

# Úkoly

1. Určete rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice. Z naměřené rychlosti zvuku stanovte modul pružnosti v tahu  $E$  materiálu tyče.
2. Změřte rychlost zvuku ve vzduchu a v oxidu uhličitém pomocí uzavřeného rezonátoru. Výsledky měření zpracujte metodou lineární regrese a graficky znázorněte.
3. Vypočítejte Poissonovu konstantu  $\kappa$  oxidu uhličitého z naměřené rychlosti zvuku.

## 1 Teorie

Pro zvukové vlny platí vztah

$$c = \lambda \nu \quad (1)$$

kde  $c$  je rychlost šíření zvuku,  $\lambda$  je vlnová délka a  $\nu$  je frekvence těchto vln. Šíří-li se zvukové vlny v plynu, platí dle [1] formule

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}} \quad (2)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta pro konkrétní plyn,  $R$  je univerzální plynová konstanta,  $T$  je termodynamická teplota a  $\mu$  je molární hmotnost plynu.

Rychlost zvuku v tenké kovové tyči je dle [1]

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu pro tyč a  $\rho$  je její hustota.

Pro vlnovou délku základního tónu pro tyč délky  $l$  uchycenou v polovině své délky platí vztah

$$\lambda = 2l \quad (4)$$

Prochází-li zvukové vlny mezi různými prostředími, na rohraní těchto materiálů se zachovává poměr rychlosti šíření a vlnové délky, tedy

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda'} \quad (5)$$

Pro plyn v blízkosti konce rezonátoru (konec Kundtovy trubice či uzavřeného rezonátoru) se dá předpokládat, že zůstává v klidu. Lze tedy tvrdit, že oba konce trubice jsou uzly. Z toho dostáváme pro stojaté vlnění vztah pro počet kmiten  $n$  v trubici v závislosti na její délce  $l$  a na délce půlvlny  $\frac{\lambda}{2}$

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

Ze vztahů (1) a (6) plyne, že platí přímá úměra mezi počtem kmiten  $n$  a rezonanční frekvencí  $\nu$  trubice

$$n = k\nu \quad (7)$$

kde  $k = \frac{2l}{c}$  je pro neměnnou délku rezonátoru  $l$  konstanta úměrnosti. Tato konstanta lze stanovit z grafu pomocí regrese a vede dále k vypočtení rychlosti zvuku  $c$ .

Chyby přímých měření určuji standartní metodou pro pravděpodobnost 0.6827. Chyby nepřímých měření stanovuji pomocí Gaussova zákona přenosu chyb [5].

## 2 Výsledky měření

### 2.1 Podmínky v laboratoři

- teplota vzduchu před měřením  $(23.9 \pm 0.2)^\circ\text{C}$
- teplota vzduchu po měření metodou Kundtovy trubice  $(24.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$
- teplota vzduchu na konci  $(24.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$
- relativní vlhkost vzduchu  $(33 \pm 5) \%$
- atmosférický tlak  $(1003 \pm 2) \text{ hPa}$

Na experiment má z těchto veličin znatelný vliv teplota, vlhkost vzduchu a jistý vliv na hodnotu rychlosti zvuku má i tlak. Pro měření s Kundtovou trubicí jsem počítal s teplotou vzduchu  $(24.4 \pm 0.3)^\circ\text{C}$ . Pro další měření jsem pracoval s hodnotou  $(24.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ .

### 2.2 Parametry použitých pomůcek

Měřenými plyny byl vzduch a  $\text{CO}_2$  s parametry uvedenými v sekci podmínky měření. Teplotu  $\text{CO}_2$  aproximuji teplotou vzduchu, protože jsem neměl možnost měřit teplotu uvnitř uzavřeného rezonátoru. Délka tyče použité při měření pomocí

Kundtova trubice, změřena pásovým měřidlem, je  $l = (150.9 \pm 0.1)$  cm. Při měření byla uchycena v polovině své délky. Rezonanci tyče jsem vyvolával třením pevným hadříkem posypaným kalafunou.

