Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č. ....

Název: ....

Pracoval: .... stud. skup. .... dne ....

Odevzdal dne: ....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

1 Teoretická část

Určení momentu setrvačnosti [1]

K zjišťování momentu setrvačnosti J tuhých těles užíváme metodu torzních kmitů. Připevněním tělesa na torzní závěs (ocelový drát) v některém bodě osy, vůči níž moment měříme, to po vychýlení z rovnovážné polohy okolo ní kmitá s periodou:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_i}} \tag{1}$$

kde D_i je direkční moment vlákna. Pokud známe parametry závěsu, můžeme direkční moment určit přímo (viz. [2]). Druhá možnost je nechat torzně kmitat těleso o známém momentu setrvačnosti vůči vybrané ose J_0 a měřit periodu kmitu T_0, ty jsou svázané vztahem (1). Při zjišťování momentů J v námi vybraných tělesech pak při použití (1) platí:

$$J = \frac{T^2}{T_0^2} \cdot J_0 \tag{2}$$

My necháme takto kmitat homogenní válec, jehož moment setrvačnosti vůči ose shodné s osou válce je:

$$J_0 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{3}$$

kde M je hmotnost válce a R jeho poloměr.

Momenty setrvačnosti vůči různým osám v tělese [1]

Pro moment setrvačnosti vůči libovolné ose tělesa procházející jeho těžištěm platí:

$$J = v_x^2 \cdot J_x + v_y^2 \cdot J_y + v_z^2 \cdot J_z \tag{4}$$

kde J_x, J_y a J_z jsou hlavní momenty setrvačnosti tělesa a v_x, v_y a v_z jsou složky jednotkového vektoru $\vec{v}$ v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti. Jeho směr je ve směru osy, vůči které je určován moment setrvačnosti J.

Hlavní osy setrvačnosti homogenního kvádru (pozor, zkoumané těleso není kvádr, ale lze ho z tohoto hlediska za kvádr považovat) procházejí jeho těžištěm v jeho středu kolmo k jednotlivým stěnám. K určení momentu setrvačnosti vůči tělesové úhlopříčce je nutné nejrpve zjistit momenty setrvačnosti vůči těmto osám. Pokud osu x souřádné soustavy položíme rovnoběžnou hraně kvádru a, osu y hraně b a osu z hraně c, platí pro složky jednotkového vektoru ve směru úhlopříčky:

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad v_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{5}$$

Ve směru hlavních os a úhlopříčky jsou v kvádru vyříznuty závity pro upevnění torzního závěsu. Při měření postupujeme přímočaře: měříme dobu pěti torzních kmitů nejprve válce, poté vůči všem osám kvádru, přičemž jeden kmit rozpoznáme, když rovina určená osou a vybraným kolmým směrem v tělese projde dvakrát určitou předem danou pozicí, kterou zkoumáme vůči např. vertikální čáře na kreslené na přilehlé tabuli. Před samotným měřením ještě zjistíme hmotnost válce M vážením na laboratorních vahách a jeho poloměr R (resp. průměr D) pomocí pásového měřidla. Rozměry kvádru a, b a c měříme posuvným elektronickým měřidlem.

Měrné ověření *Steinerovy věty* [1]

K ověření *Steinerovy věty* slouží tyč s břity na jejích koncích a závitem v těžišti. Nejprve necháme tyč stejně jako v předchozích případech torzně kmitat kolem osy procházející těžištěm, abychom zjistili její moment setrvačnosti J_t vůči této ose. Pak ji necháme kývat jako fyzické kyvadlo kolem osy jednoho z břitů. Pro periodu kmitu fyzického kyvadla platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_k}{mgd}} \tag{6}$$

kde J_k je mom. setrv. vůči ose břitu (který lze z rovnice spočítat), m hmotnost tyče, d vzdálenost břitu od těžiště a g tíhové zrychlení.

Steinerova věta nám říká jak spočítat moment setrvačnosti J vůči ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm na základě znalosti momentu setrvačnosti J_t vůči této.

$$J = J_t + md^2 \tag{7}$$

kde m je opět hmotnost tělesa a d vzdálenost osy od těžiště. Změřením obou momentů nezávisle na rovnici (7) metodami výše popsanými, lze její platnost experimentálně ověřit.

Při měření J_t postupujeme stejně jako v případě zkoumaného kvádru. J_k určíme z doby dvaceti kmitů fyz. kyvadla. Před měření ještě zjistíme hmotnost tyče m vážením na lab. vahách, její délku l a vzdálenost břitu $d = l/2$ pomocí pásového měřidla.

Použité přístroje

Pásový metr K měření délky tyče l a průměru válce D. Chyba (Δl, ΔD) je asi 1 mm.

Laboratorní váhy K určení hmotnosti válce M a tyče m: $\Delta m = 0.1$ g.

Elektronické posuvné měřítko Ke změření rozměrů kvádru a, b a c. V přiložených dokumentech je uvedena chyba měření 0.03 mm.

