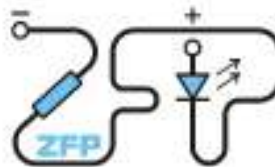


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...



Úloha č.

Název úlohy:

Jméno: Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření:

Datum odevzdání:

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.....

dne:

Pracovní úkoly

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čočky. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnajte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

Teoretická část

Těleso v tíhovém poli Země zavěšené mimo své těžiště vykonává po vychýlení ze stabilní polohy periodický kývavý pohyb. Doby kmitu takového tělesa lze pro malé výchylky s dostatečnou přesností určit výrazem [1]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (1)$$

kde J představuje moment setrvačnosti vůči ose otáčení, a vzdálenost těžiště od osy otáčení a m hmotnost tělesa.

Matematické kyvadlo je model kyvadla, který je popsán jako hmotný bod o hmotnosti m na konci nehmotného závěsu o délce l . Moment setrvačnosti takového kyvadla je dán vztahem

$$J = ml^2 \quad (2)$$

Z doby kmitu matematického kyvadla o délce l lze dopočítat místní tíhové zrychlení pomocí vzorce

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_m^2} \quad (3)$$

Matematickému kyvadlu se můžeme přiblížit zavěšením těžkého kulového závaží za lehký provázek, pokud zanedbáme hmotnost provázku a rozměr závaží. Zda je toto přiblížení dostatečné můžeme posoudit vyjádřením momentů setrvačnosti závaží a provázku a porovnáním modelů matematického a fyzického kyvadla. Zároveň tak zjistíme chybu vzniklou použitím modelu matematického kyvadla.

Pro moment setrvačnosti homogenní tyče délky L vzhledem k ose procházející koncem tyče kolmo k délce platí

$$J_{tyč} = \frac{1}{3} m_t L^2, \quad (4)$$

pro moment setrvačnosti koule o poloměru r vzhledem k ose otáčení platí

$$J_{koule} = m_k \left(\frac{2}{5} r^2 + (L + r)^2 \right). \quad (5)$$

Vzdálenost těžiště takto realizovaného fyzického kyvadla od osy otáčení je daná

$$a = \frac{\frac{1}{2} L m_t + (L+r) m_k}{m_t + m_k} \quad (6)$$

a tíhové zrychlení dopočteme ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2 \left(\frac{1}{2} L m_t + (L+r) m_k \right)} (J_{koule} + J_{tyč}) \quad (7)$$

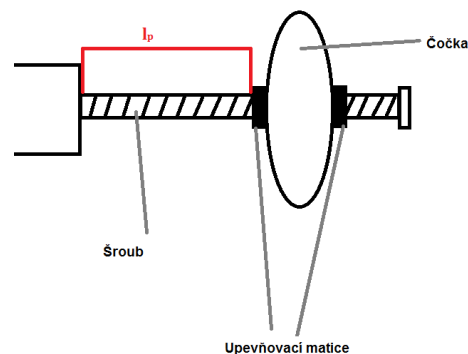
Fyzické kyvadlo se kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os nesymetricky položených vzhledem k těžišti v případě, že jsou tyto osy vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla l_r [1]. Z doby kmitu takového kyvadla lze zjistit místní tíhové zrychlení vzorcem

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \quad (8)$$

Mějme reverzní kyvadlo se dvěma břity s pevnou vzdáleností D a posuvným závažím (těžkou čočkou) na jednom konci, kterým lze měnit polohu těžiště kyvadla. Vzdálenost závaží vůči pevné části kyvadla označíme l_p . Pokud najdeme takovou vzdálenost l_p , aby doba kmitu byla kolem obou os stejná, pak platí

$$l_r = D. \quad (9)$$

Pro nalezení takové pozice použijeme metodu grafické interpolace.



Obr. 1 Schéma konce kyvadla s čočkou

Použité pomůcky

Reverzní kyvadlo, stojan, lanko, kulové závaží, počítač (software Origin/Excel)

Přístroj	Nejmenší dílek
Pásové měřidlo	1 mm
Posuvné měřidlo (s ručičkou)	0,02 mm
Analytické váhy	10^{-4} g
Čítač	10^{-4} s

Postup

Matematické kyvadlo

1. Kulové závaží uvážeme na provázek a zavěsíme tak, aby překrývalo čidlo ovládající čítač
2. Kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy, spustíme čítač a odměříme 10 kmitů.
3. Změříme průměr kulového závaží, délku háčku a délku provázku, zvážíme provázek a závaží.

