

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I

Úloha č.XIII

Název: Měření momentu setrvačnosti kola

Pracovala: Jana Ringelová stud. skup. F/1-Y/15 dne 31.3.2005

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: ..... vráceno: .....

Odevzdal dne: .....

Posuzoval: ..... dne ..... výsledek klasifikace .....

Připomínky:

### Pracovní úkoly

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru  $\alpha$ . Graficky znázorněte závislost  $\omega = \omega(t)$  pro tři odlišné hodnoty parametru  $\alpha$ .
3. Určete moment třecích sil  $M_t$  a moment setrvačnosti kola  $I_k$  korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu  $I^*$  na parametru  $\alpha$ .

# Teoretická část

## Metoda kyvů

Kolo je upevněno tak, že se může otáčet ve svislé rovině kolem své osy. Na obvodu kola je připevněn přívažek o hmotnosti  $m$ . Po vychýlení kola z rovnovážné polohy začne konat kmitavý pohyb s periodou  $T$ . Při zanedbání tření, rozměrů přívažku a při omezení se na malé výchylky platí pro moment setrvačnosti (podle [1]) vztah

$$I = ml \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right), \quad (1)$$

kde  $l$  je vzdálenost těžiště přívažku od osy otáčení. Ta se dá těžko určit přímo; proto ji spočtu z průměru největší kladky na ose kola  $2r_5$ , vzdálenosti  $y$  stěny této kladky od ráfku a průměru  $2\Delta$  kovového přívažku dle vztahu

$$l = r_5 + y - \Delta \quad (2)$$

## Metoda otáčení

Kolo bylo roztáčeno závažím o hmotnosti  $m_i$  zavěšeným na niti, které bylo namotáno na kladce o průměru  $r_j$  upevněné na ose kola. Kolo se roztáčí s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Na kolo působí třecí síly. Za předpokladu, že nezávisí na rychlosti a otočení kola, tak vyvolávají silový moment  $M_t$  a pro moment setrvačnosti kola podle [1] platí

$$I_k = mr^2 \left( \frac{g}{r\varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_t = I^* - \frac{1}{\varepsilon} M_t, \quad (3)$$

kde  $I^*$  je moment setrvačnosti nekorigovaný na moment třecích sil. Po zavedení parametru  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$  lze psát

$$I^* = I_k + \alpha M_t \quad (4)$$

Nekorigovaný moment setrvačnosti  $I^*$  se určí pro několik hodnot parametru  $\alpha$ . Odtud již lze snadno spočítat hodnoty  $I_k$  a  $M_t$  jako parametry lineární funkce, kterou dostaneme metodou nejmenších čtverců, popsanou v [2].

# Popis metody měření

## Metoda kyvů

1. Zvážíme přívažek na analytických vahách.
2. Vychýlíme kolo s přívažkem tak, aby výchylka nebyla větší než  $5^\circ$  (s využitím instalované stupnice).
3. Měříme dobu  $10T$  10ti kmitů elektronickými stopkami (desetkrát opakujeme).

## Metoda otáčení

1. Určíme hmotnosti závaží pomocí analytických vah. Určíme také hmotnost nití a kovového háčku. Hmotnost háčku připočteme do hmotnosti závaží  $m_i$ . Protože hmotnost nití, která se uplatňuje při otáčení kola se během měření spojitě mění, zvolíme zjednodušený model, kdy bereme hmotnost nití jako chybu hmotnosti  $m_i$ .
2. Nit navineme na kladku a na háček zavěsíme závaží.
3. Samotná měření rychlosti provede počítač připojený na přístroj snímající rychlost kola.
4. Měření opakujeme pro pět různých hmotností závaží a čtyři poloměry kladek.

## Podmínky experimentu

Pokus byl prováděn za normálních laboratorních podmínek. Vzhledem k povaze experimentu nedochází ani pro velký rozsah teploty a tlaku k výraznějšímu ovlivnění výsledků pokusu, které by se projevilo v rámci přesnosti měření.

## Použité měřicí přístroje a pomůcky

Přístroje uvedeny v tabulce 1.

