby shoduje s tabulkovou hodnotou.

Dále jsem měřil modul pružnosti v tahu pro ocelový a mosazný trámek. K tomuto měření jsem použil metodu průhybu trámku. Výsledná hodnota pro ocelový trámek $E_o = (199 \pm 3)GPa$ se shoduje s tabulkovými hodnotami. Hodnota pro mosazný trámek $E_m = (109 \pm 2)GPa$ se liší od tabulkové hodnoty asi o 9 %, což může být dáno jiným složením materiálu, než udávají tabulky.

Seznam použité literatury

[1.] *Studijní materiály na stránkách fyzikálního praktika.* http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/

[2.] MIKULČÁK Jiří, KLIMEŠ Bohdan, ŠŮLA Václav. *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy.* Prometheus 1988. ISBN 80–85849–84–4

[3.] LEINVEBER, Jan, VÁVRA Pavel. *Strojnické tabulky. Pomocná učebnice pro školy technického zaměření* ALBRA, 2003. ISBN 80–86490–74–2.