

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č.

Název:

Pracoval: stud. skup. dne

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

Pracovní úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete pomocí lineární regrese.

1 Teoretická část

Měření E z protažení drátku [1]

V oboru pružné deformace je modul pružnosti E konstantou úměrnosti mezi působícím napětím σ a deformací drátku ε :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1)$$

Vyjádřením σ a ε jako:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2)$$

kde F je působící síla, $S = \pi r^2$ průřez drátku o poloměru r , Δl prodloužení drátku a l_0 jeho původní délka, dostáváme:

$$\Delta l = \frac{l_0}{ES} \cdot F \quad (3)$$

Prodloužení drátu se měří *zrcátkovou metodou*: Drát z jedné strany upevněný je na druhém konci veden přes kladku o poloměru R k misce, na kterou se klade závaží. Protažení drátu souvisí s úhlem pootočení zrcátka $\Delta\alpha$:

$$R\Delta\alpha = \Delta l \quad (4)$$

$\Delta\alpha$ se měří pomocí svislé stupnice ve vzdálenosti L od zrcátka, v němž je pozorován její odraz dalekohledem. Pokud je v rovnovážné poloze v dalekohledu vidět dílek stupnice n_0 a po pootočení dílek n , pak platí:

$$\operatorname{tg}(2\Delta\alpha) = \frac{n - n_0}{L} = \frac{\Delta n}{L} \quad (5)$$

Vzhledem k velikostem úhlu lze použít přibližného vzorce:

$$\Delta\alpha \approx \frac{\Delta n}{2L} \quad (6)$$

Postupujeme přímočaře, postupně zatěžujeme drátek závažími a přitom odečítáme n , resp. přímo Δn , z odrazu stupnice v dalekohledu. Po dosažení největšího zatížení závaží opět postupně odebíráme.

Měření E z průhybu trámku [1]

Při zatížení mosazného či ocelového trámku uprostřed se trámek v místě působení síly F prohne o y , pro které platí:

$$y = \frac{Fl^3}{4Eab^3} \quad (7)$$

kde l je vzdálenost mezi podpěrnými břity, a šířka a b tloušťka trámku, E hledaný modul pružnosti. Průhyb trámku měříme objektivovým mikrometrem. Postupujeme analogicky jako v předchozím případě. Zvětšujeme zátěž a zaznamenáváme naměřené hodnoty průhybu y , po dosažení maximálního zatížení závaží opět odebíráme.

Použité přístroje, pomůcky

Pásový metr K měření původní délky drátu l_0 , vzdálenosti stupnice s dalekohledem od zrcátka L , průměru kolečka kladky D a vzdálenosti podpěrných břitů l . Odhadnutá chyba je velikost nejmenšího dílku cca 1 mm.

Mikrometr K změření průměru drátku d . $\Delta d = 0.01$ mm

Posuvné měřítko s noniem K zjištění rozměrů trámku a a b . Chyba měřidla je asi 0.02 mm.

Stupnice s dalekohledem Ke změření rozdílu $\Delta n = n - n_0$ a zjištění úhlu natočení zrcátka. Chyba s níž je určen rozdíl Δn je asi 1 mm.

Objektivový mikrometr Ke změření průhybu trámku y . Průhyb y z rozdílu naměřených hodnot měříme s chybou: $\Delta y = 0.1$ mm.

hmotnost závaží se pohybuje od 5 do 500 g (5, 10, 20, 30, 50, 100, 500), chyba uvedené hmotnosti nebyla uvažována

2 Výsledky měření

Použité konstanty a teplotní podmínky experimentu

Tíhové zrychlení $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Teplota $t = (24 \pm 1) \text{ }^\circ\text{C}$

Měření modulu pružnosti E z protažení drátku

Vzdálenost stupnice od zrcátka $L = (89.0 \pm 0.5) \text{ cm}$
Průměr kolečka kladky $D = (4.0 \pm 0.1) \text{ cm}$
Původní délka drátu $l_0 = (115 \pm 2) \text{ cm}$

č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{d} [mm]
d [mm]	0.51	0.52	0.51	0.52	0.51	0.51	0.53	0.52	0.52	0.51	0.516 ± 0.003

Tabulka 1: Naměřené hodnoty průměru drátku a jejich aritmetický průměr.

