

1 Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost aparatury K .
2. Proveďte dynamickou zkoušku deformace v tlaku přiloženého vzorku.
3. Výsledek dynamické zkoušky v tlaku graficky znázorněte a určete mezní napětí $\sigma_{0,2}$ a σ_U .

2 Teoretická část

Pokud na pevné látky působíme tlakem, začnou se deformovat. Uvažujeme-li kovový váleček, na který působí síla F ve směru jeho osy, bude se jeho původní délka l_0 postupně zmenšovat.

Pro charakterizaci velikosti působícího tlaku se zavádí tzv. smluvní napětí [1] dané vztahem

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (1)$$

kde F je velikost působící síly ve směru osy válečku a S_0 je výchozí průřez vzorku. V našem případě platí

$$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \quad (2)$$

kde d_0 je původní průměr válečku.

Dále se zavádí relativní deformace ε_0 , která charakterizuje, jak moc se váleček zkrátil oproti své původní délce

$$\varepsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3)$$

kde l je okamžitá délka válečku.

Pro většinu kovů platí, že pro malé deformace je závislost smluvního napětí σ na velikosti relativního prodloužení $|\varepsilon_0|$ lineární, platí tzv. Hookův zákon. To platí až do určité mezní hodnoty, kterou označíme mez úměrnosti σ_U .

Do meze úměrnosti je deformace pružná, tj. po odstranění působící síly se rozměry vzorku vrátí do původních hodnot. Deformace může být pružná i po překročení meze úměrnosti až po jistou maximální hodnotu smluvního napětí, kterou označíme mez pružnosti σ_A . Po překročení meze pružnosti se vzorek deformuje plasticky.

Dále se zavádí mez 0,2 $\sigma_{0,2}$, která je rovna velikosti smluvního napětí, které odpovídá velikosti plastické deformace $|\varepsilon_{pl}| = 0,2\%$. Pokud naměříme závislost smluvního napětí na velikosti relativní deformace, můžeme určit mez 0,2 jako průsečík naměřené závislosti $\sigma(|\varepsilon|)$ a přímky která je rovnoběžná s lineární částí $\sigma(|\varepsilon|)$ a protíná osu x v bodě $|\varepsilon_0| = 0,2\%$. To platí za předpokladu, že velikost elastické deformace je i za mezí pružnosti daná Hookovým zákonem.

Vzorek budeme stlačovat pomocí elektromotorku. Elektromotorek otáčí kotoučem, na kterém stojí náš vzorek, s frekvencí $f = (0,60 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, přičemž se kotouč při každé otáčce zvedne o $D = 0,75 \text{ mm}$. Pro změnu délky aparatury a vzorku za dobu Δt platí

$$\Delta l = f D \Delta t \quad (4)$$

K určení působící síly použijeme tenzometrický odporový snímač, který při změně působící síly mění svůj odpor, což poté vyvolá změnu napětí na multimetru, který je k němu připojen. Při napájení tenzometru stejnosměrným stabilizovaným napětím 5,5 V platí pro působící sílu

$$F = \alpha U \quad (5)$$

kde U je výstupní napětí a $\alpha = (50,0 \pm 0,5) \text{ N/mV}$.

Při měření se mění jak délka vzorku tak délka samotné aparatury. Pokud předpokládáme, že je aparatura elastická, platí pro ni

$$F = K |\Delta l_A| \quad (6)$$

kde F je působící síla, K je konstantní tuhost aparatury a $|\Delta l_A|$ je délková změna aparatury.

Konstantu K můžeme změřit tak, že provedeme měření se vzorkem s vysokou hodnotou modulu pružnosti v tahu a potom můžeme celé Δl dané vztahem (4) přiřadit aparatuře.

Po změření tuhosti aparatury můžeme provést samotné měření daného vzorku. Pro $|\Delta l|$ ze vztahu (4) platí že je dána součtem změny délky aparatury a vzorku. Smluvní napětí působící na vzorek je pak dáno

$$\sigma = \frac{\alpha(U - U_0)}{S_0} \quad (7)$$

kde U_0 je počátek měření deformace. Dále pro relativní prodloužení vzorku platí

$$|\varepsilon_0| = \frac{fD(t - t_0)}{l_0} - \frac{\alpha(U - U_0)}{l_0 K} \quad (8)$$

kde t_0 opět odpovídá počátku deformace.

3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při teplotě $t = 23,9 \text{ }^\circ\text{C}$ a tlaku $p = 978,6 \text{ hPa}$.

