

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM 1

Úloha č.: XXX.

Název: Měření momentu setrvačnosti kola

Vypracoval: Mária Šoltésová stud. sk. F – 16 dne 27.04.2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval:dne výsledek klasifikace

Připomínky:

Pracovní úloha:

1. Změřte moment zotrvačnosti kola metodou kyvov.
2. Změřte moment zotrvačnosti kola metodou otáčení pro různé parametry α . Graficky znázorníte závislost $w = w(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α .
3. Určete moment třecích sil M_t a moment zotrvačnosti I_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.

4. Graficky znázorníte závislosť nekorigovaného momentu I^* na parametri α .

Teoretická časť:

Metóda kyvov

Pre meranie zotrvačnosti bolo uspôsobené koleso z bicykla, ktoré je upevnené v tak, že sa s malým trením môže pohybovať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej jeho ťažiskom. Na obvod kolesa upevníme guľové závažie s hmotnosťou m . Po vychýlení z rovnovážnej polohy koleso začne kmitať s periódou T . Pre malé výchylky a pri zanedbaní trenia môžeme pre moment zotrvačnosti I odvodiť vzťah

$$I = ml \left(\frac{gT^2}{4p^2} - l \right) \quad (1)$$

kde g je miestne tiažové zrýchlenie a l je vzdialenosť ťažiska závažia od osi otáčania.

Metóda otáčania

Na meranie momentu zotrvačnosti môžeme tiež použiť metódu otáčania. Pre tento účel je koleso je opatrené súosými valcami. Na valec polomeru r navinieme niť, na koniec nite pripevníme závažie s hmotnosťou m . Po uvoľnení závažia systém koná rovnomerne zrýchlený pohyb. Z pohybových rovníc pre tento pohyb môžeme odvodiť vzťah pre moment zotrvačnosti kolesa I^* pri zanedbanom trení:

$$I^* = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \text{ resp. } I^* = mr^2 \left(\frac{g}{re} - 1 \right) \quad (2)$$

kde a je zrýchlenie sústavy a ε je uhlové zrýchlenie.

V reálnom prípade je potrebné uvažovať moment trecích síl v osi kolesa M_T . Moment zotrvačnosti vypočítaný z pohybových rovníc zahrňujúcich trenie má tvar:

$$I_k = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{r}{a} M_T \text{ resp. } I_k = mr^2 \left(\frac{g}{re} - 1 \right) - \frac{1}{e} M_T \quad (3)$$

Vidíme, že platí vzťah

$$I^* = I_k + \alpha M_T \quad (4)$$

kde α je koeficient daný ako

$$\alpha = \frac{r}{a} \text{ resp. } \alpha = \frac{1}{e}. \quad (5)$$

Korigovaný moment zotrvačnosti teda môžeme určiť metódou najmenších štvorcov, ak určíme I^* pri rôznych parametroch α .

Uhlové zrýchlenie ε určíme pomocou počítača, ktorý počas experimentu meria závislosť uhlovej rýchlosti ω na čase t a uhlové zrýchlenie určí metódou najmenších štvorcov ako smernicu regresnej priamky závislosti

$$w = \varepsilon t \quad (6)$$

Použité pomôcky a prístroje:

zavesené koleso, tabuľa, laboratórne váhy, stopky, závažie 5 ks, olovené závažie, pevná niť s háčikom, počítač s programom *Kolo*

merací prístroj	najmenší dielik
posuvné meradlo	0,05 mm
elektronické analytické váhy	10^{-4} g
analytické váhy	10^{-3} g
elektronické stopky	0,01s

Postup:

Metóda kyvov

1. Odvážeme olovené závažie na analytických váhach.
2. Závažie pripevníme skrutkou na rám kolesa.
3. Pre určenie vzdialenosti ťažiska závažia od stredu kolesa l zmeriame posuvným meradlom 3 vzdialenosti: priemer osi kolesa d , vzdialenosť osi kolesa od rámu l_1 a vzdialenosť ťažiska závažia od rámu l_2 .
4. Vychýlime koleso z rovnovážnej polohy o malý uhol a zmeriame niekoľkokrát dobu 10 kmitov.

