

# 1 Pracovní úkoly

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

# 2 Teoretický úvod

## Měření metodou torzních kmitů

Doba torzního kmitu tělesa zavěšeného na torzním závěsu (např. ocelovém drátu) s momentem setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm  $I$  je daná výrazem [1]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (1)$$

kde  $D$  je direkční moment vlákla. Pro vyloučení direkčního momentu z měření můžeme změřit dobu kmitu  $T_{ref}$  referenčního tělesa se známým momentem setrvačnosti  $I_{ref}$ , z (1) pak dostaneme

$$I = \frac{T^2}{T_{ref}^2} I_{ref}. \quad (2)$$

Jako referenční těleso lze použít například válec, pro jehož moment setrvačnosti  $I_{ov}$  vůči jeho ose platí

$$I_{ov} = \frac{1}{2} MR^2, \quad (3)$$

kde  $M$  je hmotnost válce a  $R$  jeho poloměr. Z (2) a (3) dostáváme vzorec pro výpočet příslušných momentů setrvačnosti vůči osám procházejícím těžištěm za pomoci referenčního válce.

$$I = \frac{T^2}{2T_{ref}^2} MR^2. \quad (4)$$

## Momenty setrvačnosti vůči různým osám procházejícím tělesem

Obecně lze moment setrvačnosti rozložit do jednotlivých hlavních os. Moment setrvačnosti vůči obecné ose procházející těžištěm a určené jednotkovým vektorem se složkami  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$  je pak dán vztahem

$$I = v_x^2 I_x + v_y^2 I_y + v_z^2 I_z, \quad (5)$$

$I_x$ ,  $I_y$  a  $I_z$  představují momenty setrvačnosti vůči hlavním osám.

Pro homogenní kvádr máme hlavní osy procházející kolmo středy stěn a pro osu rovnoběžnou se stěnovou úhlopříčkou a procházející těžištěm tělesa určíme složky jednotkového vektoru jako

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (6)$$

$$v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (7)$$

$$v_z = 0. \quad (8)$$

### Steinerova věta

Steinerova věta nám dovoluje určit moment setrvačnosti  $I_o$  vzhledem k ose procházející těžištěm pomocí momentu setrvačnosti  $I_t$  vůči ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm.

$$I_o = I_t - md^2, \quad (9)$$

$m$  je hmotnost tuhého tělesa a  $d$  je vzdálenost os.

Doba kmitu fyzického kyvadla  $T_k$  je daná vzorcem

$$T_k = 2\pi \sqrt{\frac{I_k}{mgd_k}}, \quad (10)$$

$I_k$  je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení a  $d_k$  je vzdálenost těžiště od osy otáčení, vyjádřením  $I_K$  dostáváme

$$I_K = \frac{mgdT_k^2}{4\pi^2}. \quad (11)$$

## 3 Výsledky měření

### Podmínky v laboratoři

Podmínky v laboratoři mají na toto měření zanedbatelný vliv. Změny teploty v průběhu měření nemohly způsobit dostatečné změny vlastností (např. rozměrů, modulu pružnosti závěsu) měřených těles a použitých přístrojů, aby se v našem měření projevíly.

### Moment setrvačnosti kvádrů

Pomocí referenčního tělesa byl určován moment setrvačnosti kvádrů v hlavních osách setrvačnosti. Referenčním tělesem byl válec o hmotnosti  $M = (907,2 \pm 0,1)$  g naměřené na laboratorních vahách, chyba odpovídá chybě přístrojové. Poloměr  $R$  referenčního válce byl určen opakovaným měřením průměru  $2R$  na různých místech válce digitálním posuvným měřidlem s uvedenou instrumentální chybou 0,03mm.

Pro další výpočty byly také určeny rozměry tělesa  $a, b, c$  stejným měřicím přístrojem jako průměr referenčního válce.

Všechny naměřené hodnoty a jejich aritmetické průměry spolu s nejistotou jsou uvedeny v tabulce 1, uvedené chyby byly dopočteny jako odmocnina ze součtu kvadrátu výběrové směrodatné odchylky a kvadrátu instrumentální chyby [2].

Tabulka 1: Rozměry kvádrů a referenčního válce

měření	$a$ [mm]	$b$ [mm]	$c$ [mm]	$2R$ [mm]
1	127,94	63,97	18,98	107,89
2	127,87	64,01	18,97	107,93
3	127,86	63,95	18,94	107,92
4	127,78	64,05	18,93	107,93
5	127,79	63,95	18,95	107,91
6	127,79	64,03	18,98	107,9
7	127,99	63,98	18,98	107,88
8	127,8	63,97	18,97	107,9
9	127,78	63,97	18,95	107,85
10	127,77	63,91	18,99	107,86
průměr	$127,84 \pm 0,04$	$63,98 \pm 0,03$	$18,96 \pm 0,03$	$107,90 \pm 0,03$

Dále byly měřeny doby torzních kmitů při zavěšení v jednotlivých hlavních osách a v ose rovnoběžné se stěnovou úhlopříčkou a procházející těžištěm. Doba  $T_a$  odpovídá době kmitu podle osy rovnoběžné s hranou délky  $a$ ,  $T_b$  a  $T_c$  nápodobně.  $T_o$  je doba kmitu kolem osy rovnoběžné na stěnovou úhlopříčku,  $T_{ref}$  je doba kmitu referenčního válce kolem jeho osy. Naměřené hodnoty a jejich aritmetické průměry i s chybami jsou v tabulce 2. Přístrojová chyba je 0,01 s, ta je ale oproti chybě vzniklé lidskou reakční dobou zanedbatelná, každé měření považuji za zatížené chybou 0,3 s. Chyby uvedené v tabulce 2 byla dopočtena obdobně jako chyby v tabulce 1.