3.1 Rozměry vzorku

Výšku válečku před deformací jsem určil posuvným měřidlem s přesností $0,05 \text{ mm}$ na $l_0 = (10,30 \pm 0,05) \text{ mm}$, hodnoty výšky se neměnily v závislosti na místě měření, takže jsem uvedl pouze jednu změřenou hodnotu.

Dále jsem mikrometrem s přesností $0,01 \text{ mm}$ změřil průměr válečku. Zde se již drobné odchylky vyskytovaly, a tak jsem měření provedl vícekrát, změřené hodnoty ukazuje tabulka 1.

Tabulka 1: Změřené hodnoty průměru válečku před deformací d_0

$\frac{d_0}{\text{mm}}$	7,33	7,34	7,33	7,34	7,32	7,33
-------------------------	------	------	------	------	------	------

Poté jsem určil průměr naměřených hodnot a chybu výsledku dle vztahu:

$$\sigma_{d_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{(n-1)n}} + \sigma_p^2 \quad (9)$$

kde chybu měřícího přístroje uvažuji rovnu $\sigma_p = 0,01 \text{ mm}$. Chyba mikrometru převyšovala nad statistickou odchylkou. Výsledný průměr je tedy roven $d_0 = (7,33 \pm 0,01) \text{ mm}$.

Plochu podstavy válečku poté mohu určit dle vztahu (2) a podle zákona šíření chyb určit chybu výsledku jako

$$\sigma_{S_0} = \frac{\pi d_0}{2} \sigma_{d_0} \quad (10)$$

Dostanu tedy, že plocha podstavy válečku je rovna $S_0 = (42,2 \pm 0,1) \text{ mm}^2$.

Použitý vzorek je převážně slitinou olova a cínu. Přesnější chemické složení vzorku uvádím v tabulce 2.

Tabulka 2: Chemické složení vzorku

	Sn	Cu	Mn	Fe	Pb
Wt%	48,0	0,6	0,4	0,5	50,5
σ	2,3	0,2	0,2	0,2	2,2

3.2 Tuhost aparatury

Dle definice by bylo vhodné určovat tuhost aparatury K ze vztahu $F = K\Delta l$ pomocí lineární regrese. Ovšem jelikož F i Δl jsou dopočítané hodnoty z naměřených hodnot, jsou zatíženy chybou. Jedním z předpokladů vzorců pro lineární regresi je, že chyba veličiny na ose x je zanedbatelně malá s chybou veličiny na ose y . [2] Předpoklad v tomto případě neplatí, a tak jsem se pro přesnější určení tuhosti aparatury rozhodl určit směrnicí v závislosti $\Delta U = A\Delta t$, kde předpokládám zanedbatelně malou chybu měření času. Tuhost poté dopočítám podle vztahu

$$K = \frac{A\alpha}{fD} \quad (11)$$

Pro měření napětí jsem použil multimetr NI 4065 s rozsahem $R_U = 100 \text{ mV}$. Při daném rozsahu je chyba měření 90 ppm z hodnoty a 35 ppm z rozsahu. Chyba při měření napětí je tedy

$$\sigma_{U_i} = 90 \cdot 10^{-6} \cdot U_i + 35 \cdot 10^{-6} \cdot R_U \quad (12)$$

Po dohodě s učitelem jsem určil lineární část z naměřených hodnot přibližně od $t_0 = 300,131 \text{ s}$ až do $900,052 \text{ s}$. Času t_0 odpovídá napětí $U_0 = (3,363 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ V}$. Chybu měření času považuji za zanedbatelně malou a chybu $\Delta U_i = U_i - U_0$ určím ze zákona šíření chyb

$$\sigma_{\Delta U_i} = \sqrt{\sigma_{U_i}^2 + \sigma_{U_0}^2} \quad (13)$$

Konstantu úměrnosti ze vztahu $\Delta U = A\Delta t$ poté můžu určit pomocí lineární regrese [2]

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta U_i \Delta t_i}{\sigma_{\Delta U_i}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i^2}{\sigma_{\Delta U_i}^2}} \quad (14)$$

Odhad chyby tohoto výsledku vypočítám podle vztahu

$$\sigma_A = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i^2}{\sigma_{\Delta U_i}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Hodnotu parametru A jsem určil na $A = (16\,032,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-9} \text{ Vs}^{-1}$. Výsledek lineární regrese ukazuje graf 1.

