Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.XVII

Název: Studium otáčení tuhého tělesa

Pracovala: Jana Ringelová stud. skup. F/1-Y/15 dne 9.5.2005

Odevzdal dne:................................ vráceno: ....

Odevzdal dne:................................ vráceno: ....

Odevzdal dne:................................

Posuzoval:..................................... dne ....výsledek klasifikace................................

Připomínky:

Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

Teorie

Metoda torzních kmitů

K měření momentu setrvačnosti I vzhledem k ose procházející těžištěm lze užít metody torzních kmitů. Těleso upevníme v některém bodu osy, vzhledem ke které chceme stanovit moment setrvačnosti I, na torzní závěs. Těleso po vytočení z rovnovážné polohy začne torzně kmitat s periodou T danou výrazem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \tag{1}$$

kde D je direkční moment drátu. Necháme-li na stejném torzním vlákně kmitat těleso o známém momentu setrvačnosti I_T, potom pro dobu kmitu T_T tohoto tělesa platí obměna rovnice (2). Pro I dostaneme

$$I = \frac{T^2}{T_T^2} I_T. \tag{2}$$

Použijeme-li jako referenční těleso válec o známém průměru $2R$ a hmotnosti m, jehož moment setrvačnosti vůči ose rotační symetrie lze snadno spočítat dle vztahu

$$I_T = \frac{1}{2} m R^2, \tag{3}$$

dostaneme po dosazení (3) do (2) vztah pro hledaný moment setrvačnosti I

$$I = \frac{1}{2}\frac{T^2}{T_T^2} m R^2. \tag{4}$$

Momenty setrvačnosti vzhledem k různým osám procházejícím tělesem

Moment setrvačnosti I tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm souvisí s hlavními momenty setrvačnosti I_X, I_Y, I_Z pro těžiště vztahem

$$I = \nu_X^2 I_X + \nu_Y^2 I_Y + \nu_Z^2 I_Z, \tag{5}$$

kde ν_X, ν_Y, ν_Z jsou složky jednotkového vektoru ν, majícího směr osy otáčení vzhledem soustavě souřadné dané hlavními osami setrvačnosti. Pro danou obecnou osu ve zkoumaném tělese nabývají tyto složky hodnot:

$$\nu_X = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \nu_Y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \nu_Z = 0, \tag{6}$$

kde ν_X, ν_Y, ν_Z mají směr hran a, b ,c.

Steinerova věta

Ze znalosti momentu setrvačnosti I_0 vůči nějaké ose procházející těžištěm tělesa lze vypočítat moment setrvačnosti I vůči libovolné ose, která je s touto osou rovnoběžná, a to pomocí Steinerovy věty:

$$I_0 = I - m d^2, \tag{7}$$

kde d je vzdálenost těchto os. Steinerova věta byla ověřena pomocí tyče na konci opatřené břity a uprostřed závitem. Břity umožnily nechat tyč kývat kolem osy procházející jejím koncovým bodem jako fyzické kyvadlo. Moment setrvačnosti I vůči této ose je dán vztahem

$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2}, \tag{8}$$

kde T je doba kmitu, m hmotnost tyče a d vzdálenost těžiště od osy otáčení. Tento moment lze také spočítat ze Steinerovy věty (7) za předpokladu, že známe moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm (stanovíme metodou torzních kmitů).

Naměřené hodnoty

Parametry válce

průměr	$2R = (108,1 \pm 0,1)$mm
hmotnost	$m = (903,7 \pm 0,1)$g
moment setrvačnosti	$I_T = (1,32 \pm 0,01)\mathrm{g} \cdot \mathrm{m}^2$

Při výpočtu I_T jsem využila vztah (3). Při odhadu chyby jsem vycházela ze vztahu

$$s_{I_T} = I_T \left(\frac{s_m}{m} + 2\frac{s_R}{R} \right),$$

kde odchylky s_x příslušejí dané veličině x v indexu odchylky.

Rozměry zkoumaného tělesa

a[mm]	b[mm]	c[mm]
127.85	64.05	19.10
128.00	64.00	19.05
128.10	64.20	19.20
127.95	64.35	19.00
127.90	64.30	19.05

Tabulka 1: Rozměry zkoumaného tělesa. a je rozměr ve směru osy x, b ve směru y a c ve směru z.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Chyby jsem odhadla jako součet statistické chyby a chyby měřidla (dostanu tak maximální chybu).

$$a = (128,0 \pm 0,2)\mathrm{mm}, \quad b = (64,2 \pm 0,3)\mathrm{mm}, \quad c = (19,1 \pm 0,2)\mathrm{mm}.$$

Určení momentů setrvačnosti "kvádru bez rohů" vzhledem k hlavním osám setrvačnosti

Zpracováním naměřených hodnot z tabulky 2 jsem obdržela následující hodnoty period.

$$T_X = (5,55 \pm 0,04)\mathrm{s}, \quad T_Y = (10,16 \pm 0,05)\mathrm{s}, \quad T_Z = (11,35 \pm 0,06)\mathrm{s},$$

$$T = (6,73 \pm 0,04)\mathrm{s}, \quad T_T = (10,58 \pm 0,09)\mathrm{s}.$$

$10T_T$[s]	$10T_X$[s]	$10T_Y$[s]	$10T_Z$[s]	$10T$[s]
106.2	55.3	101.4	113.4	67.4
105.9	55.6	101.3	113.4	67.3
106.2	55.5	101.8	113.9	67.4
105.7	55.5	101.8	113.1	67.0
104.8	55.5	101.5	113.8	67.5

Tabulka 2: Periody torzních kmitů kolem příslušných os (název osy v indexu periody). T_T je perioda torzních kmitů vztažného tělesa – válce, T je perioda torzních kmitů kolem zadané osy procházející těžištěm, která není rovnoběžná ani s jednou z os.