### 2.3 Měření metodou Kundtova trubice

Tabelovanou hodnotu rychlosti zvuku ve vzduch jsem stanovil pomocí kalkulátoru [3] vytvořeného britskou National Physical Laboratory na základě dat z [4]. Hodnotu  $c_{vz}$  jsem stanovil na základě naměřených podmínek v laboratoři na  $(346.4 \pm 0.2)$  m · s<sup>-1</sup>. Použitý kalkulátor započítává tlak, teplotu i vlhkost vzduchu. Běžné tabulky [2] uvádí pro suchý vzduch a zjištěné podmínky v laboratoři hodnotu 345.9 m · s<sup>-1</sup>, která je shodná s hodnotou z kalkulátoru [3] pro suchý vzduch.

Naměřené hodnoty pro měření metodou Kundtova trubice jsem uvedl v tabulce 2.  $l_r$  je označení pro délku rezonátoru měřenou pásovým měřidlem s dílkem 0.1 cm. Měřil jsem pro tři délky  $l_r$ , pro které se mi podařilo vybudit rezonanci. Jako  $d_{uzly}$  jsou v tabulce 1 označeny namátkou naměřené kontrolní hodnoty vzdálenosti mezi uzly, měřené tímto měřidlem.

Naměřil jsem hodnotu vlnové délky  $\lambda = (30.4 \pm 0.4)$  cm. Chybu měření jsem stanovil na základě chyby měření délky.

Pomocí této hodnoty  $\lambda$  pro vzduch a tabelované hodnoty  $c = (346.4 \pm 0.2)$  m · s<sup>-1</sup> jsem pomocí vztahů (5), (4) stanovil rychlost zvuku v použité mosazné tyči na  $c_{mosaz} = (3440 \pm 40)$  m · s<sup>-1</sup>

kde největší vliv na chybu má nejistota stanovení vlnové délky  $\lambda$  zvuku ve vzduchu. Relativní chyba je 1.2%.

Za tabelovanou hodnotu hustoty mosazi považuji dle [2]

$$\rho = (8600 \pm 100) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Tato hustota je uvedena pro 70% mědi ve slitině. Nejistotu jsem odhadl na základě neznalosti kvantitativního složení použité slitiny a rozsahu uvedeného v tabulkách.

Hodnotu modulu pružnosti v tahu  $E$  pro mosaz jsem stanovil podle vztahu (3) na  $E = (10.2 \pm 0.3) \cdot 10^{10}$  Pa

<b>tabulka 1:</b> naměřené hodnoty $l_r$ v závislosti na $n$			
$n$	$l_r$ [cm]	$d_{uzly}$ [cm]	$\lambda$ [cm]
5	76.3	14.7	$30.5 \pm 0.4$
		14.8	
4	60.6	15.5	$30.3 \pm 0.4$
		15.5	
5	76.1	15.3	$30.4 \pm 0.4$
		15.2	
výsledná hodnota $\lambda$			$(30.4 \pm 0.4)$ cm

## 2.4 Měření metodou uzavřeného rezonátoru

Metodou uzavřeného rezonátoru jsem měřil nejprve pro konstantní délku rezonátoru  $l_r = (80.0 \pm 0.1)$  cm pro vzduch a oxid uhličitý za atmosférického tlaku. Naměřené rezonanční frekvence jsem uvedl v tabulce 2 a zakreslil do grafu na obrázku 1. Frekvenci jsem měřil s chybou 2 Hz.

Tyto hodnoty by měly být rozloženy ekvidistantně. Některé hodnoty ovšem nesedí. Jde o hodnotu 619 Hz pro měření 1 a hodnoty 253 Hz a 1054 Hz pro měření 3. Při měření byla maxima rezonance těchto frekvencí znatelně nižší, než pro ostatní rezonanční frekvence. Jejich přítomnost je pravděpodobně způsobena nežádoucí vedlejší rezonancí v přístroji. Některé z těchto hodnot se při opakované zkoušce již neobjevily a tudíž mohly být způsobeny rušením v místnosti způsobeným dalšími probíhajícími experimenty. Tyto hodnoty jsem vyřadil z dalšího zpracování a nezakreslil jsem je do grafu.