<u>Měřicí přístroj</u>	<u>Nejmenší dílek</u>
Posuvné měřidlo	0.05 mm
Elektronické stopky	0.01 s
Elektronické analytické váhy	$10^{-4}$ g
Analytické váhy	0.01 g

Tabulka 1: Použité měřicí přístroje

## Pomůcky

Kulové olověné závaží (přivažek), sada pěti závaží, pevná nit s háčkem, upravené kolo bicyklu, PC se speciálním softwarem (program kolo).

## Naměřené hodnoty

### Metoda kyvů

Naměřeno:  $2r_5 = (187,55 \pm 0,1)\text{mm}$     $y = (154 \pm 1)\text{mm}$     $2\Delta = (23,7 \pm 0,3)\text{mm}$

V chybách těchto veličin je započítána jak chyba měřidla, tak chyba systematická. Potom podle (2)  $l = (235,9 \pm 0,7)\text{mm}$ , kde chyba je brána jako maximální chyba součtu (rozdílu) hodnot. Hmotnost přivažku změřená na analytických vahách:  $m = (148,87 \pm 0,01)\text{g}$   
Naměřené doby deseti kmitů jsou v tabulce 3. Uvážíme-li reakční dobu experimentátora asi 0,2 s, pak vychází  $T = (2,41 \pm 0,04)\text{s}$ .

č. měření	$2\Delta$ [mm]
1	23.65
2	23.55
3	23.4
4	23.85
5	24.2
$\overline{2\Delta} = 23.7\text{mm}$	$\sigma_{\Delta} = 0.3\text{mm}$

Tabulka 2: Měření délky  $2\Delta$ .

č.měření	$10T$ [s]	$T$ [s]
1	24.33	2.433
2	23.83	2.383
3	24.22	2.422
4	24.36	2.436
5	24.41	2.441
6	24.08	2.408
7	24.09	2.409
8	23.87	2.387
9	24.02	2.402
10	24	2.4
11	24.06	2.406
	$\overline{T} = 2.41\text{s}$	$\sigma_T = 0.02\text{s}$

Tabulka 3: Měření periody  $T$  kmitu kola s přívázkem.

Podle vztahu (1) určíme moment setrvačnosti. Při výpočtu chyby  $\sigma_I$  můžeme ve srovnání s ostatními chybami zanedbat nepřesnost, s jakou byla změřena hmotnost přívazku. Potom podle lineárního zákona hromadění chyb (vizte [3])

$$\sigma_I = ml \frac{gT^2}{4\pi^2} \left( 2 \frac{\sigma_T}{T} + \frac{\sigma_l}{l} \right) + 2ml\sigma_l \quad (5)$$

Výsledná hodnota momentu setrvačnosti kola je  $I = (42 \pm 1) \text{g} \cdot \text{m}^2$

## Metoda otáčení

Měření provedeno pro 5 různých hmotností závaží a 4 různé poloměry kladek. Hmotnosti závaží:

$$\begin{aligned} m_1 &= (10, 12 \pm 0, 27) \text{g} & m_2 &= (15, 10 \pm 0, 27) \text{g} \\ m_3 &= (20, 05 \pm 0, 27) \text{g} & m_4 &= (30, 07 \pm 0, 27) \text{g} \\ m_5 &= (49, 80 \pm 0, 27) \text{g} \end{aligned}$$

Do hmotnosti závaží  $m_i$  byla připočtena. Protože hmotnost niti, která se uplatňuje při otáčení kola se během měření spojitě mění, byl volen zjednodušený model, kdy bereme hmotnost niti jako chybu hmotnosti  $m_i$ . Chyby určení hmotnosti závaží způsobené omezenou přesností přístrojů lze vzhledem k hmotnosti provázku zanedbat.

Průměry kladek:

$$\begin{aligned} 2r_1 &= (59, 65 \pm 0, 1) \text{mm} & 2r_2 &= (99, 7 \pm 0, 1) \text{mm} \\ 2r_3 &= (138, 6 \pm 0, 2) \text{mm} & 2r_4 &= (179, 4 \pm 0, 2) \text{mm} \end{aligned}$$

Průměry kladek jsem měřila ve vertikálním a horizontálním směru a zprůměrovala. Největší chyby měření jsou u dvou největších kladek, protože bylo potřeba odečítat hloubku vnější hrany. Hodnoty úhlové rychlosti v závislosti na čase byly měřeny elektronickým snímačem. Pro tři vybrané parametry  $\alpha$  je tato závislost vynesena do grafu 1. Program kolo rovnou prováděl lineární regresi a počítal  $\varepsilon$  spolu s jeho chybou. Takto získané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 4. V ní jsou rovnou uvedeny parametry  $\alpha$  s příslušnými chybami a dále podle vztahu (4) vypočtené hodnoty  $I^*$ . Přitom bylo využito vztahů:

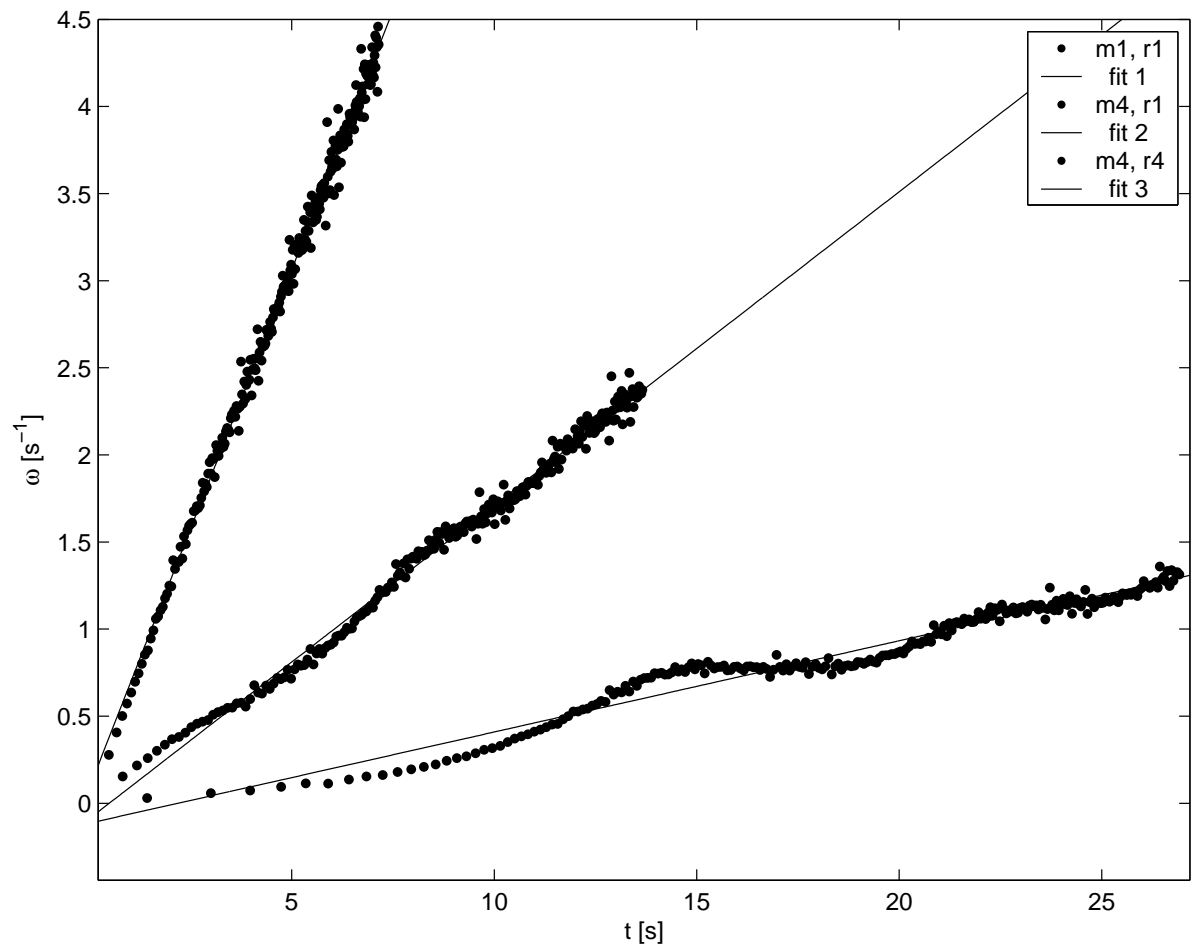
$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon^2}, \quad \sigma_{I^*} = \frac{m_i r_j g}{\varepsilon} \left( \frac{\sigma_{m_i}}{m_i} + \frac{\sigma_{r_j}}{r_j} + \frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + m_i r_j^2 \left( \frac{\sigma_{m_i}}{m_i} + 2 \frac{\sigma_{r_j}}{r_j} \right).$$