Reverzní kyvadlo

1. Nastavíme čočku na nejbližší nebo nejvzdálenější pozici a provedeme měření 10 kmitů pro obě osy, opakujeme pro druhou extrémní pozici čočky
2. Naměřené časy vložíme do grafu a proložíme přímkami, vybereme další pozice pro zpřesnění interpolace
3. Opakujeme měření pro další polohy čočky, naměřené časy vložíme do grafu a odhadneme polohu pro kterou platí (9).
4. Provedeme měření s čočkou v odhadnuté poloze, pokud se doby kmitu pro jednotlivé osy liší mimo mez pozorovacích chyb, upravíme pozici čočky jemným pootočením upevňovacího šroubu

Výsledky měření

Podmínky experimentu

Toto měření není výrazně ovlivněno okolní teplotou ani atmosferickým tlakem, nepovažují tedy za nutné tyto hodnoty uvádět.

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo bylo realizováno jako kulové závaží zavěšené na provázku, jehož délka (do které je započten i rozměr úchytu na závaží) byla určena pásovým a posuvným měřidlem jako $L = (99,9 \pm 0,1)$ cm, průměr kulového závaží byl určen posuvným měřidlem a naměřené hodnoty jsou v následující tabulce:

Tabulka 1: naměřené hodnoty průměru kulového závaží

d_i [cm]					\bar{d} [cm]	σ_d [cm]
2,618	2,626	2,624	2,624	2,620	2,622	0,003
r_i [cm]					\bar{r} [cm]	σ_r [cm]
1,309	1,313	1,312	1,312	1,310	1,311	0,001

Hodnoty d_i jsou naměřené průměry kulového závaží, \bar{d} jejich střední hodnota a σ_d směrodatné odchylna. r_i jsou dopočtené poloměry, \bar{r} a σ_r obdobně. Nejistota měřícího přístroje je $u_r = 0,001$ cm.

Průměr je tedy $r = (13,11 \pm 0,02)$ mm, délku matematického kyvadla uvažujeme $l = L + r$. Naměřené doby 10 kmitů a dopočtené hodnoty jsou v následující tabulce.

Tabulka 2: naměřené hodnoty matematického kyvadla

T_n^{10} [s]					$\overline{T^{10}}$ [s]	$\sigma_{T^{10}}$ [s]
20,1030	20,1097	20,1049	20,0902	20,1024	20,12	0,02
20,1207	20,1394	20,1277	20,1346	20,1218		
T_n [s]					\overline{T} [s]	σ_T [s]
2,0103	2,01097	2,01049	2,00902	2,01024	2,012	0,002
2,01207	2,01394	2,01277	2,01346	2,01218		

Hodnoty T_n^{10} jsou naměřené hodnoty doby 10 kmitů, $\overline{T^{10}}$ je jejich střední hodnota a $\sigma_{T^{10}}$ směrodatná odchylka. Hodnoty T_n jsou dopočtené doby 1 kmitu, \overline{T} a σ_T obdobně. Chybu měřícího zařízení lze zanedbat.

Podle vztahu (3) dopočítáme g a dostaneme $g_M = (9,88 \pm 0,02)$ m.s⁻² s relativní chybou $\delta = 0,2\%$.

Porovnání fyzického a matematického kyvadla

K posouzení chyby vzniklé použitím modelu matematického kyvadla využijeme vzorců (4) a (5), spočítáme moment setrvačnosti fyzického kyvadla a porovnáme s momentem setrvačnosti matematického kyvadla z (2). Hmotnosti m_k závaží a m_t provázku byly změřeny na analytických vahách jako $m_t = (0,4660 \pm 0,0001)$ g a $m_k = (62,3283 \pm 0,0001)$ g, uvažujeme pouze přístrojovou chybu.

Moment setrvačnosti matematického kyvadla byl spočten jako $I_M = (63,86 \pm 0,13) \cdot 10^{-3}$ kg.m², moment setrvačnosti fyzického kyvadla jako $I_F = (64,03 \pm 0,13) \cdot 10^{-3}$ kg.m². Hodnota tíhového zrychlení pro takové fyzické kyvadlo je podle (7) $g_F = (9,86 \pm 0,04)$ m.s⁻² s relativní chybou $\delta = 0,5\%$.

