

XIII Měření momentu setrvačnosti kola

Pracovní úkol

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru α .
3. Graficky znázorněte závislost $\omega = \omega(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α .
4. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola J_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
5. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu J^* na parametru α , do grafu vynesete chybové úsečky.

Teorie

V této práci jsme se zabývali určením momentu setrvačnosti kola metodou kyvů a metodou otáčení.

Metoda kyvů

K obvodu kola z bicyklu upevníme závaží přibližně kulového tvaru a poté kolo vychýlíme z rovnovážné polohy. Kolo začne konat kmitavý pohyb, přičemž jeho moment setrvačnosti J lze vyjádřit vztahem^[1]

$$J = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right) \quad (1)$$

kde m označuje hmotnost závaží, l je vzdálenost těžiště závaží od osy otáčení, T je doba kmitu a g je místní tíhové zrychlení.

V této aproximaci zanedbáváme tření a omezujeme se jen na malé výchylky.

Metoda otáčení

Pro měření touto metodou je kolo vybaveno souosými válci. Na válec je navinuta nit, na jejímž konci je připevněno závaží. Když závaží uvolníme, kolo je uvedeno do zrychleného otáčivého pohybu.

Zanedbáme-li tření, lze moment setrvačnosti vyjádřit jako

$$J^* = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) \quad (2)$$

kde r je poloměr válce, m je hmotnost závaží a ε je úhlové zrychlení.

Vezmeme-li v úvahu tření, dostaneme vztah pro korigovaný moment setrvačnosti

$$J_k = mr^2 \left(\frac{g}{r \cdot \varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_T \quad (3)$$

kde M_T je moment třecí síly.

Dále označme

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \quad (4)$$

Tudíž je zřejmé, že korigovaný moment setrvačnosti J_k a nekorigovaný moment setrvačnosti J^* jsou spolu provázány vztahem

$$J^* = J_k + \alpha M_T \quad (5)$$

Můžeme tedy změřit J^* pro různé hodnoty parametru α a veličiny J_k a M_T najít jako koeficienty regresní přímky.

Výsledky měření

Metoda kyvů

Ke kolu jsme připevnili závaží o hmotnosti $m = (147,6 \pm 0,1)$ g a vzdálenost mezi jeho těžištěm a osou otáčení jsme pomocí pásma určili jako $l = (24,5 \pm 0,5)$ cm. Abychom mohli zvolit vhodnou výchylku, bylo kolo opatřeno také stupnicí.

Pro výchylku 10° jsme provedli 5 měření doby 10 period, výsledky jsou zpracovány v Tabulce 1:

Tabulka 1: Měření periody kmitu

Měření	T [s]
1	$2,45 \pm 0,02$
2	$2,44 \pm 0,02$
3	$2,42 \pm 0,02$
4	$2,43 \pm 0,02$
5	$2,42 \pm 0,02$

Z těchto dat jsme vypočítali průměrnou dobu jedné periody jako $T = (2,432 \pm 0,013)$ s.

Z takto naměřených dat už můžeme určit moment setrvačnosti kola dle rovnice (1) jako $J = (0,0443 \pm 0,0009)$ kg·m².

Místní tíhové zrychlení^[2] jsme přitom uvažovali $g = 9,81373$ m·s⁻².

Chyba momentu setrvačnosti σ_J byla vypočítána ze vztahu

$$\sigma_J^2 = \left(\frac{J}{m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mgT^2}{4\pi^2} - 2ml\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{mlgT}{2\pi^2}\right)^2 \sigma_T^2 \quad (6)$$

kde $\sigma_m = 0,1$ g je chyba určení hmotnosti závaží, $\sigma_l = 0,5$ cm je chyba určení vzdálenosti mezi osou otáčení a těžištěm závaží a $\sigma_T = 0,013$ s je chyba určení doby jednoho kmitu.