Lineární regresí zpracovanou programem Origin jsem podle vztahu (7) stanovil hodnoty  $k$  pro vzduch, repektive  $\text{CO}_2$  a jejich statistické odchylky na

$$k_{vz} = (4.647 \pm 0.005) \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$k_{\text{CO}_2} = (5 \pm 0.003) \cdot 10^{-.9423} \text{ s}$$

dále jsem dle (7) stanovil rychlost zvuku ve vzduchu a v  $\text{CO}_2$  na

$$c_{vz} = (344.3 \pm 0.6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$c_{\text{CO}_2} = (269.3 \pm 0.4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Na základě naměřené rychlosti zvuku v  $\text{CO}_2$  a podmínek v laboratoři jsem podle vztahu (2) stanovil hodnotu Poissonovy konstanty  $\kappa$  pro oxid uhličitý na  $\kappa = 1.288 \pm 0.004$

Použité hodnoty veličin ve vztahu (2) ze stanovených podmínek měření a podle tabulek [2]:

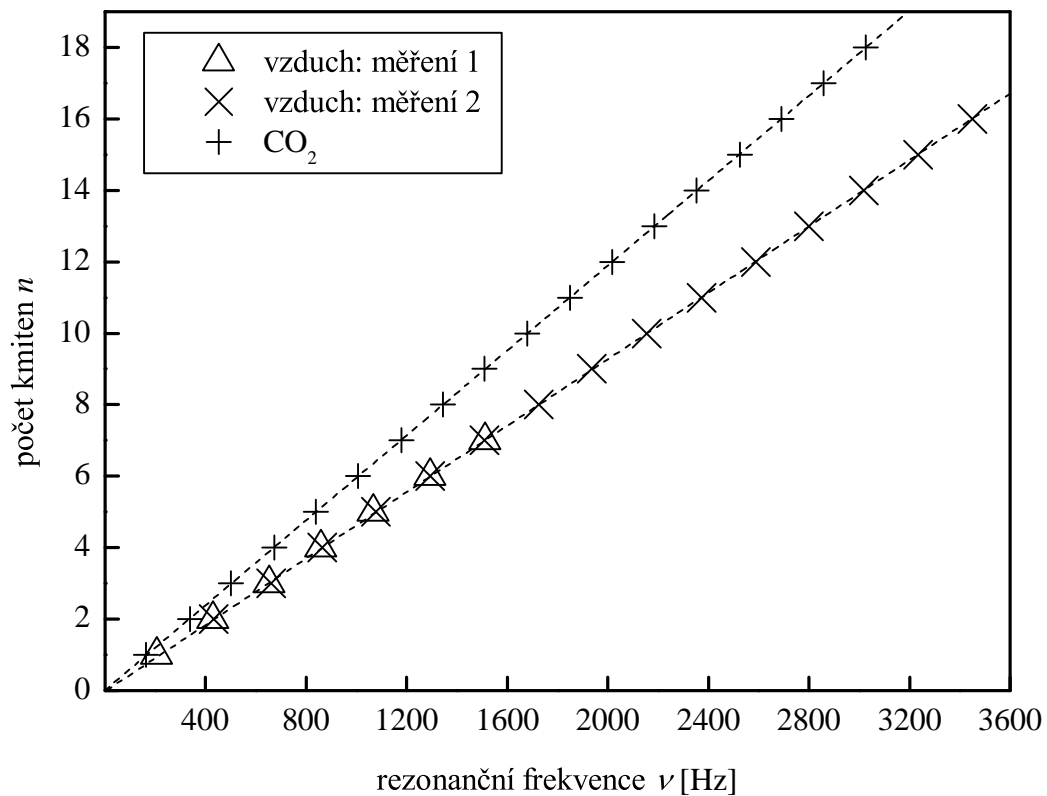
$$T = (298.0 \pm 0.2)^\circ\text{C}$$

$$R = 8.314472 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu = 0.044 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

<b>tabulka 2:</b> konstantní délka rezonátoru $l_r$					
vzduch			oxid uhličitý		
$\nu$ [Hz]			$\nu$ [Hz]		
měř. 1	měř. 2	měř. 2	měř. 3	měř. 3	měř. 3
206	433	2154	162	1178	2525
430	661	2373	253	1344	2691
619	864	2588	338	1510	2858
654	1017	2800	500	1680	3026
858	1293	3017	674	1850	
1068	1510	3233	2017	838	
1293	1724	3450	2184	1007	
1511	1937		1054	2353	

délka rezonátoru  $l_r = (80.0 \pm 0.1)$  cm



**Obrázek 1:** závislost počtu kmiten na rezonanční frekvenci při měření metodou uzavřeného rezonátoru pro vzduch a CO<sub>2</sub>. Graf je proložen přímkami provedené lineární regrese pro oba plyny.