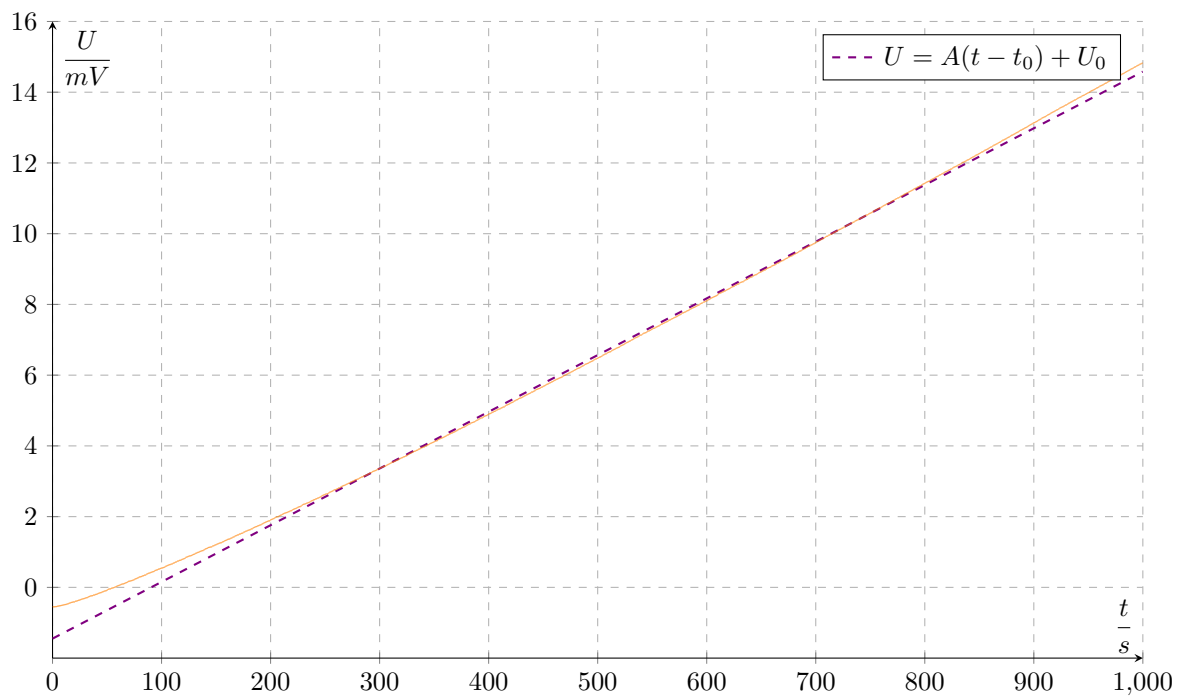
Tuhost aparatury poté mohu dopočítat podle rovnice (11) a nejistotu výsledku určit ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_K = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{fD}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{A}{fD}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{A\alpha}{Df^2}\right)^2 \sigma_f^2} \quad (16)$$

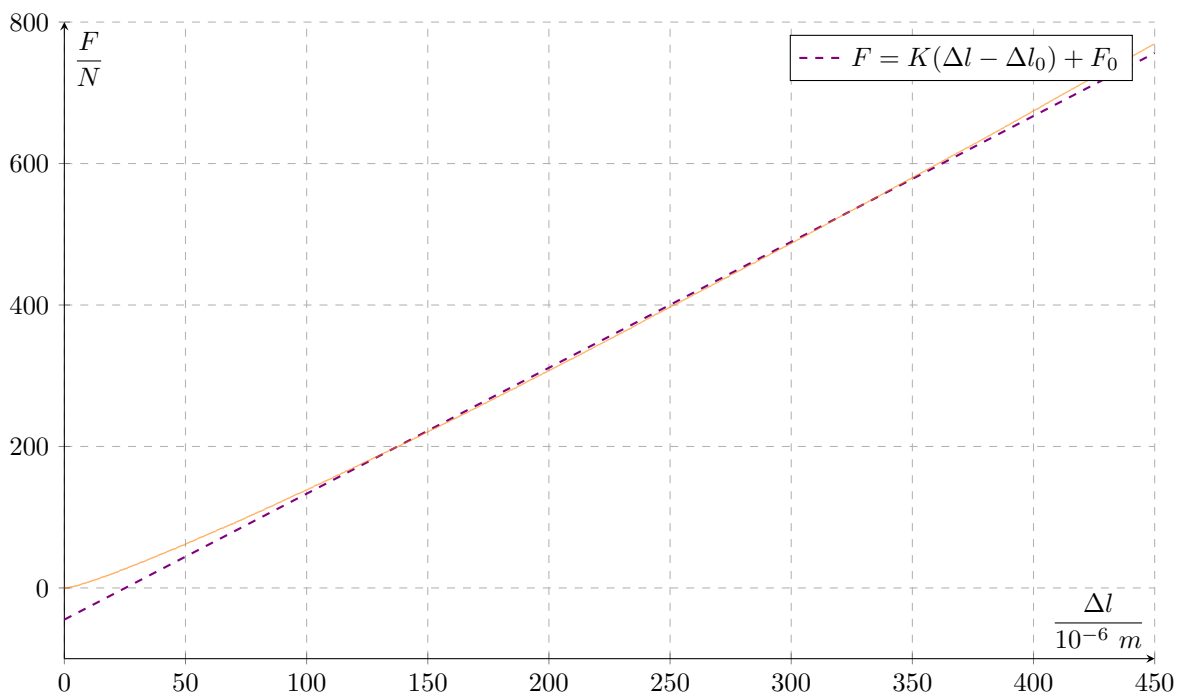
kde používám zadané hodnoty $\alpha = (50,0 \pm 0,5) \text{ N/mV}$, $f = (0,60 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ a $D = 0,75 \text{ mm}$.

