

1 Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čocky. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnajte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

2 Teoretický úvod

2.1 Fyzické kyvadlo

Každé tuhé těleso v tíhovém poli Země s možností volně se otáčet kolem osy neprocházející jeho těžištěm může konat kmity. Je potom fyzickým kyvadlem, jehož hmotnost označíme m , vzdálenost osy od těžiště d , moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení I . Z jednoduché geometrie vyplývá, že při libovolné úhlové výchylce φ z rovnovážné polohy bude na kyvadlo působit moment síly o velikosti $mgd \sin \varphi$. Po položení do rovnosti s časovou derivací momentu hybnosti $I\ddot{\varphi}$ (podle [3]) dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgd}{I} \sin \varphi. \quad (1)$$

Její řešení není triviální, ale s užitím aproximace pro malé výchylky (malé úhly φ) lze odvodit vztah^[1] pro periodu fyzikálního kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2)$$

kde α je maximální hodnota výchylky φ a g je místní tíhové zrychlení. Pro hodně malé výchylky můžeme vztah (2) aproximovat na výrazně jednodušší vzorec, protože $\sin \frac{\alpha}{2}$ jde k nule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (3)$$

2.2 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je hmotný bod zavěšený na nehmotném vlákně. Vzdálenost d tedy v případě matematického kyvadla označuje délku závěsu l , proto $l = d$. O tomto kyvadle víme, že má moment setrvačnosti $I_M = ml^2$ [3]. Po dosazení do (2) dostáváme vztah pro periodu matematického kyvadla T_M

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4)$$

Pro hodně malé výchylky můžeme vztah (4) aproximovat podobně jako vztah (2)

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5)$$

2.3 Fyzický model matematického kyvadla

Dokonalé matematické kyvadlo není možné reálně sestavit, lze se k němu však přiblížit. To se pokusíme udělat závěsem malé těžké koule hmotnosti m_k a poloměru r na lehký dlouhý provázek délky L a malé hmotnost m_p . Pro moment setrvačnosti I_p homogenní tyče vůči ose na ni kolmé procházející jejím koncem platí (podle [3])

$$I_p = \frac{1}{12} m_p L^2. \quad (6)$$

Pro kouli platí vzorec

$$I_{k0} = \frac{2}{5} m_k r^2, \quad (7)$$

což je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm koule. Koule se ale otáčí kolem bodu závěsu. Proto moment setrvačnosti převedeme podle Steinerovi věty

$$I_k = I_{k0} + m_k (L + r)^2, \quad (8)$$

kde I_k je moment setrvačnosti vůči horizontální ose procházející bodem závěsu.

Díky aditivitě momentů setrvačnosti, stačí jednotlivé momenty ((6) a (8)) sečíst. Vzdálenost těžiště d_F od osy otáčení spočítáme váženým průměrem polohy těžiště provázku a těžiště koule

$$d_F = \frac{\frac{L}{2} m_p + (L + r) m_k}{m_p + m_k}. \quad (9)$$

Složením vztahů (3), (6), (8) a (9) dostaneme výraz pro periodu T_F fyzického kyvadla, kterým se snažíme přiblížit k matematickému kyvadlu

$$T_F = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} m_p L^2 + \frac{2}{5} m_k r^2 + m_k (L + r)^2}{(m_k + m_p) g \frac{\frac{L}{2} m_p + (L + r) m_k}{m_p + m_k}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} m_p L^2 + \frac{2}{5} m_k r^2 + m_k (L + r)^2}{g \left(\frac{L}{2} m_p + (L + r) m_k \right)}}. \quad (10)$$

2.4 Reverzní kyvadlo

Reverzní kyvadlo je takové fyzikální kyvadlo, které má dva body závěsu, které nejsou symetrické podle těžiště, a platí, že jeho perioda je při obou závěsech stejná. Obě osy však musí ležet v rovině procházející těžištěm a být rovnoběžné. K jakékoliv ose libovolného tuhého tělesa lze najít takovou druhou nesymetrickou osu, pro kterou to platí (osa samozřejmě nesmí procházet těžištěm, pak by to nebylo kyvadlo). Vzdálenost těchto os je *redukováná délka fyzického kyvadla* a budeme ji značit l_R . Podle [1] platí pro periodu T_R reverzního kyvadla podobný vztah, jako pro matematické kyvadlo

$$T_R = 2\pi \sqrt{\frac{l_R}{g}}. \quad (11)$$

3 Měření

3.1 Metoda matematického kyvadla

Pro měření tíhového zrychlení pomocí matematického kyvadla byl použit výše uvedený model s následujícími parametry.