Elektronické stopky K měření dob jednotlivých period (či jejich násobků). K chybě nejmenšího měřitelného dílu 0.01 s ještě přičtu odhadnutou chybu určení přesných okamžiků (viz. [2, str. 83-84]). $\Delta T = 0.21$ s.

2 Výsledky měření

Parametry měření a referenčního válce

Průměr válce	$D = (10.8 \pm 0.1)$ cm
Hmotnost válce	$M = (903.9 \pm 0.1)$ g
Teplota okolí	$t = (24 \pm 1)$ °C

Nejprve zjistíme periodu torzních kmitů homogenního válce válce T_0. V tabulce 1 jsou uvedeny doby pěti torzních kmitů a z jejich aritmetického průměru je určena perioda jednoho T_0. Chyba je spočtena jako chyba aritmetického průměru. M, D a T_0 dále používáme ve smyslu vztahů (2) a (3) k výpočtu ostatních momentů setrvačnosti.

č. měření	$5T_0$ [s]
1	55.15
2	54.94
3	54.98
4	54.98
5	55.11
6	55.15
7	55.00
8	55.08
T_0 [s]	11.01 ± 0.01

Tabulka 1: Doby pěti tor. kmitů homogenního válce kolem jeho osy $5T_0$ a T_0 spočtená z jejich arit. průměru.

č. měření	a [cm]	b [cm]	c [cm]
1	12.812	6.399	1.901
2	12.780	6.399	1.903
3	12.783	6.401	1.905
4	12.786	6.400	1.903
$\overline{x}$ [cm]	12.790 ± 0.002	6.340 ± 0.002	1.903 ± 0.002

Tabulka 2: Rozměry a, b, c kvádru a jejich aritmetické průměry.

Z hodnot a, b a c v tabulce 2 určíme podle (5) čtverce složek jednotkového vektoru ve směru tělesové úhlopříčky dále zkoumaného idealizovaného homogenního kvádru. Jejich chybu dostaneme standartně:

$$\Delta v_x^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x^2}{\partial a} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x^2}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x^2}{\partial c} \cdot \Delta b\right)^2} \tag{8}$$

Složky vektoru ve směru úhlopříčky

$$v_x^2 = 0.7859 \pm 0.0002$$
$$v_y^2 = 0.1967 \pm 0.0006$$
$$v_z^2 = 0.0174 \pm 0.0007$$

č. měření	$5T_x$ [s]	$5T_y$ [s]	$5T_z$ [s]
1	29.03	52.59	58.90
2	29.29	53.00	58.70
3	28.89	53.04	58.80
4	29.06	52.81	58.76
5	29.04	52.83	58.95
6	28.96	52.86	58.85
7	29.21	52.91	58.96
8	29.07	52.98	58.95
T [s]	5.81 ± 0.01	10.58 ± 0.01	11.77 ± 0.01

Tabulka 3: Doby pěti tor. kmitů kolem jednotlivých hlavních os tělesa a odpovídající periody T_x, T_y, T_z.

Ze změřených period kmitů kolem hlavních os T_x, T_y a T_z (viz. tabulka 3) spočteme podle (2), při dosazení (3) za J_0, příslušné momenty setrvačnosti vůči těmto osám, chyby počítáme obdobně jako v (8). Osy jsou voleny tak, jak je naznačeno v teoretické části, tedy x rovnoběžná s a atd.

Momenty setrvačnosti vůči hlavním osám

$$J_x = (367 \pm 7)\ \mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{kg.m}^2$$
$$J_y = (1216 \pm 23)\ \mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{kg.m}^2$$
$$J_z = (1507 \pm 28)\ \mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{kg.m}^2$$

Poté z (4) spočteme odpovídající moment setrvačnosti kolem osy tělesové úhlopříčky J_u:

$$J_{u(4)} = (554 \pm 11)\ \mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{kg.m}^2$$

Ten pak na závěr porovnáme s výsledkem spočteným na základě rovnice (2) vycházejícím z již známých parametrů měřeného válce. Doby pěti period torzních kmitů kolem osy úhlopříčky jsou v tabulce 4. (Chyby počítáme stále stejně jako v (8); chyby konečných použitých hodnot z tabulek jsou chyby aritmetických průměrů z předem odhadnuté chyby měření).

$$J_{u(T)} = (551 \pm 21)\ \mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{kg.m}^2$$

č. měření	$5T_u$ [s]
1	35.69
2	35.47
3	35.67
4	35.48
5	35.52
6	35.65
7	35.63
8	35.64
T_u [s]	7.12 ± 0.01

Tabulka 4: Doby pěti tor. kmitů kvádru kolem tělesové úhlopříčky a odpov. perioda.