Celkově jsem takto určil tuhost aparatury na $K = (1,78 \pm 0,03) \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$.

Graf 2 ukazuje hodnoty F vypočítané dle (5) v závislosti na Δl vypočítané dle (4). Lineární úsek zde začíná kolem prodloužení $\Delta l_0 = 135 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ a působící síle $F_0 = 196 \text{ N}$.



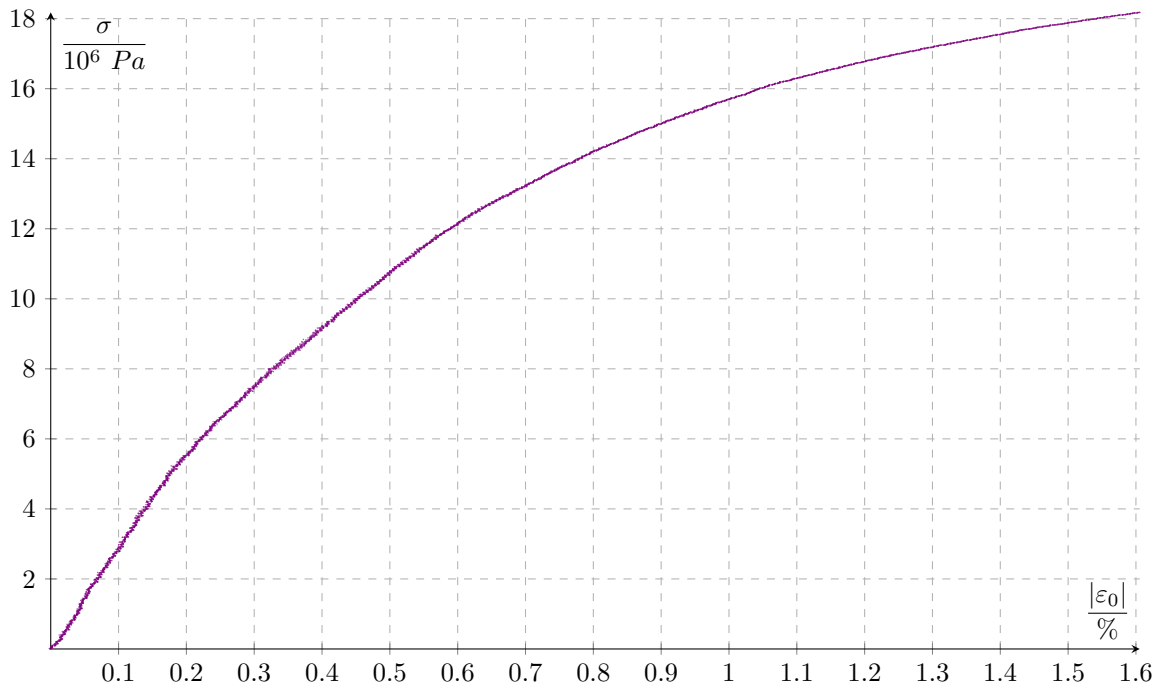
Graf 1: Lineární regrese počítaná přímo z naměřených hodnot od času 300 s až 900 s

Graf 2: Dopočítané hodnoty F v závislosti na Δl

3.3 Určení mezí σ_U a $\sigma_{0,2}$

Při určování mezí σ_U a $\sigma_{0,2}$ je třeba správně určit počátek deformace z naměřených hodnot, neboť program změřil několik hodnot i před správným dosednutím aparatury. Já jsem počátek odhadl na $t_0 = 150,13$ s, čemuž odpovídá hodnota napětí $U_0 = -0,334$ mV. Z naměřených hodnot je to 621. hodnota.