3.1.1 Kulička

Kulička byla kovová s hmotností

$$m_k = (62,3273 \pm 0,0001) \text{ g} \quad (12)$$

změřenou na dostatečně přesných laboratorních vahách. Jelikož to nebyla přesná koule, poloměr nelze určit přímočaře. Průměr byl změřen pomocí posuvného měřidla s nepřesností 0,02 mm. Nepřesnost měřidla je však zanedbatelná v porovnání se směrodatnou odchylkou. Měření proběhlo pětkrát pro různé průměry (resp. různé směry procházející středem). Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Měření průměru kuličky

číslo měření	$2r$ mm	$\sigma_{2r} \cdot 10^{-2}$ mm
1	25,42	2
2	25,90	2
3	25,20	2
4	25,96	2
5	25,30	2
průměr	25,56	16

σ_{2r} je pro naměřené hodnoty nejistota způsobena měřením pomocí posuvného měřidla a pro průměr je uvedena výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru (viz [4] str.16). Máme tedy poloměr kuličky

$$r = (12,78 \pm 0,08) \text{ mm} . \quad (13)$$

3.1.2 Provázek

Byl použit plastový provázek o průměru přibližně 2 mm. Díky jeho vlastnostem nestačil na uvázání kuličky pouze jeden uzel, proto bylo třeba uvázat alespoň dvojitý a zbytek provázku zastříhnout, aby co nejméně ovlivňoval moment setrvačnosti a hmotnost kyvadla. Velkou nejistotu do měření tíhového zrychlení zanesl nevelká přesnost měření délky provázku. Provázek musí být při měření napínán zavěšenou kuličkou, jinak bychom mohli naměřit kratší délku.

Proto bylo měřeno nepřímou. Nejprve byla změřena délka h_1 (viz obrázek 1) svinovacím metrem s nejmenším dílkem stupnice 1 mm. Metr byl zavěšen za úchyt provázku, ale jelikož kvůli uzlíku u oka bylo poměrně komplikované stanovit přesně, kde končí provázek, bude počítáno s nepřesností 1 mm. Hodnoty h_2 a h_3 byly měřeny posuvným měřidlem, takže jejich nejistota je řádově menší. Naměřené hodnoty jsou

$$h_1 = (99,6 \pm 0,1) \text{ cm} , \quad (14)$$

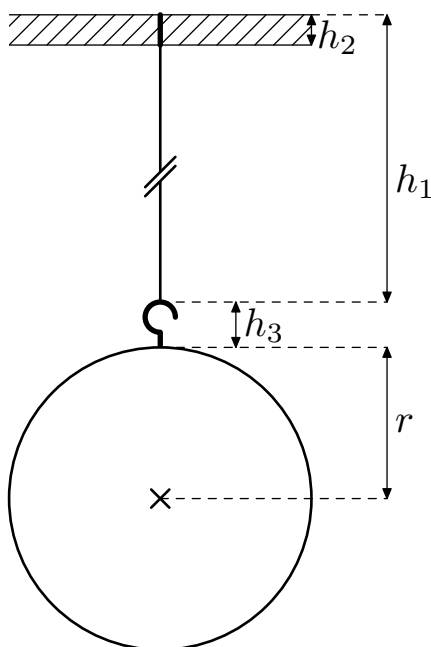
$$h_2 = (7,90 \pm 0,02) \text{ mm} , \quad (15)$$

$$h_3 = (7,78 \pm 0,02) \text{ mm} . \quad (16)$$

Z toho lze snadno zjistit délku provázku L i délku závěsu matematického kyvadla l (chyba posuvného měřidla je vůči chybě metru zanedbatelná)

$$L = h_1 - h_2 + h_3 = (99,6 \pm 0,1) \text{ cm} , \quad (17)$$

$$l = h_1 - h_2 + h_3 + r = (100,9 \pm 0,1) \text{ cm} , \quad (18)$$



Obrázek 1: Měření délky provázku

Hmotnost provázku změřená na laboratorních vahách je

$$m_p = (489,2 \pm 0,1) \text{ mg}. \quad (19)$$

3.1.3 Perioda

Byl měřen čas dvaceti period pro minimalizaci nejistoty.