Chyba změřené vzdálenosti L a délky drátku l_0 byla oproti předpokládané nadhodnocena s ohledem na nepřesnosti, kterých jsem se mohl při jejich určování dopustit jako nejasnosti okolo umístění konce drátku ve svěráku či kde přímo doléhá na kladku, vzdálenost stupnice je naopak obtížně měřitelná (počítejme možné naklonění stupnice metru apod.). Průměr drátku byl měřen 10x na různých místech (viz. tabulka 1) z důvodu jeho nehomogenity. Chyba aritmetického průměru je pak zjištěna jako chyba každého měření (0.01 mm) dělená odmocninou z počtu měření, tedy jako std. odchylka aritmetického průměru. Z průměru posléze získáme průřez drátku S s chybou spočtenou z rel. chyby d :

$$S = (0.209 \pm 0.003) \text{ mm}^3$$

Z naměřených veličin (tabulka 2) spočteme podle (6) a (4) (za R dosazují $D/2$) prodloužení drátku Δl , chybu spočteme standartně:

$$\Delta(\Delta l) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \dots} \quad (8)$$

Podle realizovaných zatížení drátku doplníme působící sílu $F = mg$. Modul pružnosti E určíme lineární regresí z rovnice (3). Metodou nejmenších čtverců při vážení hodnot Δl jejich chybou nejprve získáme konstantu úměrnosti mezi působící silou a protažením drátku A :

$$A = (32.3 \pm 0.2) \times 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{N}^{-1}$$

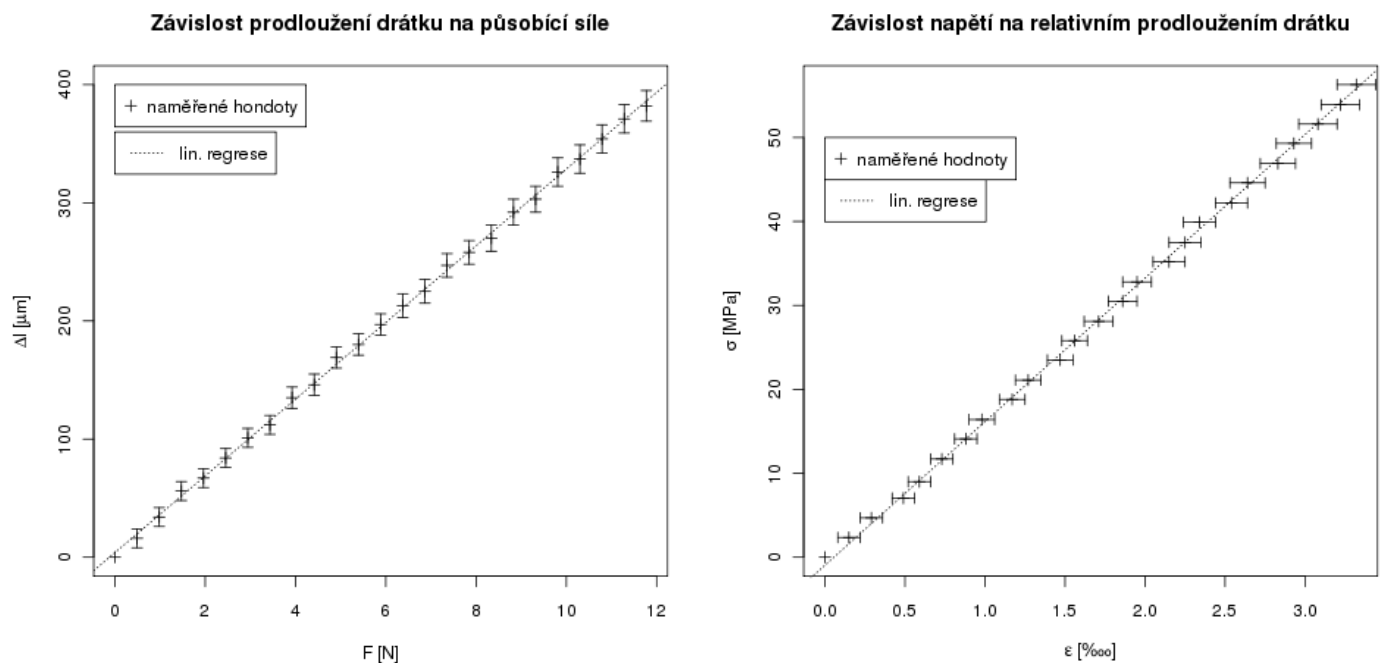
kterou identifikujeme jako $A = l_0/ES$, z čehož následně modul E spočteme, jeho chybu zjistíme obdobně jako v (8):

$$E_{\text{dratek}} = (1.70 \pm 0.04) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