Z naměřených hodnot t_i a U_i jsem poté určil závislost $\sigma(|\varepsilon_0|)$. Smluvní napětí působící na vzorek σ_i počítám podle vztahu (7) a velikost jeho relativní deformace $|\varepsilon_0|$ dle vztahu (8). Naměřené hodnoty ukazuje graf 3.



Graf 3: Změřená závislost $\sigma(|\varepsilon_0|)$

Z grafu jsem nejprve zhruba odhadl, že lineární závislost končí někde mezi 0,12% až 0,19%. Jelikož bylo obtížné zvolit jeden bod, kde končí lineární část, postupoval jsem následovně.

Body od $|\varepsilon_0| = 0\%$ až do $|\varepsilon_{0i}|$, kde $|\varepsilon_{0i}|$ je z rozsahu 0,12% až 0,19%, jsem proložil přímkou pomocí základní lineární regrese $\sigma = B|\varepsilon_0| + C$, kde parametry regrese určuji podle vztahů [2]

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (17)$$

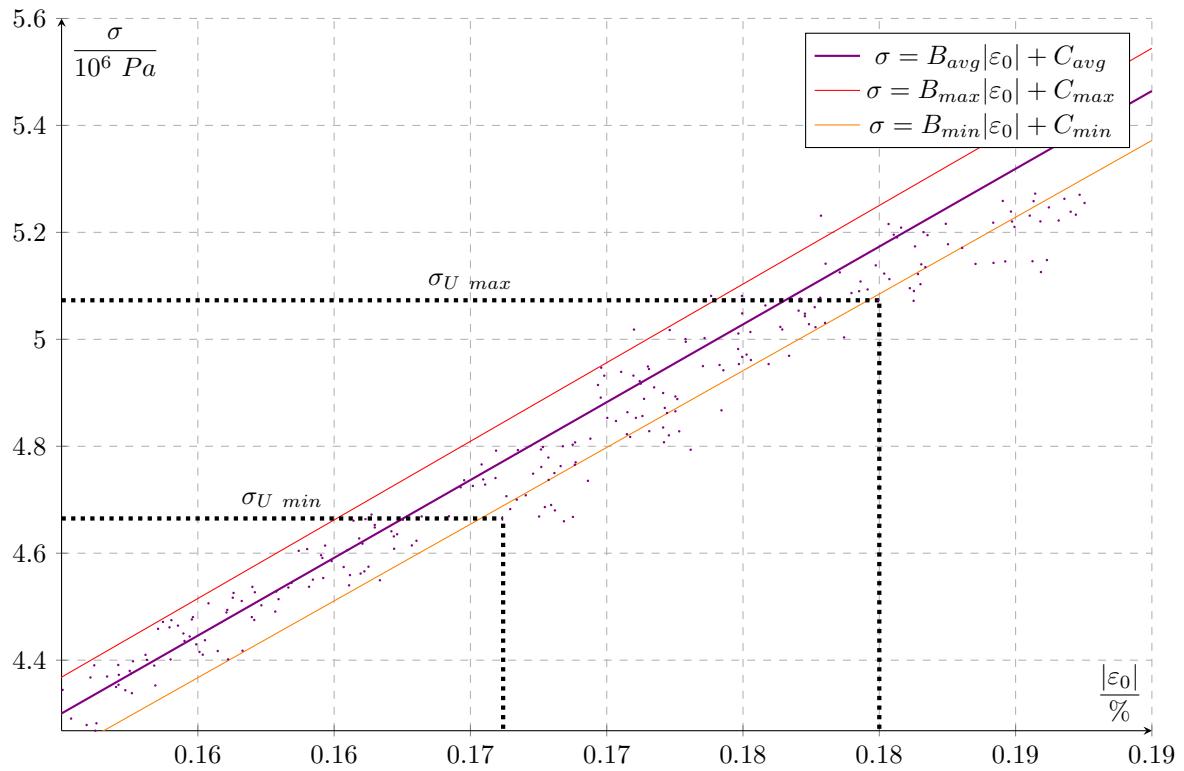
$$C = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (18)$$

Dostal jsem hodnoty B a C pro několik set přímk. Výsledky shrnuje tabulka 3.