Chyby period jsem získala sloučením reakční doby 0,2s, statistické chyby a chyby měřidla. Podle vztahu (4) jsem dopocitala momenty setrvacnosti.

$$I_X = (0,36 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad I_Y = (1,22 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad I_Z = (1,52 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2,$$

$$I = (0,53 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I = 3,8\%. \tag{9}$$

Chyby jsem určila ze vztahu

$$s_I = \left(2\frac{s_T}{T} + 2\frac{s_{T_T}}{T_T} + \frac{s_m}{m} + 2\frac{s_R}{R} \right).$$

Jednotkový vektor ν

Složky jednotkového vektoru ν jsem dopočítala ze vztahu (1).

$$\nu_X = (0,893 \pm 0,001), \quad \nu_Y = (0,448 \pm 0,002), \quad \nu_Z = 0.$$

Chyby jsem určila postupem popsaným v [2].

Moment setrvačnosti "kvádru bez rohů" vzhledem k zadané obecné ose rotace

Moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace spočtu podle vztahu (5).

$$I = (0,53 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I = 3,8\%$$

To zcela souhlasí (na dvě desetinná místa) s výsledkem (9)

Ověření Steinerovy věty

Naměřila jsem tyto parametry tyče:

$$d = (157 \pm 1)\mathrm{mm}, \quad m = (285,5 \pm 0,1)\mathrm{g}.$$

Periody fyzického kyvadla a periody torzních kmitů jsou uvedeny v tabulce 3. Dostáváme

kmity fyzického kyvadla	$T = (0,97 \pm 0,04)$s
torzní kmity	$T = (15,32 \pm 0,08)$s

kmity kolem břitů	torzní kmity
$10T$[s]	$10T$[s]
9.85	152.57
9.59	153.21
9.67	153.76
9.59	153.52
9.69	153.14

Tabulka 3: Periody fyzického kyvadla a periody torzních kmitů.

Chyby jsem opět odhadla složením chyby statistické, reakční doby a nepřesnosti stopek. Ze vztahu (8) dostáváme

$$I = (10,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Z toho podle (7)

$$I_0 = (3,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I_0 = 25,7\%.$$

Všechny chyby opět určeny standardně dle [2]. Porovnáním s válcem získáme ze vztahu (4) výsledek

$$I_0 = (2,77 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I_0 = 2,9\%.$$

Obě hodnoty se v rámci chyby měření shodují.

Diskuse

Moment setrvačnosti "kvádru bez rohů" vzhledem k zadané obecné ose rotace

Oběma metodami jsem dospěla ke shodnému výsledku se stejnou absolutní i relativní chybou s přesností na dvě desetinná místa. To znamená, že se obě hodnoty liší o méně než 1%. Na chybě určení momentu setrvačnosti se nejvíce podílela chyba period kmitů, způsobená zejména reakční dobou experimentátora. Při pomalém otáčení bylo poměrně těžké určit, kdy už bylo dosaženo maximální výchylky, protože nebylo zcela jasně vidět, kdy přesně se těleso zastavilo.

Ověření Steinerovy věty

Výsledky obou metod se opět shodují vrámci chyby měření. Hodnota I_0 určená metodou fyzického kyvadla je zatížena velkou relativní chybou, která je způsobena zejména nepřesností v měření periody kmitů, která se ve vztahu (8) vyskytuje ve druhé mocnině. Chyba je způsobena malou periodou kmitu, díky které se daleko více projeví reakční doba. Kdybych to měla měřit někdy příště, určitě bych namísto $10T$ měřila alespoň $20T$...

Obě podúlohy

Zvýšení přesnosti lze dosáhnout měřením většího počtu period najednou, nebo použitím přesnějších měřicích zařízení nezávislých na reakční době člověka (např. čítač používaný v úloze měření tíhového zrychlení).

Závěr

Metodou torzních kmitů byly změřeny hlavní momenty setrvačnosti kvádru

$$I_X = (0,36 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad I_Y = (1,22 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad I_Z = (1,52 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Použitím vztahu (5) byla vypočítána hodnota momentu setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné se stěnovou úhlopříčkou kvádru, z nějž těleso vzniklo,

$$I = (0,53 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I = 3,8\%$$

která byla ověřena měřením metodou torzních kmitů:

$$I = (0,53 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I = 3,8\%.$$

Oběma metodami jsem tedy dospěla ke shodnému výsledku se stejnou absolutní i relativní chybou s přesností na dvě desetinná místa. To znamená, že se obě hodnoty liší o méně než 1%. Měřením momentu setrvačnosti tyče metodou torzních kmitů a metodou fyzického kyvadla byla vrámci přesnosti experimentu ověřena Steinerova věta. Metodou torzních kmitů jsem dospěla k hodnotě

$$I_0 = (2,77 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I_0 = 2,9\%.$$

Metodou fyzického kyvadla jsem obdržela výsledek

$$I_0 = (3,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-3} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \delta I_0 = 25,7\%.$$

Výsledky obou metod se shodují vrámci chyby měření.

Reference

[1] Studijní text k Fyzikálnímu praktiku I, Úloha XII
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt117.htm

[2] J. Englich, prezentace k semináři Úvod do praktické fyziky
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.zip