Relativní systematická chyba vzniklá uvažováním matematického kyvadla je $\delta_{sys} = 0,11\%$

Ze vzorce (6) vypočteme vzdálenost těžiště fyzického kyvadla od závěsu jako $a = (100,8 \pm 0,1)$ cm, zatímco těžiště matematického kyvadla je od místa zavěšení vzdáleno $l = (101,2 \pm 0,1)$ cm.

Reverzní kyvadlo

Reverzní kyvadlo bylo realizováno jako pevná tyč se dvěma břity a posuvnou čočkou na jednom konci. Délka D mezi břity byla určena jako $D = (99,4 \pm 0,2)$ cm. Nejdříve byly naměřeny doby kmitu pro krajní polohy čočky $l_{p1} = (52,04 \pm 0,04)$ mm a $l_{p2} = 0$ mm, které jsou vyneseny v následující tabulce.

Tabulka 3: Naměřené hodnoty doby 10 kmitů pro krajní polohy čočky

$T_{1,n}^{10}$ [s], $l_p = (52,04 \pm 0,04)$ mm						$\overline{T_1^{10}}$ [s]	$\sigma_{T_{10}}^1$ [s]
Čočka dole	20,1254	20,1291	20,1176	20,1293	20,1236	20,125	0,004
Čočka nahore	20,6042	20,6074	20,5898	20,6002	20,5986	20,600	0,006
$T_{2,n}^{10}$ [s], $l_p = 0$ mm						$\overline{T_2^{10}}$ [s]	$\sigma_{T_{10}}^2$ [s]
Čočka dole	19,7229	19,7404	19,7240	19,7212	19,7121	19,724	0,009
Čočka nahore	18,3480	18,3382	18,3538	18,3400	18,3381	18,344	0,006

$T_{1,n}^{10}$ jsou časy 10 kmitů při $l_p = l_{p1}$, $T_{2,n}^{10}$ při $l_p = l_{p2}$, $\overline{T_i^{10}}$ příslušná střední hodnota a $\sigma_{T_{10}}^i$ příslušná směrodatná odchylka. Chybu měřícího zařízení lze zanedbat.

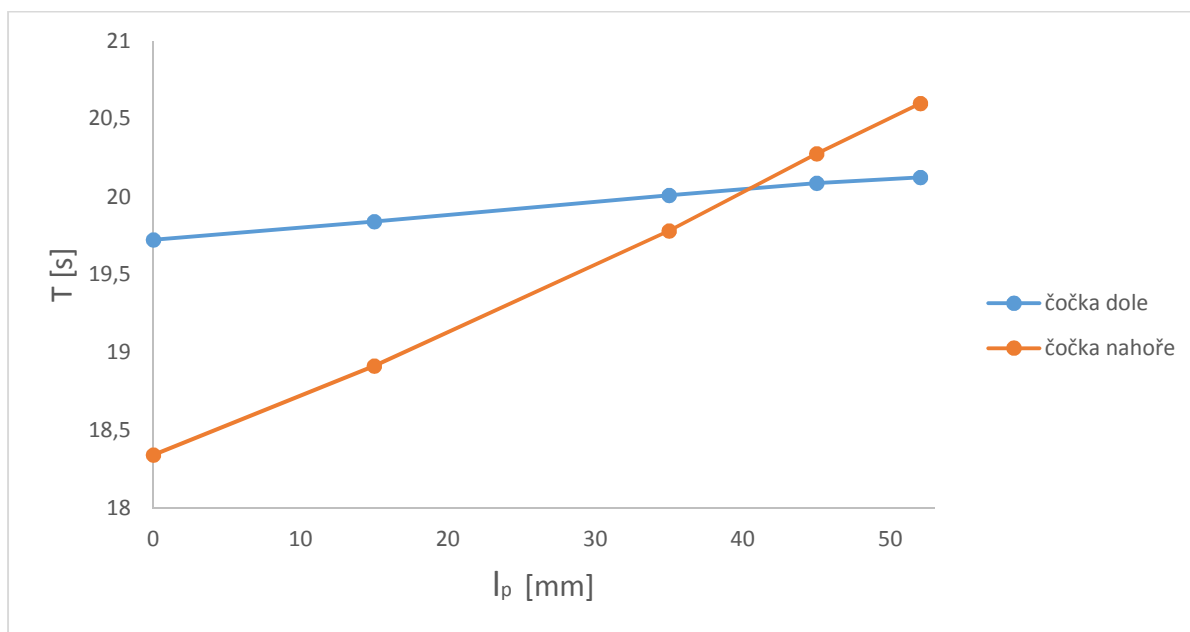
Následně byly vybrány další vzdálenosti l_p pro zpřesnění grafické interpolace, $l_{p3} = 1,50$ cm, $l_{p4} = 3,50$ cm, $l_{p5} = 4,50$ cm, tyto vzdálenosti byly nastaveny za pomoci posuvného měřítka s chybou vzniklou dotahováním upevňovacích matic odhadnutou jako $u_{lp3-5} = 0,05$ cm. Doby kmitů při těchto hodnotách jsou v následující tabulce.