Metóda otáčania

1. Určíme hmotnosť závaží na elektronických analytických váhach, zmeriame taktiež hmotnosť nite s háčikom.
2. Zmeriame priemery všetkých štyroch kladiek posuvným meradlom.
3. Navinieme niť na kladku a spustíme meranie rýchlosti počítačom.
4. Meranie opakujeme pre štyri kladky a päť závaží, celkom dvadsať meraní.

Výsledky meraní:

Podmienky experimentu:

Experiment bol prevádzaný v normálnych laboratórnych podmienkach. Tlak ani teplota v miestnosti nemajú výrazný vplyv na priebeh experimentu, preto nepovažujem za potrebné ich uvádzať.

Metóda kyvov

Hmotnosť použitého oceľového závažia sme zmerali na analytických váhach ako $m = 148,591 \pm 0,001$ g, udávaná chyba má charakter prístrojovej chyby. Dobu kmitu T sme určili meraním doby 10 kmitov, toto meranie sme opakovali päťkrát pre rôzne uhlové výchylky, aby sme overili nezávislosť doby kmitu od počiatocnej výchylky. Reakčnú dobu sme odhadli ako 0,2s, chybu jedného meranie preto uvažujeme ako 0,02s, štatistickú chybu možno voči nej zanedbať. Namerané hodnoty doby kmitu sú v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 1: namerané hodnoty periód

uhol [°]	10	15	20	20	25	priemer \bar{T}	chyba σ_T
T^{10} [s]	24,17	24,33	24,09	24,11	24,20	24,28	0,2
T [s]	2,42	2,43	2,41	2,41	2,42	2,42	0,02

Posuvným meradlom sme zmerali priemer osi kolesa $d = (7,40 \pm 0,05)$ mm, vzdialenosť osi od rámu $l_1 = (12,00 \pm 0,05)$ mm a vzdialenosť ťažiska závažia od rámu $l_2 = (247,00 \pm 0,05)$ mm. Vzdialenosť ťažiska závažia od stredu kolesa je potom daná ako $l = \frac{d}{2} - l_1 + l_2$, jej hodnota je $l = (239 \pm 3)$ mm, chyba je odhadnutá z toho, že nepoznáme presne polohu ťažiska závažia. Tiažové zrýchlenie určíme podľa [2] ako $g = (9,81 \pm 0,01)$ m.s⁻². Podľa vzťahu (1) určíme moment zotrvačnosti kolesa, chybu sme uvažujeme ako chybu prenesenú z veličín vystupujúcich vo vzťahu (1):

$$I_1 = (4,32 \pm 0,06) 10^{-2} \text{ kg.m}^2 \text{ s relatívnou chybou 1,5\%}.$$

Metóda otáčania

Posuvným meradlom zmeriame priemery štyroch kladiek, namerané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 2: namerané hodnoty priemerov kladiek

kladka	1	2	3	4
priemer r_i [mm]	59,40	99,60	139,40	178,50

Chyba určenia priemeru je vo všetkých prípadoch $s_r = 0,05$ mm, chyba má charakter chyby meracieho zariadenia.

Na elektronických analytických váhach sme určili hmotnosti jednotlivých závaží a hmotnosť nite s háčikom s presnosťou na 10^{-4} g. Keďže sa niť počas experimentu odvíja a tým sa mení hmotnosť, nemá zmysel uvažovať namerané hmotnosti s takou veľkou presnosťou, lebo ako chyba merania sa prejaví hmotnosť nite s háčikom. Namerané hmotnosti sú v nasledujúcej tabuľke:

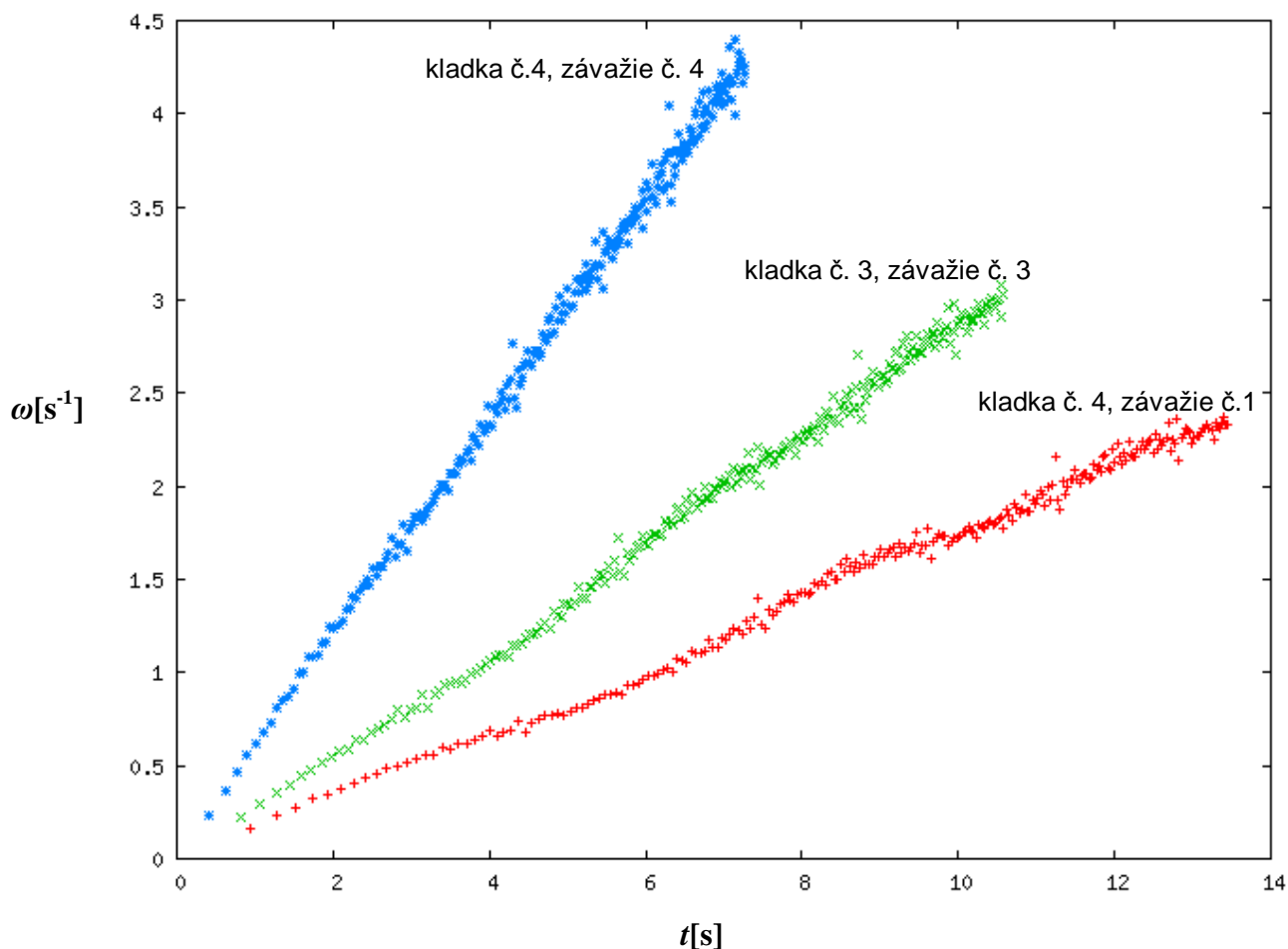
Tabuľka 3: namerané hmotnosti závaží

závažie	1	2	3	4	5	niť s háčikom
m_i [g]	9,98	14,96	19,91	29,93	49,66	0,39
σ_{m_i} [g]	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	

Nemá význam určovať odchýlku hmotnosti nite, pretože táto hodnota slúži len na určenie chyby hmotnosti závaží.

Pomocou počítačového programu sme zmerali uhlové zrýchlenie pre všetky kombinácie kladiek a závaží. Program túto hodnotu určí z merania závislosti $w = w(t)$. Táto závislosť pre tri kombinácie kladiek a závaží je vynesená v grafe 1.

Graf 1: závislosť $w = w(t)$ pre tri odlišné hodnoty parametru α



3. Moment trecích síl M_T a korigovaný moment zotrvačnosti I_k

Hodnoty uhlového zrýchlenia ε pre všetky kombinácie kladiek a závaží učené programom *Kolo*, hodnoty parametru α a nekorigované momenty zotrvačnosti I^* určené podľa vzťahu (2) sú uvedené v tabuľke 4.