K sestrojení standartního deformačního diagramu závislosti napětí σ na deformaci ε dopočteme ještě tyto podle (2). Naměřené a výsledné hodnoty jsou k nalezení v tabulce 2 a vyneseny v grafu závislosti prodloužení Δl na působící síle F a deformačním diagramu na obr. 1. Data byla zpracována a grafy sestrojeny pomocí programu *R 2.10.1*.

m [g]	F [N]	Δn [mm]	Δl [μm]	σ [MPa]	ε [‰]
0	0.00	0	0	0.0	0.0
50	0.491	1	16 ± 8	2.35 ± 0.03	0.15 ± 0.07
100	0.981	3	34 ± 8	4.69 ± 0.06	0.29 ± 0.07
150	1.472	5	56 ± 8	7.04 ± 0.09	0.49 ± 0.07
200	1.962	6	67 ± 8	9.4 ± 0.1	0.59 ± 0.07
250	2.453	7	84 ± 8	11.7 ± 0.1	0.73 ± 0.07
300	2.943	9	101 ± 8	14.1 ± 0.2	0.88 ± 0.07
350	3.434	10	112 ± 8	16.4 ± 0.2	0.98 ± 0.08
400	3.924	12	135 ± 9	18.8 ± 0.2	1.17 ± 0.08
450	4.415	13	146 ± 9	21.1 ± 0.3	1.27 ± 0.08
500	4.905	15	169 ± 9	23.5 ± 0.3	1.47 ± 0.08
550	5.396	16	180 ± 9	25.8 ± 0.3	1.56 ± 0.08
600	5.886	17	197 ± 9	28.1 ± 0.3	1.71 ± 0.09
650	6.377	19	213 ± 10	30.5 ± 0.4	1.86 ± 0.09
700	6.867	20	225 ± 10	32.8 ± 0.4	1.95 ± 0.09
750	7.358	22	247 ± 10	35.2 ± 0.4	2.15 ± 0.10
800	7.848	23	258 ± 10	37.5 ± 0.5	2.25 ± 0.10
850	8.339	24	270 ± 11	39.9 ± 0.5	2.34 ± 0.10
900	8.829	26	292 ± 11	42.2 ± 0.5	2.54 ± 0.10
950	9.320	27	303 ± 11	44.6 ± 0.5	2.64 ± 0.11
1000	9.810	29	326 ± 12	46.9 ± 0.6	2.83 ± 0.11
1050	10.301	30	337 ± 12	49.3 ± 0.6	2.93 ± 0.11
1100	10.791	31	354 ± 12	51.6 ± 0.6	3.08 ± 0.12
1150	11.282	33	371 ± 12	53.9 ± 0.7	3.22 ± 0.12
1200	11.772	34	382 ± 13	56.3 ± 0.7	3.32 ± 0.12

Tabulka 2: Zatížení drátku závažími hmot. m a odpovídající působící síla F ; naměřené rozdíly Δn při zatěžování (1. sloupec) a odebrání závaží (2. sloupec), do výpočtů byl dosazen jejich aritmetický průměr; prodloužení drátku Δl ; dopočtené napětí σ a deformace ε .



Obr. 1: Graf závislosti prodloužení drátku Δl na působící síle F (vlevo) a deformační diagram závislosti působícího napětí σ na deformaci drátku ε (vpravo).