Metoda otáčení

Při tomto měření jsme na válec ve středu kola navinuli nit se závažím a uvedení kola do zrychleného otáčivého pohybu jsme pomocí počítačového programu *Kolo* zaznamenávali závislost úhlové rychlosti ω na čase t .

K dispozici jsme měli 5 závaží označených A – E. Jejich hmotnosti shrnuje Tabulka 2:

Tabulka 2: Hmotnosti závaží

Závaží	m [g]
A	11,9
B	16,9
C	24,7
D	34,3
E	49,1

Hmotnosti všech závaží byly změřeny s přesností $\pm 0,1$ g.

Dále jsme potřebovali změřit poloměry jednotlivých sousých válců označených čísly 60, 100, 140 a 180. Výsledky shrnuje Tabulka 3:

Tabulka 3: Poloměry sousých válců

Válec	r [cm]
60	2,98
100	4,98
140	6,97
180	8,97

Chyba měření poloměrů činí $\pm 0,03$ cm.

Úhlová rychlost byla měřena pomocí počítačového programu *Kolo*. K tomuto účelu mělo kolo na obvodu zářezy, které při otáčení procházely přes optickou závuru připojenou k počítači. Pomocí softwaru bylo možné kolo odbrzdit a začít měřit úhlovou rychlost v čase $t = 0$ s.

Za předpokladu, že závislost úhlové rychlosti na čase je lineární, můžeme určit velikost úhlového zrychlení ε jako směrnici regresní přímky závislosti $\omega = f(t)$.

Takto získané hodnoty ε jsou uvedeny v Tabulce 4:

Tabulka 4: Hodnoty úhlového zrychlení ε

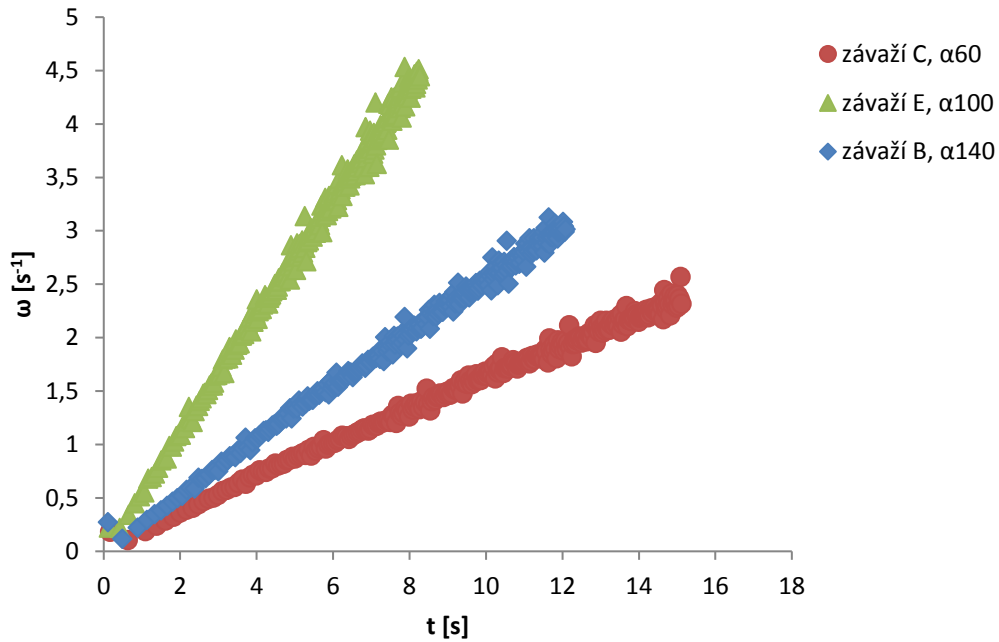
Závaží	ε_{60} [s ⁻²]	ε_{100} [s ⁻²]	ε_{140} [s ⁻²]	ε_{180} [s ⁻²]
A	0,0617 ± 0,0008	0,1201 ± 0,0005	0,1684 ± 0,0007	0,2222 ± 0,0010
B	0,0919 ± 0,0004	0,1724 ± 0,0007	0,2482 ± 0,0010	0,3326 ± 0,0014
C	0,1507 ± 0,0007	0,2593 ± 0,0011	0,3709 ± 0,0015	0,4892 ± 0,0020
D	0,2148 ± 0,0008	0,3704 ± 0,0015	0,5277 ± 0,0021	0,6785 ± 0,0033
E	0,3145 ± 0,0012	0,5367 ± 0,0020	0,7577 ± 0,0030	0,9843 ± 0,0047

