

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM 1

Úloha č.: XXI.

Název: Měření tíhového zrychlení

Vypracoval: Mária Šoltésová stud. sk. F – 16 dne 11. 04. 2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval:dne výsledek klasifikace

Připomínky:

Pracovní úloha:

1. Zmerajte miestne tiažové zrýchlenie g metódou reverzného kyvadla.
2. Zmerajte miestne tiažové zrýchlenie g metódou matematického kyvadla.
3. Vypočítajte chybu, akej sa dopúšťate idealizáciou reálneho kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

Teoretická časť:

Meranie tiažového zrýchlenia z doby kmitu kyvadla

Fyzikálnym kyvadlom je každé teleso, ktoré kmitá okolo osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom. Pre periódu kmitov fyzikálneho kyvadla platí vzťah [1]

$$T = 2p \sqrt{\frac{I}{mgd} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}$$

(1)

kde I je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom k osi otáčania, m je hmotnosť kyvadla, g je miestne tiažové zrýchlenie, d je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, α je maximálna uhlová výchylka ťažiska z rovnovážnej polohy.

Ak uvažujeme malé výchylky z rovnovážnej polohy, vzťah prejde na tvar

$$T = 2p \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

(2)

tiažové zrýchlenie potom určíme ako

$$g = \frac{4p^2}{T^2 md} I$$

(3)

Matematickým kyvadlom nazývame model, v ktorom kyvadlo nahradíme hmotným bodom s hmotnosťou m umiestneným na konci nehmotného závesu dĺžky l . Moment zotrvačnosti takéhoto kyvadla je daný vzťahom

$$I_M = ml^2.$$

(4)

Dobu kmitu takéhoto kyvadla určíme dosadením I_M do vzťahu (2) ako

$$T_M = 2p \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(5)

Tiažové zrýchlenie určíme z tohto vzťahu ako

$$g_M = \frac{4p^2 l}{T_M^2}$$

(6)

Ak necháme ťažkú guľôčku kmitať na tenkom vlákne s malým rozkmitom, môžeme sa priblížiť k podmienkam, za akých bol vzťah (5) odvodený. Pri posudzovaní, akej systematickej chyby sa dopúšťame idealizáciou reálneho kyvadla, potrebujeme uvážiť aj výpočet podľa vzťahov pre fyzikálne kyvadlo.

Moment zotrvačnosti takto usporiadaného kyvadla možno určiť zo vzťahov uvedených v [1] ako

$$I_F = m_g \left(\frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2 \right) + \frac{1}{3} m_i l^2$$

(6)

kde r je polomer gule a m_g je hmotnosť gule. Gravitačné zrýchlenie potom určíme za predpokladu malých výchyliek podľa vzťahu (3) ako

$$g_F = \frac{4p^2}{T^2 \left(\frac{1}{2} l m_t + (l+r) m_g \right)} I_F$$

(7)

kde T je doba kmitu kyvadla.

Reverzné kyvadlo

Fyzikálne kyvadlo má rovnakú dobu kmitu okolo dvoch navzájom rovnobežných osí, ak je splnené

1. tieto osi sú symetricky položené vzhľadom k ťažisku
2. osi sú od seba vzdialené o redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla.

Ak nájdeme pre fyzikálne kyvadlo dve rovnobežné osi, okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou dobou kmitu tak, že ich poloha vzhľadom k ťažisku nie je symetrická, potom vzdialenosť týchto osí je redukovanou dĺžkou fyzikálneho kyvadla l_r . Pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla platí [1]

$$T = 2p \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

(8)

z toho tiažové zrýchlenie určíme ako

$$g = \frac{4p^2 l_r}{T^2}.$$

(9)

V našom experimente je reverzné kyvadlo dlhá tyč s dvoma britmi, na konci ktorej je posuvná kovová šošovka. Posúvaním šošovky sa dá meniť poloha ťažiska kyvadla. Ak kyvadlo kmitá okolo obidvoch britov s rovnakou periódou, vzdialenosť britov predstavuje redukovanú vzdialenosť fyzikálneho kyvadla l_r .