Perioda byla měřena čítačem G-2001.500, který pomocí fotodiody, jejíž osvětlení je přerušeno průchodem kyvadla rovnovážnou polohou, měří čas s přesností na desetiny milisekund. Jeho display sice ukazuje 4 desetinná místa času v sekundách, ale výsledná směrodatná odchylka je výrazně větší, než přesnost displaye. Poslední cifry jsou vzhledem ke směrodatné odchylce irelevantní, proto jsou zde uvedeny hodnoty zaokrouhlené na milisekundy. Nejistota měřidla je pro každou hodnotu 0,05 ms a kvůli přehlednosti není v následující tabulce uvedena.

Tabulka 2: Měření periody matematického kyvadla

číslo měření	$20T_M$ s
1	40,052
2	40,059
3	40,042
4	40,052
5	40,047
6	40,044
7	40,060
8	40,053
9	40,041
10	40,058
průměr	40,0506
$20\sigma_{T_M}$	0,0023

$20\sigma_{T_M}$ značí výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru měření času dvaceti period (vypočítáno stejným způsobem jako v předchozím případě). Naměřená perioda tedy je¹

$$T_M = (2,0025 \pm 0,0001) \text{ s}. \quad (20)$$

Nyní už stačí jen vypočítat tíhové zrychlení podle vztahu (5)

$$g_M = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2} = (9,93 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (21)$$

kde nejistota je vypočítána podle Gaussova zákona šíření nejistot [4] (odmocnina ze součtu kvadrátů součinů parciálních derivací a nejistot jednotlivých veličin)² s tím, že nejistota způsobena délkou závěsu (0,1 %) je přibližně o jeden řád vyšší, než nejistota způsobená měřením periody (0,01 %).

3.2 Chyba matematického kyvadla

Všechny veličiny potřebné pro přesný výpočet pro fyzikální kyvadlo jsou naměřeny, stačí tedy dosadit do vztahu pro g vyjádřeného z (10)

$$g_F = 4\pi^2 \frac{\frac{1}{12}m_p L^2 + \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k(L+r)^2}{T_F^2 \left(\frac{L}{2}m_p + (L+r)m_k \right)}. \quad (22)$$

$$g_F = (9,92 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (23)$$

Po zaokrouhlení vyšla téměř stejná hodnota. Chyba je spočítána podle Gaussova zákona šíření nejistot, výpočet by zabral několik řádků, proto zde vztah není uveden.

Moment setrvačnosti fyzického kyvadla je

$$I_F = \frac{1}{12}m_p L^2 + \frac{2}{5}m_k r^2 + m_k(L+r)^2 = (6,34 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (24)$$

¹Je potřeba obě hodnoty podělit dvaceti (počtem period).

² $\sigma_{g_M} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial l} \frac{4\pi^2 l}{T_M^2} \sigma_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial T_M} \frac{4\pi^2 l}{T_M^2} \sigma_{T_M} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T_M^2} \sigma_1 \right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l}{T_M^3} \sigma_{T_M} \right)^2}$

a moment setrvačnosti matematického kyvadla je³

$$I_M = ml^2 = (6,35 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (25)$$

Vidíme, že momenty setrvačnosti se také téměř neliší. Porovnáme ještě vzdálenosti těžišť. Pro matematické kyvadlo je těžiště vzdáleno $l = (100,9 \pm 0,1)$ cm a pro fyzické kyvadlo máme

$$d_F = \frac{\frac{L}{2}m_p + (L+r)m_k}{m_p + m_k} = (100,5 \pm 0,1) \text{ cm}. \quad (26)$$

Je vidět, že hodnoty se příliš neliší.

3.3 Reverzní kyvadlo

Nejdříve necháme změřit závislost periody fyzického kyvadla na poloze čocky pro oba závěsy a posléze se budeme přibližovat k poloze čocky, kde se obě periody rovnají.