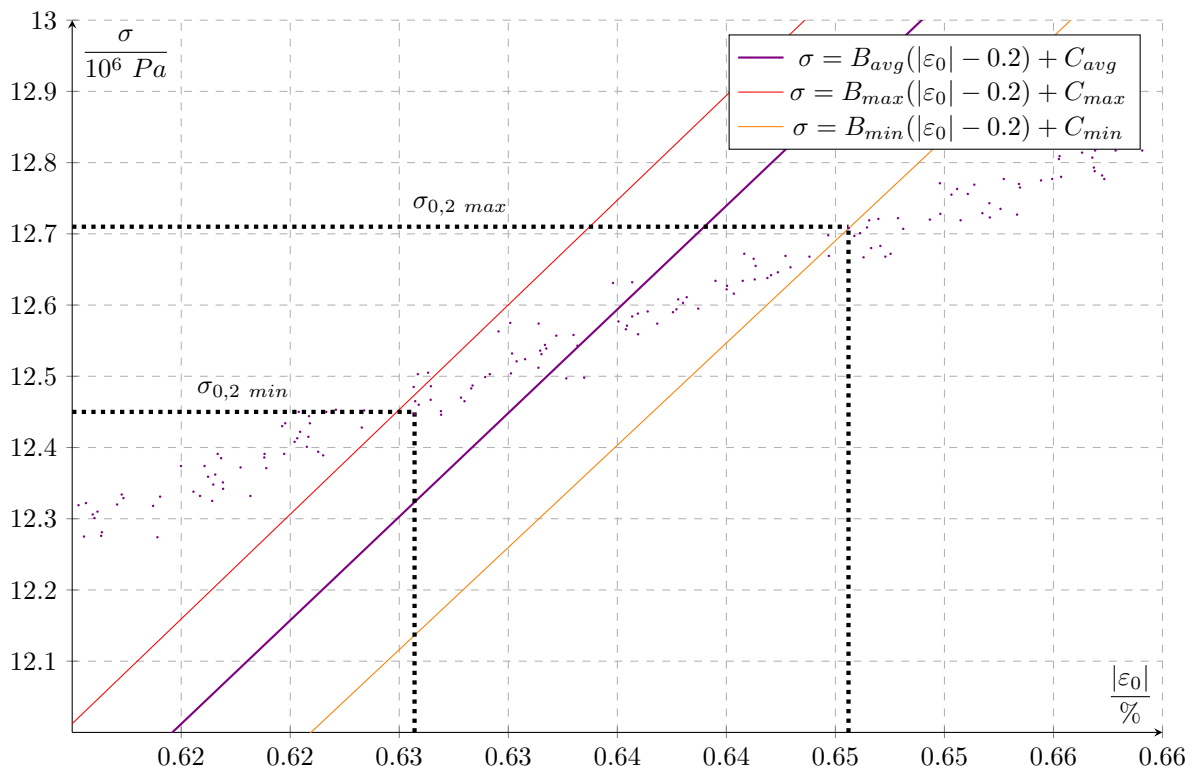
Tabulka 3: Vypočítané hodnoty B a C

	$\frac{B}{10^9 Pa}$	$\frac{C}{10^4 Pa}$
minimum	2,87	-8,12
průměr	2,91	-6,46
maximum	2,94	-4,17

Hodnoty σ_U jsem poté odečetl z grafu 4 a hodnotu $\sigma_{0,2}$ z grafu 5.



Graf 4: Grafické určení hodnoty σ_U



Graf 5: Grafické určení hodnoty $\sigma_{0,2}$

Jelikož celá deformační křivka tvoří v podstatě jedno měření veličin σ_U , resp $\sigma_{0,2}$, nelze určit chybu měření jako směrodatnou odchylku z nějakého souboru dat. Já jsem se pro přibližné určení chyby měření rozhodl použít dříve určené přímky lineární regrese.

Pro určení hodnoty σ_U jsem určil minimální možnou hodnotu, které může nabývat, na $\sigma_{U,min} = 4,665 \cdot 10^6 Pa$ a maximální na $\sigma_{U,max} = 5,073 \cdot 10^6 Pa$. Hodnotu σ_U jsem poté určil jako střed tohoto intervalu a pro odhad maximální chyby jednoho měření jsem použil rovnici