Ze vztahu (4) dopočítáme hodnoty parametru α :

Tabulka 5: Hodnoty parametru α

Závaží	α_{60} [s ²]	α_{100} [s ²]	α_{140} [s ²]	α_{180} [s ²]
A	16,21 ± 0,08	8,33 ± 0,03	5,94 ± 0,02	4,50 ± 0,02
B	10,88 ± 0,05	5,80 ± 0,02	4,03 ± 0,01	3,01 ± 0,01
C	6,64 ± 0,02	3,86 ± 0,01	3,86 ± 0,01	2,04 ± 0,01
D	4,66 ± 0,01	2,70 ± 0,01	1,90 ± 0,01	1,47 ± 0,01
E	3,18 ± 0,01	1,86 ± 0,01	1,32 ± 0,01	1,02 ± 0,01

Graf 1 znázorňuje závislost $\omega = f(t)$ pro 3 různé parametry α :



Graf 1: Závislost $\omega = f(t)$ pro 3 různé parametry α

Dále podle vztahu (2) vypočítáme hodnoty J^* pro všechny kombinace válců a závaží.

Získané hodnoty jsou vypsány v Tabulce 6:

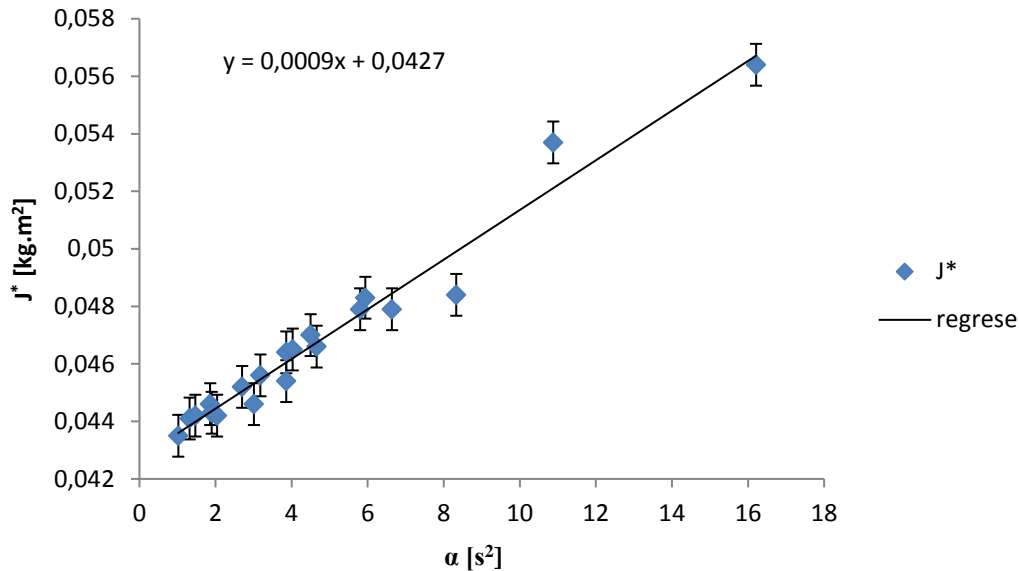
Tabulka 6: Hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti J^*