Tabulka 4: Naměřené doby 10 kmitů pro další polohy čočky

$T_{3,n}^{10}$ [s], $l_p = 15,00$ mm						$\overline{T_3^{10}}$ [s]	$\sigma_{T_{10}}^3$ [s]
Čočka dole	19,8392	19,8415	19,8456	19,8391		19,841	0,003
Čočka nahore	18,9023	18,9243	18,9243	18,9054		18,91	0,01
$T_{4,n}^{10}$ [s], $l_p = 35,00$ mm						$\overline{T_4^{10}}$ [s]	$\sigma_{T_{10}}^4$ [s]
Čočka dole	20,0090	20,0093	20,0047	20,0121		20,009	0,003
Čočka nahore	19,7863	19,7819	19,7841	19,7743		19,782	0,005
$T_{5,n}^{10}$ [s], $l_p = 45,00$ mm						$\overline{T_5^{10}}$ [s]	$\sigma_{T_{10}}^5$ [s]
Čočka dole	20,0843	20,0833	20,0899	20,0889		20,087	0,003
Čočka nahore	20,2856	20,2750	20,2743	20,2706		20,276	0,006

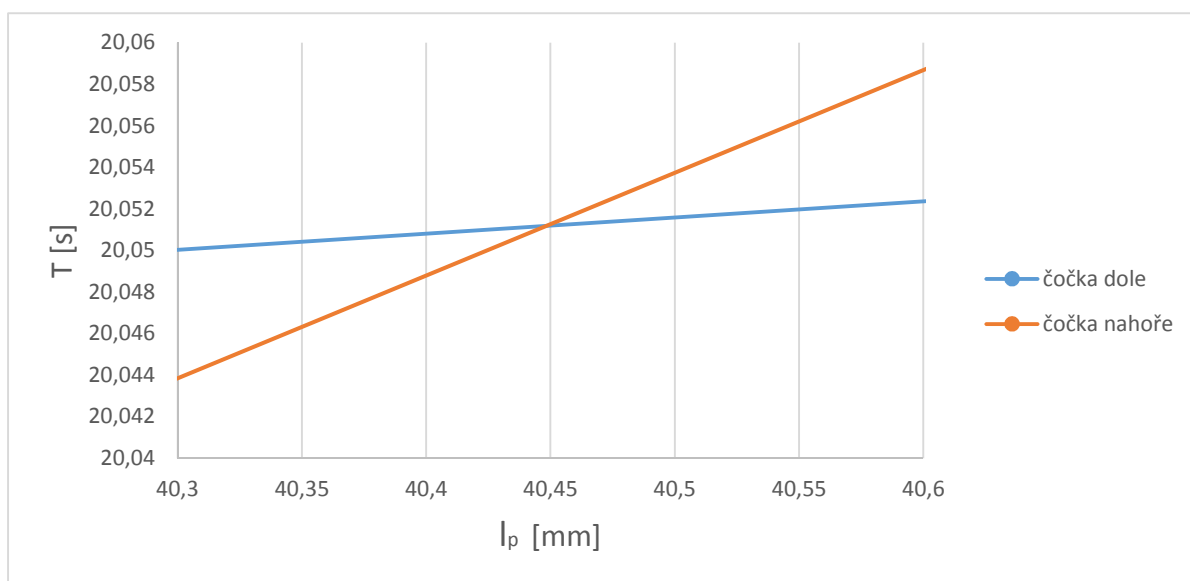
Veličiny v tabulce odpovídají veličinám v Tabulce 3, chyba měřícího přístroje je zanedbatelná.

Pomocí tabulkového procesoru jsme graficky interpolovali závislost veličiny $\overline{T_i^{10}}$ na l_p .



Graf 1: Grafická interpolace závislosti doby 10 kmitů na pozici čočky na kyvadle.