Použité pomôcky a prístroje:

reverzné kyvadlo, stojan, záves, milimetrový papier, guľové závažie, pravítko

| merací prístroj | najmenší dielik |
|-------------------|-----------------|
| posuvné meradlo | 0,05 mm |
| pásmové meradlo | 1 mm |
| analytické váhy | 10^{-4} g |
| čítač G-2001.500 | 10^{-4} s |
| rovnoramenné váhy | 0,1 g |

Postup:

Matematické kyvadlo

1. Guľové závažie zavesíme na tenký záves.
2. Kyvadlo vychýlime z rovnovážnej polohy a aktivujeme čítač.
3. Po uplynutí 10 kmitov čítač deaktivujeme, pri najbližšom prechode kyvadla rovnovážnou polohou sa ukončí odčítavanie času.
4. Odmeriame priemer gule posuvným meradlom, dĺžku závesu pásmovým meradlom, hmotnosť závesu určíme na analytických váhach, hmotnosť guľového závažia na rovnoramenných váhach.

Reverzné kyvadlo

1. Zmeriame dobu kmitu okolo obidvoch britov pre dve rôzne polohy kovovej šošovky
2. Metódou grafickej interpolácie popísanej v [1] určíme predpokladanú polohu šošovky, pre ktorú bude kyvadlo kmitať okolo obidvoch britov s rovnakou periódou. Zmeriame dobu kmitu okolo obidvoch britov.
3. Ak sa doba kmitu nezhoduje, doladíme polohu šošovky posúvaním vhodným smerom po o malé vzdialenosti.
4. Ak sa periódy kmitov okolo obidvoch britov zhodujú s dostatočnou presnosťou, zmeriame niekoľkokrát dobu 10 kmitov kyvadla.

Výsledky meraní:

Podmienky experimentu:

Tento experiment nie je výrazne ovplyvnený teplotou prostredia ani atmosférickým tlakom v miestnosti, preto nepovažujem za potrebné tieto údaje uvádzať.

1. Reverzné kyvadlo

Pre reverzné kyvadlo sme najprv zmerali dobu kmitu okolo obidvoch britov pre dve rôzne polohy šošovky. Namerané hodnoty sme spracovali grafickou interpoláciou. Namerané hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 1: údaje pre grafickú interpoláciu

| | T_1 [s] pre vzd. šošovky 7,8 cm | T_2 [s] pre vzd. šošovky 2,4 cm |
|--------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| brit 1 | 8,05861 | 7,88838 |
| brit 2 | 8,28957 | 7,33715 |

Vzdialenosť šošovky bola meraná od britu 2 (bližšieho k šošovke). Čas bol nameraný pre 4 periódy.

Tieto hodnoty boli spracované grafickou interpoláciou (na priloženom milimetrovom papieri). Hľadaná vzdialenosť šošovky vyšla podľa grafickej interpolácie 6,2 cm, doladovaním sme dosiahli polohu šošovky, pre ktorú bola doba kmitu okolo obidvoch britov približne rovnaká. Pre túto polohu sme zmerali 10-krát dobu desiatich kmitov T^{10} , 5 pre každý brit, z týchto hodnôt sme vypočítali dobu jedného kmitu. Namerané doby sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 2: namerané hodnoty doby kmitu reverzného kyvadla

| T_i^{10} [s] | | | | | $\overline{T^{10}}$ [s] | $\sigma_{T^{10}}$ [s] |
|----------------|---------|---------|---------|---------|-------------------------|-----------------------|
| 20,0372 | 20,0363 | 20,0365 | 20,0399 | 20,0367 | 20,0399 | 0,0031 |
| 20,0449 | 20,0432 | 20,0425 | 20,0410 | 20,0410 | | |
| T_i [s] | | | | | \overline{T} [s] | σ_T [s] |
| 2,00372 | 2,00363 | 2,00365 | 2,00399 | 2,00367 | 2,0040 | 0,0003 |
| 2,00449 | 2,00432 | 2,00425 | 2,00410 | 2,00410 | | |

Hodnoty T_i^{10} sú namerané hodnoty doby desiatich kmitov, \overline{T}^{10} je ich stredná hodnota a σ_{T10} je ich štandardná odchýlka. Hodnoty T_i sú vypočítané doby jednej periódy, \overline{T} je ich stredná hodnota a σ_T je štandardná odchýlka. Chybu meracieho zariadenia môžeme zanedbať.