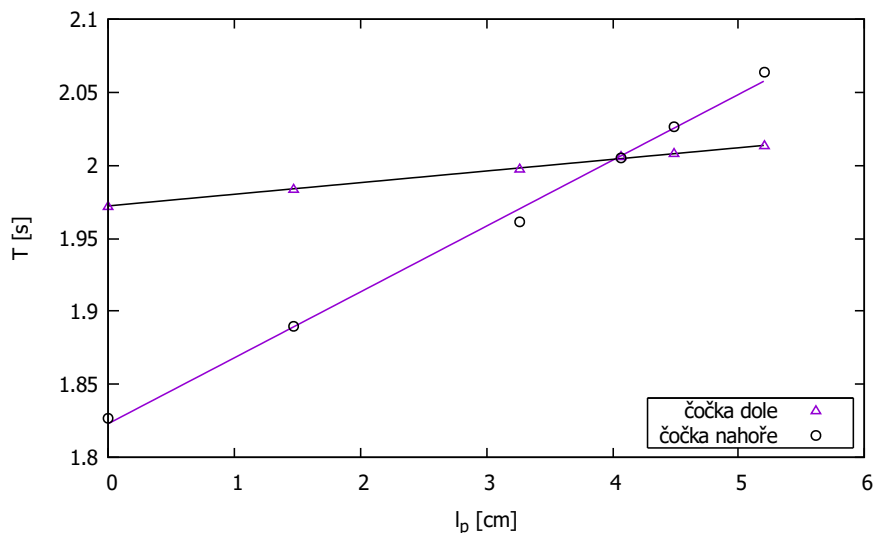
Položku čocky budeme značit l_p a je to vzdálenost horního závitu (při poloze, kdy je čocka dole) od konce „šroubu“, po kterém se může čocka pohybovat. Pro $l_{p0} = 0$ bude čocka v nejvyšší poloze (nejblíže středu tyče) a pro maximální hodnotu přibližně 5,2 cm bude čocka nejnižší (nejdále od středu tyče).

Doba dvaceti period byla měřena dvakrát z důvodu, aby nedocházelo k hrubým chybám (např. špatného počtu period). V následující tabulce jsou uvedeny průměry těchto dvou hodnot přepočítané na samotnou jednu periodu pro přehlednost bez uvedené odchylky měřidla, která je řádově (cca 0,01 ms) mnohem menší, než směrodatná odchylka.

Tabulka 3: Závislost period na poloze čocky

$\frac{l_p}{\text{cm}}$	$\frac{T_N}{\text{s}}$	$\frac{T_D}{\text{s}}$
0 cm	1.826	1.972
$1,472 \pm 0,002$	1.890	1.984
$3,264 \pm 0,002$	1.961	1.998
$4,070 \pm 0,002$	2.005	2.006
$4,492 \pm 0,002$	2.026	2.007
$5,202 \pm 0,002$	2.064	2.016

³Chyba momentů je spočítána pomocí výše zmíněného Gaussova zákona.



Obrázek 2: Závislost period na poloze čočky

Ačkoliv závislost periody na poloze čočky rozhodně není lineární, pro takto malý interval poloh čočky lze závislost s dostatečnou přesností proložit přímkou. Jednotlivé rovnice fitu jsou⁴

$$T_N(l_p) = l_p(4,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-2} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} + (1,823 \pm 0,005) \text{ s}, \quad (27)$$

$$T_D(l_p) = l_p(7,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} + (1,972 \pm 0,001) \text{ s}. \quad (28)$$

⁵Snadnou algebrou zjistíme, že jejich průsečík je v bodě $l_{pp} = (4,0 \pm 0,1) \text{ cm}$, což není moc přesná hodnota⁶, proto se budeme zabývat dalším měřením v okolí hodnoty l_{pp} . Matky, mezi kterými je čočka upevněna, lze otáčet po zlomcích otáčky a tím snadno posouvat čočku o velmi malé vzdálenosti a iterační metodou se tak přibližovat k poloze, kde je perioda obou závěsů nejbližší.