Tabuľka 4: hodnoty parametrov α a nekorigovaných momentov zotrvačnosti I^*

kladka	závažie	ε [s ⁻²]	σ_ε [s ⁻²]	α [s ⁻²]	σ_α [s ⁻²]	$I^* \cdot 10^2$ [kg.m ²]	$\sigma_{I^*} \cdot 10^2$ [kg.m ²]
1	1	0,0550	0,0008	18,195	0,014	5,29	0,22
2	1	0,0964	0,0008	10,369	0,008	5,05	0,20
3	1	0,1463	0,0010	6,836	0,007	4,66	0,19
4	1	0,1790	0,0009	5,587	0,005	4,87	0,19
1	2	0,0819	0,0008	12,204	0,010	5,32	0,15
2	2	0,1443	0,0009	6,931	0,006	5,06	0,14
3	2	0,2184	0,0010	4,578	0,005	4,68	0,13
4	2	0,2808	0,0012	3,561	0,004	4,65	0,13
1	3	0,1158	0,0008	8,636	0,007	5,01	0,11
2	3	0,2066	0,0010	4,841	0,005	4,70	0,10
3	3	0,2948	0,0013	3,392	0,004	4,61	0,10
4	3	0,3818	0,0016	2,619	0,004	4,55	0,10
1	4	0,1811	0,0010	5,521	0,005	4,81	0,08

2	4	0,3213	0,0015	3,112	0,005	4,54	0,07
3	4	0,4499	0,0018	2,223	0,004	4,53	0,07
4	4	0,5852	0,0023	1,709	0,004	4,45	0,07
1	5	0,3164	0,0014	3,161	0,004	4,57	0,05
2	5	0,5422	0,0022	1,844	0,004	4,46	0,05
3	5	0,7678	0,0031	1,302	0,004	4,40	0,05
4	5	0,9878	0,0038	1,012	0,004	4,36	0,05

Údaje označené šedou farbou neboli použité pre spracovanie lineárnou regresiou. Ide hlavne o údaje pre malé hmotnosti závaží a malé polomery kladiek. Pri týchto hodnotách je meranie zaťažené príliš veľkou chybou, pretože sa prejavuje nevyváženie kola. Chyba momentu zotrvačnosti σ_{I^*} je určená ako spojenie chyby prenesenej z veličín vystupujúcich vo vzťahu (2) a štatistickej chyby určenej lineárnou regresiou.

Moment trecích síl M_T a korigovaný moment zotrvačnosti I_k určíme lineárnou regresiou podľa vzťahu (4) ako

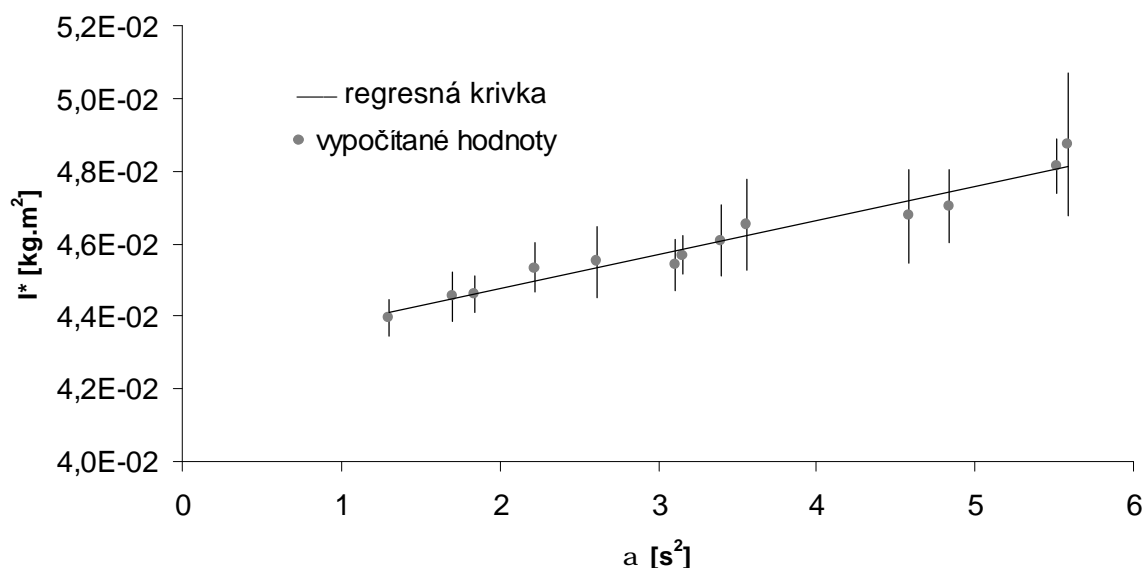
$$M_T = (9,6 \pm 0,6)10^{-4} \text{ N.m s relatívnou chybou } h_{M_T} = 6\%$$