Pásmovým meradlom sme zmerali vzdialenosť britov, ktorá predstavuje redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla l_r . Namerané hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 3: namerané hodnoty redukovanej dĺžky fyzikálneho kyvadla

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\overline{l_r}$ | σ_{l_r} |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------------------|----------------|
| l_r [cm] | 99,5 | 99,6 | 99,4 | 99,3 | 99,5 | 99,4 | 99,4 | 99,3 | 99,5 | 99,3 | 99,4 | 0,1 |

$\overline{l_r}$ je stredná hodnota nameraných hodnôt a σ_{l_r} je štandardná odchýlka, prístrojová chyba je oproti štatistickej zanedbateľná.

Z nameraných hodnôt podľa vzťahu (9) určíme miestne tiažové zrýchlenie ako $g = (9,77 \pm 0,01) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ s relatívnou chybou $d_g = 0,1\%$.

2. Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo sme skonštruovali ako guľové závažie zavesené na tenkom závесе.

Dĺžku závesu sme určili pásmovým meradlom ako $l = (101,3 \pm 0,2) \text{ cm}$. Namerané hodnoty periód sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 5: namerané hodnoty doby kmitu matematického kyvadla

| T_i^{10} [s] | | | | | \overline{T}_M^{10} [s] | σ_{T10} [s] |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------------------------|--------------------|
| 20,5041 | 20,5126 | 20,5648 | 20,5487 | 20,5584 | 20,532 | 0,026 |
| 20,5510 | 20,5361 | 20,5437 | 20,4810 | 20,5247 | | |
| T_i [s] | | | | | \overline{T}_M [s] | σ_{TM} [s] |
| 2,05041 | 2,05126 | 2,05648 | 2,05487 | 2,05584 | 2,053 | 0,003 |
| 2,05510 | 2,05361 | 2,05437 | 2,04810 | 2,05247 | | |

Hodnoty T_i^{10} sú namerané hodnoty doby desiatich kmitov, \overline{T}_M^{10} je ich stredná hodnota a σ_{T10} je ich štandardná odchýlka. Hodnoty T_i sú vypočítané doby jednej periódy, \overline{T}_M je ich stredná hodnota a σ_{TM} je štandardná odchýlka. Chybu meracieho zariadenia môžeme zanedbať.

Tiažové zrýchlenie určené touto metódou vypočítame podľa vzťahu (6), pričom ako vzdialenosť hmotného stredu od osi otáčania uvažujem dĺžku $l+r$. Dostaneme $g_M = (9,68 \pm 0,03) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ s relatívnou chybou $d = 0,3\%$.

3. Porovnanie metód

Je potrebné posúdiť, akej chyby sa dopúšťame vzhľadom k chybe dielčích meraní, ak namiesto reálneho fyzikálneho kyvadla uvažujeme model matematického kyvadla. Tieto dva prístupy sa líšia v momente zotrvačnosti, ktorý dosadzujeme do vzťahu (3). Aby sme určili

veľkosť systematickej chyby, potrebujeme porovnať, ako sa líšia momenty zotrvačnosti I_F a I_M v oboch prípadoch, a teda aj tiažové zrýchlenia g_F a g_M vypočítané uvažovaním oboch metód.

Hmotnosť guľového závažia sme zmerali na rovnoramenných váhach ako $m_g = (278,8 \pm 0,1)$ g, hmotnosť závesu sme zmerali na analytických váhach ako $m_t = (0,124 \pm 0,001)$ g. Chybu uvažujeme ako chybu prístroja. Priemer guľového závažia sme odmerali na viacerých miestach posuvným meradlom. Namerané hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 4: namerané hodnoty priemeru gule

| d_i [mm] | | | | | \bar{d} [mm] | σ_d [mm] |
|------------|--------|--------|--------|--------|----------------|-----------------|
| 39,95 | 40,50 | 40,10 | 39,80 | 40,25 | 40,0 | 0,2 |
| 39,90 | 39,95 | 39,75 | 40,25 | 40,00 | | |
| r_i [mm] | | | | | \bar{r} [mm] | σ_r [mm] |
| 19,950 | 20,250 | 19,900 | 19,975 | 20,125 | 20,0 | 0,1 |
| 19,975 | 20,050 | 20,125 | 19,875 | 20,000 | | |

\bar{d} , \bar{r} sú stredné hodnoty priemeru a polomeru gule, σ_d , σ_r sú štandardné chyby priemeru a polomeru, prístrojová chyba je oproti nim zanedbateľná.