Ověření Steinerovy věty

Tíhové zrychlení	$g = 9.81$ m.s^{-2}
Hmotnost tyče	$m = (281.6 \pm 0.1)$ g
Délka tyče mezi břity	$l = (31.5 \pm 0.1)$ cm
Vzdálenost břitu od těžiště (středu tyče)	$d = (15.75 \pm 0.05)$ cm

č. měření	$5T_t$ [s]	$20T_k$ [s]
1	79.83	18.64
2	79.90	18.70
3	79.80	18.67
4	79.71	18.60
5	79.90	18.61
6	79.79	18.71
7	79.79	18.62
8	80.08	18.67
T [s]	15.97 ± 0.01	0.933 ± 0.004

Tabulka 5: Naměřené doby pěti torzních kmitů kolem osy v těžišti a dvaceti kmitů tyče jako fyzického kyvadla; jim odpovídající periody T_t a T_k.

Nejprve obdobně jako v předchozích případech určíme podle (2) moment setrvačnosti tyče okolo osy procházející těžištěm v jejím středu. (V tabulce 5 jsou opět uvedeny doby pěti torzních kmitů a příslušná perioda T_t.):

$$J_t = (277 \pm 5) \text{ x}10^{-5} \text{ kg.m}^2$$

Poté zjišťujeme moment setrvačnosti vůči ose rovnoběžné, procházející závěsným břitem tyče J_k. Ten spočteme z rovnice (6) na základě naměřených period tyče jako fyzického kyvadla zaznamenaných v tabulce 5.

$$J_k = (958 \pm 8) \text{ x}10^{-5} \text{ kg.m}^2$$

Nakonec z rovnice (7) a naměřených hodnot m, d a J_k spočteme znovu moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm $J_{t(7)}$:

$$J_{t(7)} = (260 \pm 9) \text{ x}10^{-5} \text{ kg.m}^2$$

Všechny uvedené chyby jsou počítány analogicky (8) a chyba tíhového zrychlení nebyla uvažována.

3 Diskuse výsledků

Výsledek výpočtu momentu setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm z momentů vůči hlavním osám $J_{u(4)}$ dokonale odpovídá v rámci chyby experimentálně získané hodnotě J_u.

Steinerova věta byla v tomto smyslu ověřena alespoň řádově. Hodnoty J_t a $J_{t(7)}$ leží v intervalu tří std. odchylek a můžeme tedy vyloučit hrubou chybu. Nepřesnosti způsobilo několik faktorů: při měření T_t periody tor. kmitů tyče je torzní vlákno připevněno (stejně jako předtím k válci nebo kvádru) pomocí šroubku se závity, jehož hmotnost není uvažována. Ve srovnání s hmotnostmi válce a kvádru je tato zanedbatelná (navíc z kvádru vždy nejprve jeden sřoubek vyšroubujeme a na jeho místo připevníme ten s drátem) a měření torzních kmitů tím ani nebude ovlivněno, ale nemusí tomu tak být u tyče, specielně když šroubek chybí při měření kmitů fyzického kyvadla. Při započítání odhadnuté hmotnosti šroubku asi 20 g vychází moment setr. dopočtený podle *Steinerovy věty* $J_{t(7)}$ identický naměřené hodnotě J_t.

Další nepřesnosti při měření vznikají samozřejmě špatně odečitatelnou fází torzního kmitu či naopak nepřesně stanovenými kmity fyzického kyvadla. Ty jsou velice rychle tlumeny. Taktéž rozkyv torzního kyvadla do stran, který prakticky nelze eliminovat či případná nehomogenita jednotlivých těles a podobně (např. tyč zřejmě nebyla upevněna v místě těžiště, neboť se lehce nakláněla).

4 Závěr

Byly změřeny momenty setrvačnosti kvádru (idealizovaného) vůči hlavním osám setrvačnosti, měření ilustruje tabulka 3:
$J_x = (367 \pm 7)$ x10^{-6} kg.m^2; J$_y$ = (1216 ± 23) x10^{-6} kg.m^2; J$_z$ = (1507 ± 28) x10^{-6} kg.m^2

Pro čtverce složek jednotkového vektoru ve směru úhlopříčky byly stanoveny hodnoty (tabulka 2):
$v_x^2 = 0.7859 \pm 0.0002$; $v_y^2 = 0.1967 \pm 0.0006$; $v_z^2 = 0.0174 \pm 0.0007$

Podle teor. vztahu (4) byl určen moment setrvačnosti vůči ose úhlopříčky $J_{u(4)}$, který byl měrně ověřen ($J_{u(T)}$):
$J_{u(4)} = (554 \pm 11)$ x10^{-6} kg.m^2; J$_{u(T)} = (551 \pm 21)$ x10^{-6} kg.m^2

Měrně byla ověřena řádová platnost *Steinerovy věty*, což lze zpřesnit s korekcí na připevňovací šroubek, jak je naznačeno v diskusi.

5 Literatura

Použitá literatura

[1] Studijní text, XVII Studium otáčení tuhého tělesa, http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/

[2] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983