Přiblížením grafu dostáváme přibližnou hodnotu l_p pro kterou je splněna rovnost (9).



Graf 2: Přiblížení Grafu 1 v místě průniku závislosti doby kmitů na pozici čočky.

Z Grafu 2 jsem odhadl požadovanou $l_{pD} = 40,45$ mm. Pro tuto hodnotu byly nejdříve provedeny 4 měření pro obě pozice čočky, které odpovídaly v rámci chyby podmínce stejné doby kmitu kolem obou os, provedl jsem tedy dalších 6 měření pro obě pozice. V případě, že by tato 4 měření neodpovídala této podmínce, upravovala by se pozice čočky jemným pootočením šroubu. Měření bylo provedeno 10-krát pro obě polohy, měřila se doba 10 kmitů. Naměřené hodnoty jsou v následující tabulce.

Tabulka 5: Naměřené doby 10 kmitů pro $l_p = 40,45$ mm.

T_{nahore}^{10} [s]					$\overline{T_{nahore}^{10}}$	σ_{T10n}
20,0458	20,0436	20,0384	20,0460	20,0520	20,05	0,01
20,0478	20,0503	20,0667	20,0446	20,0182		
T_{dole}^{10} [s]					$\overline{T_{dole}^{10}}$	σ_{T10d}
20,0443	20,0412	20,0398	20,0324	20,0565	20,042	0,006
20,0409	20,0406	20,0412	20,0446	20,0364		

T_{nahore}^{10} je doba 10 kmitů kyvadla s čočkou nahoře, T_{dole}^{10} doba 10 kmitů s čočkou dole, $\overline{T_{nahore}^{10}}$ a $\overline{T_{dole}^{10}}$ jsou příslušné střední hodnoty, σ_{T10n} a σ_{T10d} příslušné směrodatné odchylky. Přístrojová chyba je oproti statistické zanedbatelná.

Z těchto hodnot byla určena doba 1 kmitu jako $T = (2,004 \pm 0,001)$ s. Z vzorce (8) jsem dopočetl hodnotu $g_R = (9,76 \pm 0,02)$ m.s⁻² s relativní chybou $\delta = 0,2\%$.

Diskuze

Použitím přesných měřících zařízení nepřesahuje relativní statistická chyba 0,5%, při měření čidlem ovládaným čítačem se odstranila reakční doba člověka, analytické váhy umožnily přesné zvážení závaží i provázku. Výsledné hodnoty tíhového zrychlení se přesto liší od tabulkové hodnoty $g = 9,81$ m.s⁻² [2], muselo tedy dojít k chybě systematické. Při experimentu nebyly měřeny výchylky kyvadla, mohlo dojít k větším výchylkám pro které aproximace použité k dopočítání tíhového zrychlení nejsou dostatečné. U matematického kyvadla také mohlo dojít k mírné změně délky provázku mezi 5. a 6. měřením, kdy bylo kyvadlo sundáno, odpovídalo by tomu mírné zvýšení doby kmitu pro posledních 5 měření. Pro reverzní kyvadlo může být příčina neshody s tabulkovou hodnotou nedostatečně přesné nastavení čočky do polohy kde by byla splněna rovnost (9). Další chybu do obou měření vnesl odpor vzduchu a tření v místě osy otáčení.

Porovnáním modelu matematického kyvadla a fyzického kyvadla zjistíme, že se hodnoty v rámci chyby téměř shodují, aproximace matematickým kyvadlem je tedy pro toto měření dostatečně přesná, a to i přes měřitelný rozdíl mezi vzdáleností těžiště matematického a fyzického kyvadla od osy otáčení.

Závěr

Metodou matematického kyvadla bylo naměřeno místní tíhové zrychlení $g_M = (9,88 \pm 0,02)$ m.s⁻², metodou reverzního kyvadla bylo naměřeno $g_R = (9,76 \pm 0,02)$ m.s⁻². Aproximace matematického kyvadla se ukázala jako dostatečná, oproti fyzickému kyvadlu se dopouštíme relativní systematické chyby $\delta_{sys} = 0,11\%$. Obě metody jsou ale zatíženy výraznější systematickou chybou.

Literatura

- [1] Studijní text k Fyzikálnímu praktiku I, úloha XXI, dostupné online z:
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_121.pdf
- [2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
- [3] J. English, Úvod do praktické fyziky. I, Zpracování výsledků měření. Matfyzpress, Praha 2006. ISBN 8086732932.