Z tabulky 4 a ze vztahu (4) získáme regresí hodnoty  $I_k$  a  $M_t$ . Lineární regrese je zdokumentována v grafu 2. Počítač stanovil z lineární regrese hodnoty

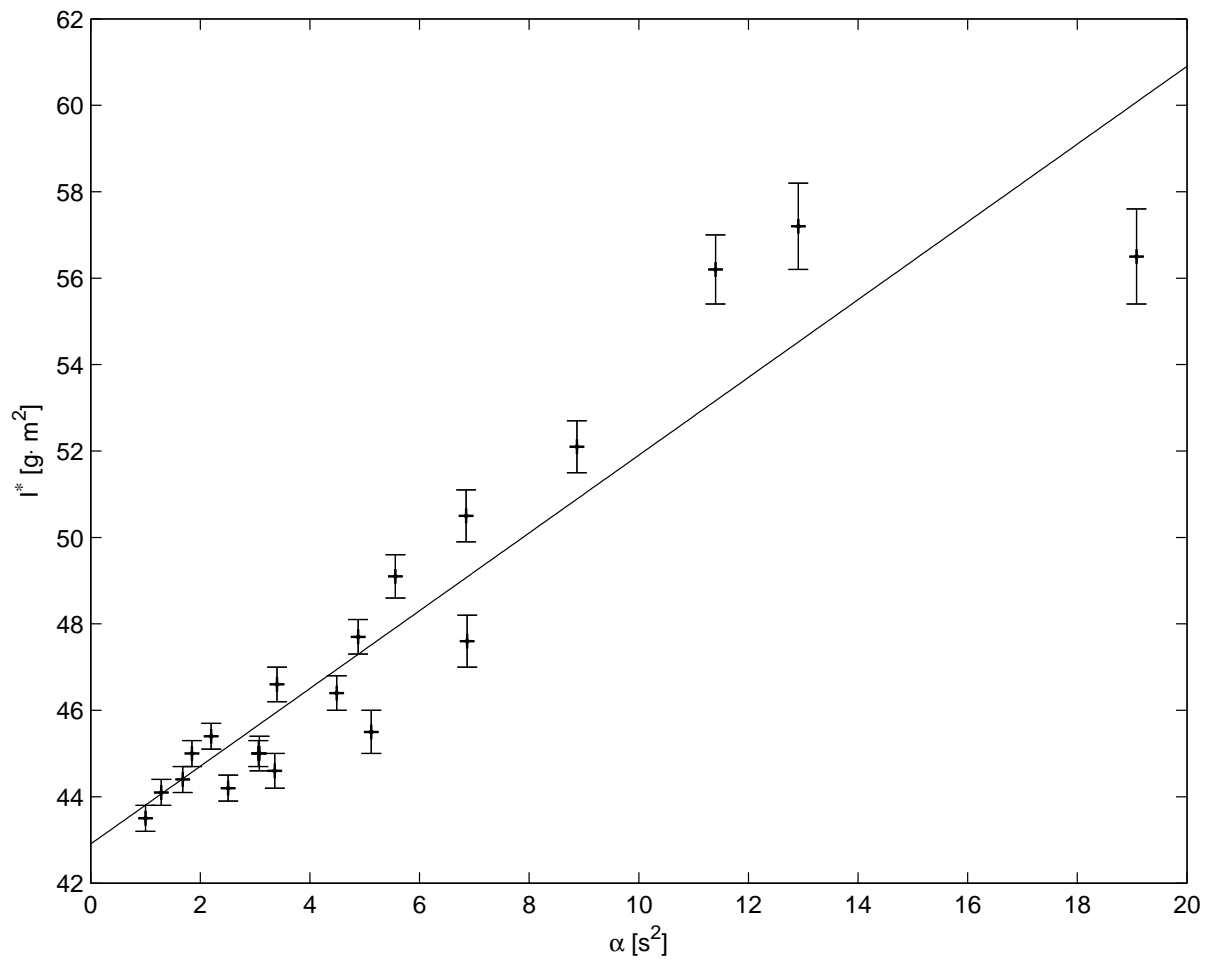
$$\begin{aligned} I_k &= (42, 9 \pm 1, 2) \text{g} \cdot \text{m}^2 \\ M_t &= (0, 90 \pm 0, 17) \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

## Diskuse

Při měření metodou kyvů má chyba měření času (reakční doba) a chyba určení  $l$  největší vliv na výsledek. Navíc neznáme přesnou polohu těžiště přívazku, protože má nepravidelný tvar. Chyba měření hmotnosti je zanedbatelná. Největší systematická chyba byla způsobena tím, že jsme přívazek považovali za hmotný bod.