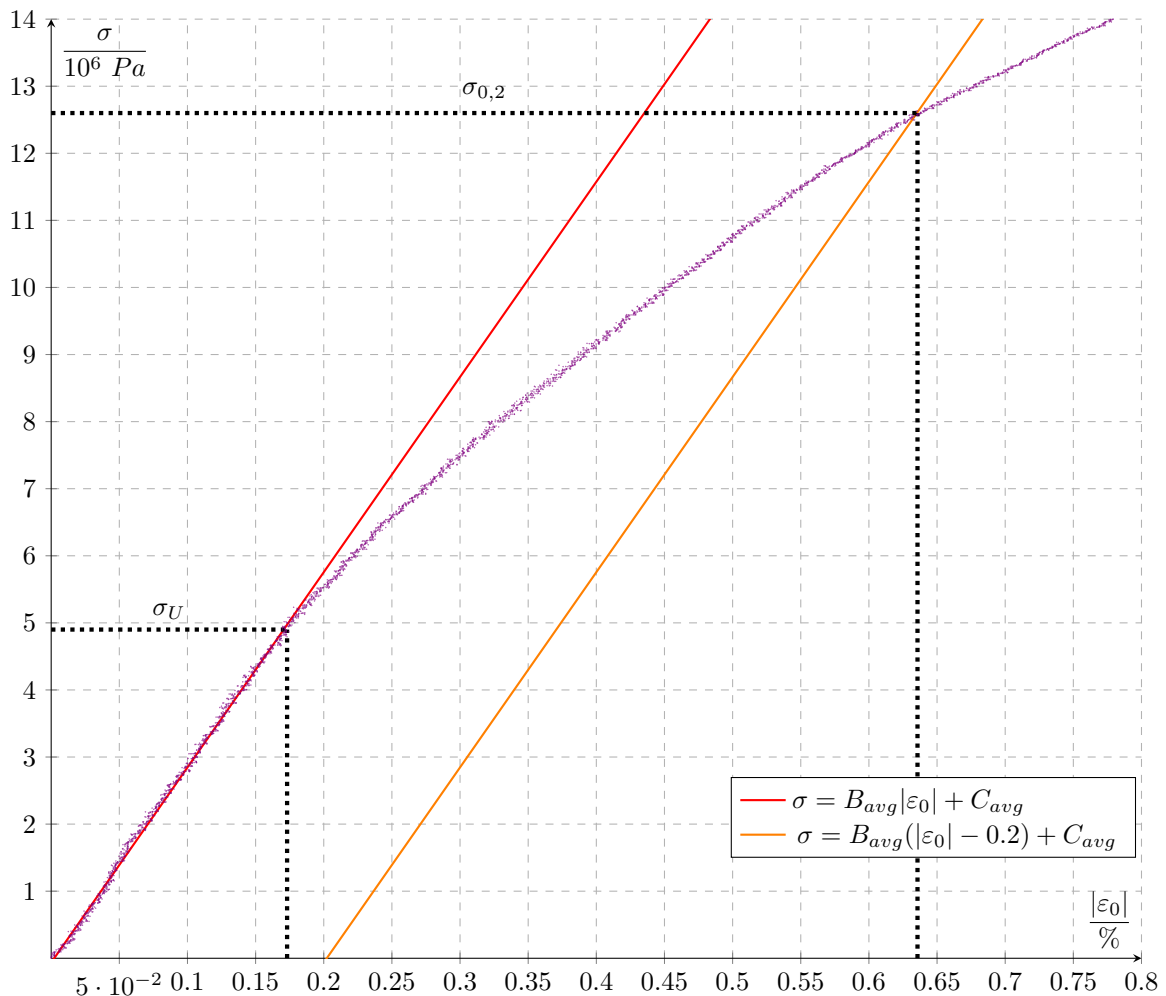
$$\sigma_{\sigma_U} = \frac{\sigma_{U,max} - \sigma_{U,min}}{2} \quad (19)$$

Celkově dostanu $\sigma_U = (4.9 \pm 0,2) \cdot 10^6 Pa$.

Analogicky jsem pro $\sigma_{0,2}$ určil minimální hodnotu na $\sigma_{0,2,min} = 12,45 \cdot 10^6 Pa$ a maximální na $\sigma_{0,2,max} = 12,71 \cdot 10^6 Pa$. Chybu jsem počítal podle stejného vzorce.

Dostanu tedy $\sigma_{0,2} = (12,6 \pm 0,1) \cdot 10^6 Pa$.

Výsledky měření shrnuje graf 6.



Graf 6: Výsledky měření deformace vzorku

4 Diskuse

Při určování rozměrů vzorku byla hlavní nepřesnost daná měřicími přístroji, jinak k žádným komplikováním nedošlo.