Dále jsem metodou uzavřeného rezonátoru měřil rychlost zvuku ve vzduchu při atmosférickém tlaku pro konstantní frekvenci, jenž jsem zafixoval na hodnotě  $\nu_{fix} = (2957 \pm 1)$  Hz, kterou jsem stanovil na základě delšího měření pro počáteční délku rezonátoru  $l_r = (70.0 \pm 0.1)$  cm. Během měření jsem měnil délku rezonátoru a hledal jsem  $l_r$  pro které nastane rezonance. Naměřené hodnoty jsem uvedl v tabulce 3.

Z naměřených hodnot jsem stanovil vlnovou délku  $\lambda$  na  $(11.8 \pm 0.2)$  cm. Odtud jsem pomocí vztahu (1) stanovil rychlost zvuku ve vzduchu na

$$c = (349 \pm 5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Největší vliv na chybu má nejistota měření  $\lambda$ .

<b>tabulka 3: konstantní frekvence</b>	
rezonanční délka	$l_r$ [cm]
	$70.0 \pm 0.1$
	$75.9 \pm 0.1$
	$81.8 \pm 0.1$
výsledná hodnota $\lambda$	$(11.8 \pm 0.2)$ cm
fixovaná frekvence $\nu$	$(2957 \pm 1)$ Hz

### 3 Diskuze

#### Tabelované hodnoty

Naměřená rychlost zvuku v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice je  $(3440 \pm 40) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , přičemž tabelovaná hodnota [2] je  $3400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Naměřená hodnota tedy je na hranici nejistoty měření. Největší vliv na nepřesnost tohoto měření měla chyba měření vzdálenosti mezi uzly. Pro dosažení vyšší přesnosti jsem měřil celkovou délku rezonátoru a délku půlvln odvodil pomocí předpokladu, že na koncích jsou uzly. Z kontrolních měření v tabulce 1 je však vidět, že výsledky získané touto metodou jsou do jisté míry odlišné od přímého měření vzdálenosti mezi uzly. Přímé měření je ovšem zatíženo značnou chybou, neboť přesná poloha uzlu není dobře znatelná. Dalším problémem u tohoto měření je fakt, že stojaté vlnění nastává v praxi při určitém rozsahu délky rezonátoru a ne pro diskrétní hodnoty. Při měření je proto vhodné při nalezení  $l_r$  pro kterou nastává stojaté vlnění ještě  $l_r$  mírně upravovat a pokusit se najít střední hodnotu rozsahu  $l_r$  pro který nastává stojaté vlnění. Zpřesnění touto metodou se mi nezdařilo, neboť se mi nepodařilo dosáhnout stojaté vlnění dostatečně mnohokrát.

Hodnotu modulu pružnosti v tahu  $E$  mosazi jsem stanovil na  $(10.2 \pm 0.3) \cdot 10^{10}$  Pa, přičemž tabulková hodnota [2] je  $9.9 \cdot 10^{10}$  Pa. Tabelovaná hodnota  $E$  je

tedy opět na hranici stanovené nejistoty. Vliv na tuto chybu má převážně neznalost kvantitativního složení použité slitiny a nepřesnost ve stanovení  $c_{mosaz}$ .

Za tabelovanou hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu se zjištěnými parametry považuji výše uvedenou hodnotu  $346.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Metodou uzavřeného rezonátoru pro konstantní délku rezonátoru  $l_r$  jsem naměřil rychlost zvuku ve vzduchu jako  $c_{vz} = (344.3 \pm 0.6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Tato hodnota se od tabelované hodnoty liší více než o trojnásobek stanovené nejistoty měření. Systematická chyba může být dost možná způsobena jinou teplotou vzduchu v rezonátoru než byla použita hodnota teploty vzduchu v místnosti. Přímo v rezonátoru jsem teplotu neměřil, naměřená hodnota rychlosti zvuku ve vzduchu s danými zbylými parametry přibližně odpovídá teplotě  $21^\circ\text{C}$ , která je poměrně nízká. Z toho soudím přítomnost dalších vlivů. Vliv mohla mít například i odlišnost předpokládaného běžného složení vzduchu s molární koncentrací oxidu uhličitého  $0.4\%$ , způsobená například zbytkovým  $\text{CO}_2$  z předchozích experimentů, přestože jsem se snažil trubici rezonátoru před měřením dobře profouknout.