Obrázek 1: Graf1: Závislost  $\omega$  na  $t$  pro tři vybrané hodnoty parametru  $\alpha$ . Body jsou proloženy přímkami určenými lineární regresí.



Obrázek 2: Graf 2: Závislost nekorigovaného momentu  $I^*$  na parametru  $\alpha$  (lineární regrese).

$2r_j$ [mm]	$m_i$ [g]	$\alpha$ [s <sup>2</sup> ]	$\sigma_\alpha$ [s <sup>2</sup> ]	$I^*$ [g · m <sup>2</sup> ]	$\sigma_{I^*}$ [g · m <sup>2</sup> ]
59,65	49,80	3,08	0,02	45,0	0,4
59,65	30,07	5,56	0,03	49,1	0,5
59,65	20,05	8,87	0,06	52,1	0,6
59,65	15,10	12,91	0,17	57,2	1,0
59,65	10,12	19,08	0,25	56,5	1,1
99,7	49,80	1,85	0,01	45,0	0,3
99,7	30,07	3,06	0,01	45,0	0,3
99,7	20,05	4,88	0,03	47,7	0,4
99,7	15,10	6,85	0,05	50,5	0,6
99,7	10,12	11,4	0,09	56,2	0,8
138,6	49,80	1,29	0,01	44,1	0,3
138,6	30,07	2,20	0,01	45,4	0,3
138,6	20,05	3,40	0,02	46,6	0,4
138,6	15,10	4,49	0,02	46,4	0,4
138,6	10,12	6,87	0,05	47,6	0,6
179,4	49,80	1,00	0,01	43,5	0,3
179,4	30,07	1,68	0,01	44,4	0,3
179,4	20,05	2,51	0,01	44,2	0,3
179,4	15,10	3,36	0,02	44,6	0,4
179,4	10,12	5,12	0,03	45,5	0,5

Tabulka 4: Naměřené hodnoty  $m_i$ ,  $2r_j$  a vypočtené  $\alpha$  a  $I^*$ .

Při měření metodou otáčení vneslo do výsledku největší chybu měření průměrů kladek a zanedbání hmotnosti vlákna. (Skutečnou hmotnost vlákna bylo třeba zahrnout od chyby určení hmotnosti závaží.)

Jak je patrné z grafu 1, je při malých hodnotách parametru  $\alpha$  závislost  $\omega(t)$  vlnitá. V těchto případech je totiž moment roztáčející kolo srovnatelný s momentem třecích sil – projevuje se zde nevyváženost kola vůči ose otáčení a závislost momentu třecích sil na poloze kola. Proto je chyba  $\sigma_\alpha$  největší pro velké  $\alpha$ .

## Závěr

Moment setrvačnosti kola určený metodou kyvů je

$$I = (42 \pm 1) \text{g} \cdot \text{m}^2.$$

Momenty setrvačnosti kola pro různé hodnoty parametru  $\alpha$  jsou uvedeny v tabulce 4, závislost  $I^*(\alpha)$  je v grafu 2. Grafické znázornění závislosti  $\omega(t)$  roztáčejícího se kola pro různé tři hodnoty  $\alpha$  jsou v grafu 1. Metodou otáčení byly získány výsledky

$$I_k = (42,9 \pm 1,2) \text{g} \cdot \text{m}^2,$$

$$M_t = (0,90 \pm 0,17) \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Metodou otáčení jsme získali hodnotu momentu setrvačnosti kola s větší přesností než metodou kyvů. Nicméně výsledky obou metod se v rámci chyb měření shodují.



## Reference

- [1] Studijní text k Fyzikálnímu praktiku I, Úloha XIV  
<http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt113.htm>
- [2] G. W. C. Kaye, T. H. Laby, Tables of Physical and Chemical Constants, Longman, London 1966
- [3] J. English, prezentace k semináři Úvod do praktické fyziky  
<http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.zip>