$$I_k = (4,29 \pm 0,02)10^{-2} \text{ kg.m}^2 \text{ s relatívnou chybou } h_{I_k} = 0,5\% .$$

4. Závislosť nekorigovaného momentu zotrvačnosti I^* na parametri α

V grafe 2 je vynesená závislosť nekorigovaného momentu I^* na parametri α .

Graf 2: závislosť nekorigovaného momentu I^* na parametri α



Chybové úsečky udávajú celkovú chybu nekorigovaného momentu zotrvačnosti uvedenú v tabuľke 4. Hodnoty vyznačené v tabuľke šedou farbou neboli použité pre spracovanie a nie sú vynesené v grafe.

Diskusia:

Moment zotrvačnosti bol metódou kyvov určený s relatívnou chybou 1,5%, na tejto chybe sa podieľa hlavne nepresnosť určenia vzdialenosti l a doby kmitu T , keďže sa tam vyskytuje v druhej mocnine. Chybu určenia času sme sa snažili eliminovať meraním doby viacerých kmitov. Okrem štatistických chýb je toto meranie zaťažené systematickou chybou,

pretože zanedbávame trenie v osi kolesa. Napriek tomu sa moment zotrvačnosti I_l nameraný touto metódou v rámci chyby zhoduje s momentom zotrvačnosti I_k korigovaným vzhľadom k trecím silám. Z toho môžeme usudzovať, že trenie v osi kolesa má dostatočne hodnotu na to, aby významne ovplyvnilo dobu kmitu kolesa.

Pri určovaní korigovaného momentu zotrvačnosti metódou najmenších štvorcov sme vynechali hodnoty uhlového zrýchlenia pre malé kladky a malé závažia. Pri pomalom pohybe sa totiž najviac prejavuje fakt, že koleso nie je dokonale vyvážené, ako aj to, že moment trecích síl nepôsobí rovnomerne počas celého pohybu, na rýchlosť pohybu má takisto väčší vplyv prípadné nerovnomerné odvíjanie niti. Vylúčili sme aj hodnotu pre najväčšie závažie a najväčšiu kladku, pretože nameraná hodnota nezodpovedá lineárnemu priebehu funkcie.

Pri meraní momentu zotrvačnosti metódou otáčania a metódou kyvov sme dosiahli presnosť určenia pod 1,5%, čo môžeme považovať za dobrú presnosť. Hodnota momentu trecích síl je určená s presnosťou 6%, daná metóda preto pravdepodobne nie je najvhodnejšia na jej určovanie.

Záver:

Metódou kyvov sme zmerali moment zotrvačnosti kolesa ako $I_l = (4,32 \pm 0,06)10^{-2} \text{ kg.m}^2$ s relatívnou chybou 1,5%, metódou otáčania sme určili nekorigované momenty zotrvačnosti pre rôzne parametre α a z týchto hodnôt sme metódou najmenších štvorcov určili korigovaný moment zotrvačnosti ako $I_k = (4,29 \pm 0,02)10^{-2} \text{ kg.m}^2$ s relatívnou chybou $h_{I_k} = 0,5\%$ a moment trecích síl v osi kolesa ako $M_T = (9,6 \pm 0,6)10^{-4} \text{ N.m}$ s relatívnou chybou $h_{M_T} = 6\%$.

Literatúra:

- [1] D. Slavínská prom.fyz., CSc., I. Stulíková, CSc., P. Vostrý, CSc.: Fyzikální praktikum I., SPN Praha 1989
- [2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980