Měření modulu E z průhybu trámku

Vzdálenost podpěrných břitů $l = (41.1 \pm 0.1)$ cm

Mosaz											
č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{x} [mm]
a [mm]	11.76	11.98	11.88	11.92	11.90	11.80	11.78	11.92	11.92	11.90	11.876 ± 0.006
b [mm]	2.04	1.98	2.02	2.00	2.06	2.02	1.98	1.96	1.96	1.98	2.000 ± 0.006
Ocel											
č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{x} [mm]
a [mm]	11.98	11.94	11.92	12.00	11.98	11.98	11.96	12.00	11.96	11.98	11.970 ± 0.006
b [mm]	2.98	2.96	2.98	3.00	3.00	2.98	3.00	2.98	2.96	2.98	2.982 ± 0.006

Tabulka 3: Naměřené rozměry trámek a a b a jejich arit. průměry.

Při zpracování postupujeme obdobně jako v předchozím případě. Pro jendotlivá zatížení mosazného a ocelového drátu dopočteme působící sílu $F = mg$. Modul pružnosti E získáme lineární regresí, při níž vycházíme z rovnice (7). Nejprve zjistíme konstantu úměrnosti B mezi průhybem trámku y a působící silou F , přičemž hodnoty y vážíme jejich chybou (viz. teor. část). Tu pak identifikujeme jako $B = l^3/4Eab^3$, z čehož vyjádříme modul E :

$$E = \frac{l^3}{4Bab^3} \quad (9)$$

chybu počítáme analogicky vztahu (8). Naměřené hodnoty a a b pro mosazný i ocelový trámeček jsou k nalezení v tabulce 3 stejně jako jejich aritmetický průměr s odpovídající chybou, vzdálenost podpěrných břitů je uvedena na začátku sekce. Závislost průhybu trámku na působící síle je zaznamenána v tabulce 4 a zobrazena v grafech na obr. 2, data jsou zpracována a grafy sestrojeny opět pomocí programu *R 2.10.1*.

Konstanty úměrnosti B

$$B_{mosaz} = (1.83 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ m.N}^{-1}$$