Moment zotrvačnosti I_M matematického kyvadla je daný vzťahom (4), jeho hodnota je $I_M = (0,298 \pm 0,001)$ kg.m². Moment zotrvačnosti I_F daný podľa vzťahu (6) je $I_F = (0,298 \pm 0,001)$ kg.m². Hodnota gravitačného zrýchlenia g_F vypočítaná podľa vzťahu (7) je $g_F = (9,68 \pm 0,03)$ m.s⁻² s relatívnou chybou $d = 0,3\%$

Diskusia:

Hodnoty gravitačného zrýchlenia boli vo všetkých prípadoch určené s malou štandardnou chybou, táto chyba nepresahuje 0,3%. Štandardnú neistotu sa podarilo redukovať hlavne použitím čítača na meranie času, čím sa eliminuje reakčná doba človeka. Porovnaním určených hodnôt s tabuľkovou hodnotou tiažového zrýchlenia pre Prahu, ktorá je udávaná v [2] ako $g = 9,81$ m.s⁻² však dochádzame k záveru, že merania boli zaťažené systematickou chybou, pretože namerané hodnoty sa s tabuľkovou nezhodujú.

Hodnota tiažového zrýchlenia g určená metódou reverzného kyvadla sa najviac blíži k tabuľkovej hodnote tiažového zrýchlenia, napriek tomu sa s ňou v rámci chyby nezhoduje. Možným zdrojom systematickej chyby je nepresné nastavenie kovovej šošovky kyvadla. Toto nastavenie malo zaručiť, že doba kmitu bude rovnaká okolo oboch britov, to však pravdepodobne nebolo splnené s dostatočnou presnosťou. Isté nepresnosti sa mohli vyskytnúť aj vplyvom odporu vzduchu a trenia v mieste osi otáčania. Meranie by sa dalo spresniť lepším nastavením šošovky, čo je však časovo náročné.

Porovnaním hodnoty g_M s hodnotou g_F zistíme, aké chyby sa dopúšťame, ak považujeme použité kyvadlo za matematické. Obe hodnoty sa na udávanom počte desiatinných miest zhodujú. Model matematického kyvadla pre náš experiment teda môžeme pokladať za dostatočne presný. Keďže sa tieto hodnoty nezhodujú s tabuľkovou hodnotou, meranie bolo

zaťažené ešte inými chybami. Na nepresnosti výsledku sa mohla prejaviť napríklad veľkosť počiatkovej výchylky, ktorá vystupuje vo vzťahu (1). Experiment bol prevádzaný tak, aby výchylka z rovnovážnej polohy nebola väčšia ako 5 cm, čo zodpovedá pri dĺžke závesu l

uhlovej výchyľke približne 3° . Ak vo vzťahu pre ťažové zrýchlenie uvažíme túto korekciu, rozdiel sa pri udávanom počte desatinných miest neprejaví. Chybu v určení gravitačného zrýchlenia mohol spôsobiť napríklad fakt, že použitý záves nebol dokonale nepružný, vplyv na presnosť experimentu mohol mať aj odpor vzduchu a trenie v mieste závesu.

Záver:

Metódou reverzného kyvadla bola určená hodnota ťažového zrýchlenia ako $g = (9,77 \pm 0,01) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Metódou matematického kyvadla sme dostali hodnotu $g_M = (9,68 \pm 0,03) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Použitie modelu matematického kyvadla sa ukázalo ako oprávnené, chyba spôsobená týmto zjednodušením sa pri štatistickej chybe neprejaví. Uvažovanie malej uhlovej výchyľky sa tiež ukázalo ako dostatočne presné.

Literatúra:

[1] D. Slavínská prom.fyz., CSc., I. Stulíková , CSc., P. Vostrý, CSc.: Fyzikální praktikum I., SPN Praha 1989

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980