Závaží	$J_{60}^*[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$J_{100}^*[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$J_{140}^*[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$J_{180}^*[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
A	$0,0564 \pm 0,0008$	$0,0484 \pm 0,0005$	$0,0483 \pm 0,0003$	$0,0470 \pm 0,0003$
B	$0,0537 \pm 0,0008$	$0,0479 \pm 0,0004$	$0,0465 \pm 0,0003$	$0,0446 \pm 0,0003$
C	$0,0479 \pm 0,0007$	$0,0464 \pm 0,0004$	$0,0454 \pm 0,0003$	$0,0442 \pm 0,0003$
D	$0,0466 \pm 0,0007$	$0,0452 \pm 0,0004$	$0,0443 \pm 0,0003$	$0,0442 \pm 0,0003$
E	$0,0456 \pm 0,0006$	$0,0446 \pm 0,0004$	$0,0441 \pm 0,0003$	$0,0435 \pm 0,0003$

Chybu momentu setrvačnosti J^* lze vyjádřit vztahem:

$$\sigma_{J^*}^2 = (rg\alpha - r^2)^2 \sigma_m^2 + (mrg)^2 \sigma_\alpha^2 + (mra - 2mr)^2 \sigma_r^2 \quad (7)$$

Na základě vztahu (5) můžeme nyní vypočítat korigovaný moment setrvačnosti J_k a moment třecích sil M_T jako koeficienty regresní přímky závislosti $J^* = J_k + \alpha M_T$.



Graf 2: Závislost $J^* = J_k + \alpha M_T$

Z koeficientů regresní přímky získáváme hodnoty $J_k = (0,0427 \pm 0,0002) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a

$M_T = (0,0009 \pm 0,0001) \text{ N}\cdot\text{m}$.

Diskuze výsledků

Přesnost měření momentu setrvačnosti metodou kyvů mohlo nepříznivě ovlivnit několik faktorů. Nejvýznamnějším z nich je zřejmě tvar závaží, který nebyl přesně kulový, což mohlo způsobit nepřesné určení jeho těžiště. Do výsledku se mohlo promítnout také to, že moment setrvačnosti závaží nebyl ve výpočtu vůbec uvažován. Rovněž jsme neuvažovali působení třecích sil.

Při měření otáčecí metodou jsme k zpracování výsledků využívali program *Kolo*. Nevíme, s jakou přesností tento program skutečně pracuje, při vyhodnocování jsme předpokládali, že je jeho chyba zanedbatelná, což mohlo způsobit nepřesnost výsledku.

Dále platí, že hodnoty úhlové rychlosti pro kombinace malých válců a lehkých závaží je zatíženo větší chybou než kombinace středních válců a závaží.

Hmotnost nitě, na které bylo zavěšeno závaží, je vůči jeho hmotnosti skutečně zanedbatelná, tento faktor tedy přesnost neovlivní.

V protokolu nejsou uvedeny podmínky měření, jako jsou teplota, tlak nebo vlhkost vzduchu v laboratoři, jelikož na měření momentu setrvačnosti nemají vliv.

Nemáme k dispozici tabulkové hodnoty, se kterými bychom naměřené výsledky porovnali, nicméně lze předpokládat, že se nám podařilo dosáhnout velmi dobré přesnosti. Navíc hodnoty získané metodou kyvů a metodou otáčení jsou téměř shodné, dá se však očekávat, že výsledek získaný metodou otáčení lépe odpovídá realitě.

Závěr

Metodou kyvů jsme určili moment setrvačnosti kola jako $J = (0,0443 \pm 0,0009) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Metodou otáčení jsme získali moment setrvačnosti korigovaný na nulovou hodnotu tření $J_k = (0,0427 \pm 0,0002) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a hodnotu momentu třecích sil se nám podařilo určit jako $M_T = (0,0009 \pm 0,0001) \text{ N}\cdot\text{m}$.

Seznam použité literatury

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK. Studijní text k měření Moment setrvačnosti kola [cit. 21. 3. 2018]. URL: http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_113.pdf

[2] Wikipedie, otevřená encyklopedie. Tíhové zrychlení [cit. 21. 3. 2018]. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADhov%C3%A9_zrychlen%C3%AD