Během měření bylo za úkol vypočítat tuhost aparatury a já jsem ji špatně vypočítal z lineární regrese, kde jsem nebral v potaz chyby jednotlivých měření. Tento výsledek je přiložen mezi naměřenými hodnotami. Ovšem jsem navíc špatně převedl jednotky a hodnotu určil na $K = 1808 \text{ Nm}^{-1}$. Tento výsledek jsem tedy nikde nepoužil a celé zpracování místo toho provedl tak, jak bylo popsáno ve výsledcích měření.

Ve výpočtu tuhosti neuvažuji chybu měření času, jelikož přesnost tohoto měření nebyla nikde uvedena, a tak jsem ji považoval za zanedbatelně malou. Je ovšem možné, že nepřesnost měření času ovlivnila další výsledky.

Další faktor, který nebyl ve výpočtech tuhosti aparatury zahrnut byla deformace kalibračního vzorku. Vzorek byl však z oceli, a tak by měly být splněny předpoklady zmíněné v teoretické části. Předpokládám tedy, že deformace kalibračního vzorku při měření tuhosti aparatury byla doopravdy zanedbatelná.

Větší chybu však mohl způsobit odhad lineární části naměřených hodnot. Já jsem pracoval hodnotami napětí mezi 300 až 900 s, jiné intervaly by však určitě mohly změnit hodnotu parametru A ze závislosti $\Delta U = A\Delta t$, což by změnilo i hodnotu naměřené tuhosti aparatury. Jelikož se tato chyba však velmi těžko odhaduje, není ve výsledku tuhosti aparatury zahrnuta. To však znamená, že chyba měření K musela být o něco větší než chyba, kterou jsem vypočítal statistickým zpracováním.

Určování mezi σ_U a $\sigma_{0,2}$ bylo nejobtížnější, neboť jsem musel pracovat se závislostí $\sigma(|\varepsilon_0|)$, kde obě veličiny na osách x i y jsou zatíženy chybami naměřených hodnot a nelze je zanedbat.

Další problém byl určit lineární část $\sigma(|\varepsilon_0|)$. Já jsem ji určil tak, jak bylo popsáno ve výsledcích měření, ovšem přímkou lineárních regresí, které jsem takto určil, nelze brát nijak vážně. Jsou to pouze orientační křivky pro určení požadovaných hodnot, proto jsem ani nepočítal chyby parametrů lineární regrese, neboť by nenesly žádný význam. Navíc bych správně měl body proložit přímkou ve tvaru $y = Bx$, vzhledem k tvaru naměřené závislosti $\sigma(|\varepsilon_0|)$ se mi však zdálo vhodnější proložit body přímkou tvaru $y = Bx + C$. Tato volba je opět pouze orientační a nenesla žádný opravdový význam.

I po určení lineární části grafu bylo obtížné správně odečíst požadované meze. Při odečítání hodnoty $\sigma_{0,2}$ je můj postup zřejmý z grafu 5. Hodnota σ_U se však měřila hůře. Já jsem obě hodnoty $\sigma_{U,min}$ a $\sigma_{U,max}$ určil z hodnot ležících pod nejnižší přímkou v grafu 4, protože se mi zdálo vhodné zvolit tyto body za možné minimální a maximální hodnoty meze úměrnosti, kdy by se změřená závislost měla vychýlovat od lineární. Snadno by bylo však možné zvolit jiné z naměřených hodnot, což by ovlivnilo výsledný σ_U . Tato chyba volby minimálních a maximálních hodnot σ_U není ve výsledku zahrnuta, neboť se špatně odhaduje. To ovšem znamená, že skutečná chyba výsledku σ_U bude opět větší než uvedená chyba.

5 Závěr

Délku válečku před deformací jsem určil na $l_0 = (10,30 \pm 0,05) \text{ mm}$, jeho průměr na $d_0 = (7,33 \pm 0,01) \text{ mm}$ a plochu jeho příčného řezu na $S_0 = (42,2 \pm 0,1) \text{ mm}^2$.

Pomocí kalibračního vzorku jsem určil tuhost aparatury $K = (1,78 \pm 0,03) \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$, výsledek ukazuje graf 2. Dále jsem po korekci na deformaci samotné aparatury určil mez úměrnosti přiloženého vzorku na $\sigma_U = (4,9 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ a jeho mez 0,2 na hodnotu $\sigma_{0,2} = (12,6 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ výsledek tohoto měření shrnuje graf 6.

6 Seznam použité literatury

- [1] Dynamická zkouška deformace látek v tlaku. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-03-24]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_111.pdf
- [2] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYYPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.