Měřením rychlosti zvuku v  $\text{CO}_2$  metodou uzavřeného rezonátoru při konstantní délce rezonátoru jsem stanovil hodnotu  $(269.3 \pm 0.4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Tato hodnota se od tabulkové hodnoty  $259 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  [2] pro teplotu  $0^\circ\text{C}$  liší velmi výrazně. Přesnější tabulková hodnota mi není známa. Chyba může být způsobena znečištěním vzduchem či odlišností teplot. Chyba měření frekvence pravděpodobně velký vliv nemá.

Z naměřené hodnoty rychlosti zvuku v  $\text{CO}_2$  jsem stanovil Poissonovu konstantu  $\kappa$  pro  $\text{CO}_2$  na  $1.288 \pm 0.004$ . Tabulková hodnota [6] pro  $15^\circ\text{C}$  je  $1.304$ . Hodnota řádově sedí, liší se ovšem o více než trojnásobek stanovené nejistoty. Rozdíl může být způsoben rozdílem teplot a nepřesností stanovení  $c_{\text{CO}_2}$ .

Při měření metodou uzavřeného rezonátoru pro konstantní frekvenci a proměnnou délku  $l_r$  jsem získal hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu  $(349 \pm 5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Přesnost byla značně omezena počtem měření, naměřená hodnota však v rámci odchylky odpovídá tabulkové hodnotě.

## Grafické znázornění závislosti

Naměřené hodnoty zakreslené v grafu na obrázku 1 jsem proložil přímkou. Naměřená data se velmi blíží lineární závislosti, statistická chyba lineární regrese je tudíž zanedbatelná. Hodnoty pro vzduch z měření 1 se téměř kryjí s hodnotami z odpovídajícího opakování - měření 2.

## 4 Závěr

Z naměřených hodnot uvedených v tabulce 1 jsem stanovil rychlost zvuku v mosazné tyči na  $c_{mosaz} = (3440 \pm 40) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a její modul pružnosti v tahu na  $E = (10.2 \pm 0.3) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

Pomocí uzavřeného rezonátoru jsem stanovil rychlost šíření zvukových vln ve vzduchu na  $c_{vz} = (344.3 \pm 0.6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pro konstantní délku rezonátoru a na hodnotu  $(349 \pm 5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  metodou proměnlivé délky při zachování frekvence. V grafu na obrázku 1 jsem znázornil závislost počtu kmiten na rezonanční frekvenci pro měření s konstantní délkou rezonátoru. Lineární regrese těchto dat sloužila k určení rychlosti šíření zvuku.

Z naměřených hodnot jsem stanovil Poissonovu konstantu  $\kappa$  oxidu uhličitého na  $1.288 \pm 0.004$ .

Všechny naměřené hodnoty řádově sedí na tabelované hodnoty, větší část se jich ale pohybuje mimo stanovenou nejistotu, což ukazuje na fakt, že měření bylo zatíženo systematickou chybou.

## Reference

- [1] Studijní text k úloze X.  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_110.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_110.pdf)
- [2] J. Mikulčák, J. Charvát, M. Macháček, F. Zemánek,  
Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce, Prometheus, Praha 2003.
- [3] National Physical Laboratory,  
NPL Acoustics: Calculation of speed of sound in humid air  
<http://resource.npl.co.uk/acoustics/techguides/speedair/>
- [4] Davis, Metrologia, 29, p67, 1992
- [5] Brož, J. a kol,  
Základy fyzikálních měření I., Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983.
- [6] Wikipedia, the free encyclopedia, Carbon dioxide data  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon\\_dioxide\\_\(data\\_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_dioxide_(data_page))