Tabulka 2: Naměřené periody kmitů

měření	$5 T_a$ [s]	$5 T_b$ [s]	$5 T_c$ [s]	$5 T_o$ [s]	$5 T_{ref}$ [s]
1	18,91	35,94	39,5	23,64	36,77
2	18,8	35,74	39,3	23,66	36,73
3	19,35	35,19	39,58	23,7	36,58
4	19,19	35,43	39,67	23,74	36,91
5	19,49	35,56	39,61	23,71	36,86
průměr	$19,1 \pm 0,3$	$35,6 \pm 0,3$	$39,5 \pm 0,3$	$23,7 \pm 0,3$	$36,8 \pm 0,3$

Přepočtením na jednu periodu dostáváme

$$T_a = (3,83 \pm 0,07) \text{ s,}$$

$$T_b = (7,11 \pm 0,07) \text{ s,}$$

$$T_c = (7,91 \pm 0,06) \text{ s,}$$

$$T_o = (4,74 \pm 0,06) \text{ s,}$$

$$T_{ref} = (7,35 \pm 0,06) \text{ s}$$

a poloměr  $R$  referenčního válce z průměru  $2R$  dostáváme

$$R = (53,95 \pm 0,02) \text{ mm.}$$

Pomocí vzorce (4) dopočteme momenty setrvačnosti vůči jednotlivým osám jako

$$I_a = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_b = (12,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_c = (15,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_o = (5,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Moment  $I_a$  přísluší ose rovnoběžné se stranou o délce  $a$ ,  $I_b$  a  $I_c$  obdobně,  $I_o$  je moment setrvačnosti kolem osy procházející těžištěm a rovnoběžné ke stěnové úhlopříčce stěny s rozměry  $a$  a  $b$ . Chyby byly určeny ze zákona přenosu chyb podle vzorce

$$\sigma_{I_a} = I_a \sqrt{\left(\frac{2\sigma_{T_a}}{T_a}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{T_{ref}}}{T_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2},$$

$\sigma_{I_b}$ ,  $\sigma_{I_c}$  a  $\sigma_{I_o}$  obdobně.

### Moment setrvačnosti vůči obecné ose

Z rozměrů měřeného tělesa v tabulce 1 byly podle vzorců (6) a (7) dopočteny složky jednotkového vektoru  $v_x$  a  $v_y$ , složka  $v_z$  je dána přímo z (8). Odchylky byly určeny pomocí zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{v_x} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_b^2},$$

$$\sigma_{v_y} = \sqrt{\left(\frac{ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \sigma_b^2}.$$

Výsledné hodnoty jsou

$$v_x = (0,8943 \pm 0,0002),$$

$$v_y = (0,4476 \pm 0,0002),$$

$$v_z = 0.$$

Moment setrvačnosti vůči ose dané jednotkovým vektorem nyní dopočteme pomocí vzorce (5), odchylka je určena pomocí zákona šíření chyb

$$\sigma_{I'_o} = \sqrt{(2v_x I_x \sigma_{v_x})^2 + (v_x^2 \sigma_{I_x})^2 + (2v_y I_y \sigma_{v_y})^2 + (v_y^2 \sigma_{I_y})^2}.$$

Výsledná hodnota je

$$I'_o = (5,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### Ověření Steinerovy věty

Tyč byla rozkmitána nejdříve kolem osy procházející těžištěm, perioda těchto kmitů je označena  $T_t$ , následně byla změřena doba kmitu  $T_{K1}$  a  $T_{K2}$  tyče jako fyzického kyvadla kolem dvou os rovnoběžných s osou procházející těžištěm. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 3, odchylka

jednotlivých měření je opět odhadnuta na 0,3 s, výsledná odchylka je určena stejně jako u period torzních kmitů kvádrů.