Nyní je hodnota l_p irelevantní, protože hledáme takovou periodu, která bude pro oba závěsy stejná a tíhové zrychlení pak na poloze čočky ani nezávisí. Metoda je následující: pokud je perioda pro čočku dole vyšší, než pro čočku nahoře, zvětšíme vzdálenost l_p , v opačném případě tuto vzdálenost zmenšíme. Vzdálenost l_p měníme o stále menší a menší hodnoty, dokud nedokonzervujeme k dostatečně blízkým hodnotám period. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty konvergenčního procesu. Stále jsou měřeny časy dvaceti period

Tabulka 4: Hledání průsečíku posouváním čočky

číslo	$\frac{20T_N}{\text{s}}$	$\frac{20T_D}{\text{s}}$
1	40,161	40,087
2	40,132	40,109
3	40,099	40,091

Naštěstí se podařilo skonvergovat docela rychle a další přibližování k hledané hodnotě periody T_R reverzního kyvadla nemá smysl vzhledem k nepřesnosti, kterou do výpočtů vnáší nepřesnost měření vzdálenosti britů.

⁴Fit byl proveden programem Gnuplot, který vypočítá i směrodatné odchylky jednotlivých koeficientů.

⁵ T_D je v grafu označena trojúhelníky (vlevo nahoře, vpravo dole) a T_N je značena kolečky

⁶Chyba je vypočtena zákonem o šíření chyb, ale kvůli přehlednosti tady výpočet není uveden. Zdaleka největší chybu do výpočtů však vnáší nejistota směrnice první přímkou (27).

Po převodu na hodnotu jedné periody víme, že hledaná T_R bude někde v blízkosti hodnot $T_N = 2,0050$ s a $T_D = 2,0046$ s. Podle grafu vidíme, že hodnota T_R bude spíš blíže nižší hodnotě. Kvalifikovaným odhadem stanovíme hodnotu na

$$T_R = (2,0046 \pm 0,0005) \text{ s}. \quad (29)$$

Dále je potřeba změřit vzdálenost břitů l_R reverzního kyvadla. Změříme tedy vzdálenost jejich hrotů nepřímou metodou pomocí svinovacího metru a posuvného měřidla. Posuvným měřidlem změříme tloušťku břítu Δl_R a metrem změříme vzdálenost horních okrajů břitů l'_R .

$$\Delta l_R = (0,662 \pm 0,002) \text{ cm}, \quad (30)$$

$$l'_R = (100,10 \pm 0,05) \text{ cm}, \quad (31)$$

$$l_R = l'_R - \Delta l_R = (100,34 \pm 0,05) \text{ cm}. \quad (32)$$

Nyní stačí ze vztahu (11) vypočítat hodnotu g_R pro měření reverzním kyvadlem

$$g_R = \frac{4\pi^2 l_R}{T_R^2} = (9,858 \pm 0,010) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (33)$$

4 Diskuze výsledků

4.1 Pracovní podmínky

místo:	Praha, Ke Karlovu 3
datum:	9.3.2018
atmosférický tlak:	$(981,80 \pm 0,05) \text{ hPa}$
teplota vzduchu:	$(23,70 \pm 0,05) \text{ }^\circ\text{C}$

Pracovní podmínky jsou v tomto experimentu velmi irelevantní. Na teplotě nezáleží, pokud se během měření výrazně nemění (tak, že by změnila poloměr kuličky, ale tím se nemá smysl zabývat, protože je to změna v úplně jiných řádech, než je naše odchylka měření). Na tlaku i teplotě závisí hustota vzduchu, tedy i odpor vzduchu a koeficient útlumu kyvadla. Kyvadlo však nedosahovalo velkých rychlostí, proto byl řád chyby způsobené tímto faktorem výrazně menší než odchylky měření a jakékoliv tlumení bylo ve všech výpočtech zanedbáno.

Jediné velmi důležité údaje jsou místo a čas měření. Nebylo totiž změřeno obecné tíhové zrychlení libovolného místa na zemi, ale pouze aktuální tíhové zrychlení pro místo univerzitní budovy v daném čase. Tíhové zrychlení je ovlivněno mnoha faktory, jako například zeměpisná šířka, nadmořská výška, čas, fáze Měsíce a rozložení hmoty v okolí laboratoře.

4.2 Chyba aproximací pro malé úhly

Při veškerém měření byly kmity malé. Při pohledu na dolní konec matematického resp. fyzického kyvadla bylo vidět, že výchylka od rovnovážné polohy není vyšší, než 4 cm. To platilo vždy, nikdy nebylo měřeno kyvadlo rozkývané s vyšší výchylkou. Ze znalosti délky kyvadla lze určit horní hranici maximální úhlové výchylky

$$\alpha_m \approx \frac{4 \text{ cm}}{L} \doteq 0,04 \text{ rad} \doteq 2,3^\circ. \quad (34)$$

V rovnici (2) má faktor $\frac{1}{4} \sin \frac{\alpha_m}{2}$ velikost pouze $1 \cdot 10^{-4}$ a vzhledem k tomu, že se vztahu pro g vyskytuje ve druhé mocnině, máme

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_m}{2}\right)^2 \approx 1,0002 \frac{4\pi^2 I}{T^2}, \quad (35)$$

Aproximace pro malé úhly způsobuje chybu maximálně 0,02 %. Nutno dodat, že vztah (2) je také pouhou aproximací, ale další členy v rozvoji pro přesný vztah obsahují vyšší, než druhé mocniny sinu úhlu α_m , čili jejich vliv je opravdu zanedbatelný.

4.3 Matematické kyvadlo

Jelikož se hodnoty tíhového zrychlení vypočtené pro matematické i fyzické kyvadlo liší pouze o jednu nejistotu měření, lze konstatovat, že model matematického kyvadla je pro náš experiment dostatečně přesný. Protože se naměřená hodnota tíhového zrychlení neshoduje se standardně uváděnou hodnotou $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ani v rámci chyby, pravděpodobně byl experiment zatížen k nějakou systematickou chybou. Tu mohl způsobovat odpor vzduchu, který jsme vůbec neuvažovali, nebo nedokonalost závěsu provázku v místě úchyty. Tam byl nesymetrický uzlík, který mohl bránit provázku ve volném pohybu okolo osy otáčení.

4.4 Závěr

Tíhové zrychlení změřené metodou matematického kyvadla je

$$g_M = (9,93 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (36)$$

Idealizace fyzického kyvadla v rámci modelu matematického kyvadla způsobuje velmi malou nepřesnost, která je menší, než přesnost našeho měření, takže matematický model je dostatečně přesný.

Z naměřených hodnot vypočtený moment setrvačnosti fyzického kyvadla, vzdálenost jeho těžiště od středu a tíhové zrychlení počítané pro fyzické kyvadlo se od těchto hodnot vypočítaných pro matematické kyvadlo liší jen velmi málo (méně, než 0,5 %).

Tíhové zrychlení určené metodou reverzního kyvadla je

$$g_R = (9,86 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (37)$$

To už je blíže standardní hodnotě, ale stále to není v rámci chyby. Pravděpodobně je tedy experiment zatížen systematickou chybou.

Tabulka 5: Porovnání matematického a fyzického modelu kyvadla

	vzdálenost těžiště od závěsu	moment setrvačnosti	tíhové zrychlení
matematické kyvadlo	$(100,9 \pm 0,1) \text{ cm}$	$(6,35 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$(9,93 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
fyzické kyvadlo	$(100,5 \pm 0,1) \text{ cm}$	$(6,34 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$(9,92 \pm 0,01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Zároveň bylo experimentálně ověřeno, že idealizaci reálného kyvadla matematickým kyvadlem se nedopouštíme velké chyby, protože moment setrvačnosti i vzdálenost těžiště jsou si s dostatečnou přesností podobné.⁷

5 Seznam použité literatury

- [1] SLAVÍNSKÁ, D., I. STULÍKOVÁ a P. VOSTRÝ. *Fyzikální praktikum I - Mechanika a molekulová fyzika*. Praha: SPN, 1989.
- [2] BROŽ, J. a KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983, 669 s.
- [3] J. MIKULČÁK, J. CHARVÁT, M. MACHÁČEK, F. ZEMÁNEK. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003
- [4] B. VYBÍRAL. *Zpracování dat fyzikálních měření* Hradec Králové: MAFY, 2002

⁷Technická poznámka: v protokolu jsou použity výrazy „nejistota“, „chyba“, „nepřesnost“ a „odchylka“, které reálně nesou různé významy, ale v tomto textu je vším myšlena „nejistota měření“.