*Tabulka 3: Naměřené periody kmitu tyče*

měření	$10 T_{K1}$ [s]	$10 T_{K2}$ [s]	$5 T_t$ [s]
1	9,4	9,47	53,76
2	9,5	9,39	54,21
3	9,45	9,34	53,69
4	9,4	9,41	53,65
5	9,39	9,51	54,1
průměr	$9,4 \pm 0,3$	$9,4 \pm 0,3$	$53,9 \pm 0,3$

Dostáváme tedy

$$T_t = (10,78 \pm 0,06) \text{ s}$$

$$T_{K1} = (0,94 \pm 0,03) \text{ s}$$

$$T_{K2} = (0,94 \pm 0,03) \text{ s}$$

a ze vzorce (4) dopočítáme moment setrvačnosti kolem osy závěsu, tj. kolem osy u které předpokládáme, že prochází těžištěm, chyba byla určena pomocí stejného vzorce jako u předchozích výpočtů momentů setrvačnosti.

$$I_t = (2,83 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ověření Steinerovy věty provedeme vypočtením momentu setrvačnosti ze vzorce (11) pro periody  $T_{K1}$  a  $T_{K2}$ , dopočtením Hmotnost tyče byla změřena na analytických vahách

$$M_t = (281,3 \pm 0,1) \text{ g},$$

Vzdálenost závěsu pro který jsme naměřili periodu  $T_{K1}$  od těžiště jsem určil jako

$$d_{k1} = (155,91 \pm 0,03) \text{ mm},$$

a vzdálenost druhého závěsu od těžiště jako

$$d_{k2} = (157,61 \pm 0,03) \text{ mm}.$$

Tíhové zrychlení uvažujeme [3]  $g = (9,810 \pm 0,001) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a ze vzorce pak (11) dostáváme příslušné momenty setrvačnosti

$$I_{K1} = (9,7 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{K2} = (9,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

chyba byla určena ze zákona přenosu chyb vzorcem

$$\sigma_{I_{Kn}} = I_{Kn} \sqrt{\left(\frac{2\sigma_{T_{Kn}}}{T_{Kn}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{M_t}}{M_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{d_{kn}}}{d_{kn}}\right)^2}.$$

Aplikací Steinerovy věty (9) na tyto momenty dostáváme

$$I_{t1} = (2,9 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{t2} = (2,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

## 4 Diskuze

### Moment setrvačnost kvádrů

Momenty setrvačnosti kolem osy rovnoběžné na stěnovou úhlopříčku procházející středem byly určeny s relativní přesností  $\delta_I = 3,0\%$  a  $\delta_{I'} = 2,4\%$  a v rámci součtu odchylek se shodují. Při měření nebyl použitý kvádr, ale těleso se základnami osmiúhelníku. Těleso však bylo symetrické vůči tělesovým osám, které zároveň odpovídaly osám kvádrů. Použití tohoto tělesa a uvažování o kvádrů tedy do měření nevnese žádnou závažnou chybu.

Měření periody kmitů bylo zatíženo největší chybou, měřicí přístroj má sice přesnost v řádu  $10^{-2}$  s, lidský faktor ale do měření vnesl jak nutnost uvažovat reakční dobu, tak i nepřesné určení začátku prvního kmitu a konce periody u kmitu posledního. Vliv této chyby je výrazný také z důvodu výskytu druhé mocniny period v použitých vzorcích. Zpřesnění by šlo dosáhnout eliminací lidského faktoru z měření periody, např. využitím snezorů.

Při výpočtech se také předpokládalo, že těleso bylo zavěšeno přesně v tělesových osách, popř. že osa závěsu prochází přesně těžištěm a opravdu se jedná o osu odpovídající posunuté stěnové úhlopříčce. Tyto předpoklady nebyly ověřeny, výpočty tak mohou být zatíženy další chybou.

### Steinerova věta

Oba momenty setrvačnosti vypočtené pomocí Steinerovy věty odpovídají naměřené hodnotě v rámci odchylky. Největší chybou bylo opět zatíženo měření periody a to ze stejných důvodů jako u měření momentu setrvačnosti kvádrů, u měření kmitů fyzického kyvadla také docházelo k útlumu kmitů.

Při měření torzních kmitů tyče nebyla tyč po celou dobu vodorovně, ale mírně kmitala v ose kolmé na závěs, což mohlo způsobit mírnou odchylku v dopočteném momentu setrvačnosti. Tyč také pravděpodobně nebyla zavěšena v ose procházející těžištěm, což se ve výpočtech předpokládalo.

## 5 Závěr

Metodou torzních kmitů byly změřeny momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám a vzhledem k zadané obecné ose procházející těžištěm

$$I_a = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_b = (12,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_c = (15,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_o = (5,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Dále byl určen moment setrvačnosti vzhledem k zadané obecné ose za pomoci rozložení momentu setrvačnosti do jednotlivých složek odpovídajících hlavním osám

$$I'_o = (5,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Pro ověření Steinerovy věty byl metodou torzních kmitů změřen moment setrvačnosti tyče vůči ose procházející těžištěm

$$I_t = (2,83 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Metodou fyzického kyvadla byly následně určeny momenty setrvačnosti pro dvě osy rovnoběžné s osou procházející těžištěm a z těch byly pomocí Steinerovy věty spočteny momenty setrvačnosti ve středu,

$$I_{t1} = (2,9 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{t2} = (2,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Všechny výsledky se v rámci chyby shodují.

## 6 Použitá literatura

- [1] Studium otáčení tuhého tělesa. Studijní text k fyzikálnímu praktiku. Fyzikální Praktikum [online]. [cit. 2018-04-08]  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/media/zadani/texty/txt\\_117.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/media/zadani/texty/txt_117.pdf)
- [2] J. English, Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. MATFYZPRESS, Praha 2006, ISBN 80-86732-93-2.
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980