$$B_{ocel} = (0.265 \pm 0.006) \times 10^{-3} \text{ m.N}^{-1}$$

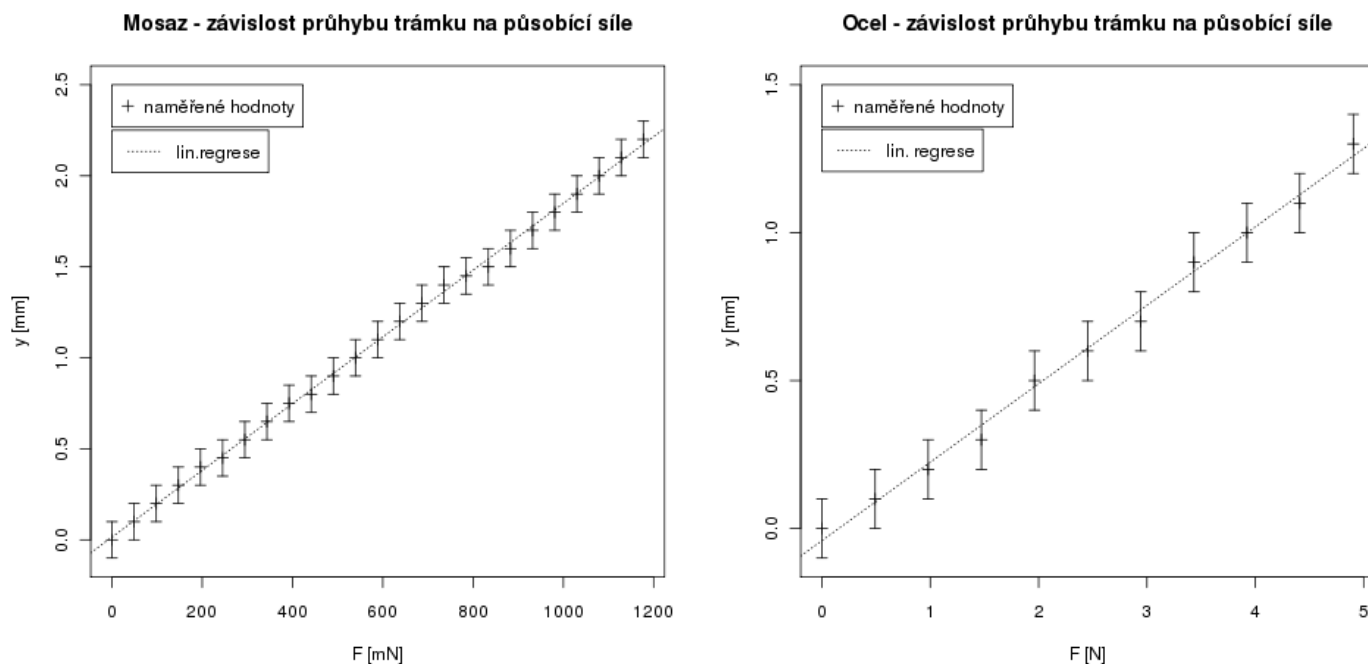
Výsledný modul pružnosti E

$$E_{mosaz} = (1.00 \pm 0.01) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_{ocel} = (2.06 \pm 0.05) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Mosaz						Ocel					
m [g]	F [mN]	y [mm]		m [g]	F [mN]	y [mm]		m [g]	F [N]	y [mm]	
0	0.0	0.0	0.0	65	637.7	1.2	1.2	0	0.0	0.0	0.0
5	49.1	0.1	0.1	70	686.7	1.3	1.3	50	0.491	0.1	0.1
10	98.1	0.2	0.2	75	735.8	1.4	1.4	100	0.981	0.2	0.2
15	147.2	0.3	0.3	80	784.8	1.4	1.5	150	1.472	0.3	0.3
20	196.2	0.4	0.4	85	833.9	1.5	1.5	200	1.962	0.5	0.5
25	245.3	0.4	0.5	90	882.9	1.6	1.6	250	2.452	0.6	0.6
30	294.3	0.5	0.6	95	932.0	1.7	1.7	300	2.943	0.7	0.7
35	343.4	0.6	0.7	100	981.0	1.8	1.8	350	3.434	0.9	0.9
40	392.4	0.7	0.8	105	1030.1	1.9	1.9	400	3.924	1.0	1.0
45	441.5	0.8	0.8	110	1079.1	2.0	2.0	450	4.415	1.1	1.1
50	490.5	0.9	0.9	115	1128.2	2.1	2.1	500	4.905	1.3	1.3
55	539.6	1.0	1.0	120	1177.2	2.2	2.2				
60	588.6	1.1	1.1	–	–	–	–				

Tabulka 4: Hmotnost m závaží zavěšených na trámcích a odpovídající působící síla F ; změřený průhyb trámek y při zatěžování (1. sloupec) a odlehčování (2. sloupec), použity byly následně jejich aritmetické průměry.



Obr. 2: Grafy závislosti průhybu trámku y na působící síle F pro mosazný (vlevo) a ocelový (vpravo) trámek.

3 Diskuse výsledků

Tabulky [2] uvádí modul pružnosti v tahu pro mosaz 0.99×10^{11} Pa a oceli 2.00 až 2.10×10^{11} Pa, což dokonale odpovídá hodnotám naměřeným z průhybu trámků $E_{mosaz} = (1.00 \pm 0.01) \times 10^{11}$ Pa a $E_{ocel} = (2.06 \pm 0.05) \times 10^{11}$ Pa. Modul pružnosti drátku $E_{dratek} = (1.70 \pm 0.04) \times 10^{11}$ Pa odpovídá z tabelovaných nejlépe platině (1.70×10^{11} Pa). Drát bude ale nejspíše vyroben z nějaké ne zcela čisté oceli.

I přes vysokou přesnost měření (zajištěnou už několikanásobným přeměřováním rozměrů trámků i průměru drátku) a uspokojující shodou s tabulkovými údaji, lze zmínit určité zdroje chyb, které mohly měření ovlivnit. Při zkoumání průhybů trámků jimi jsou hlavně časté otřesy v blízkém okolí (procházející lidé apod.), které trámek mezi břity rozvibrují a jeho zjišťované poklesy (nebo zdvihy) jsou ze stupnice nesnadno odečitatelné. Dále, jak oba trámky tak drátek mohou být (a drátek očividně je) po své délce nehomogenní a deformují se tak v každém místě jinak. A v neposlední řadě může drátek přes kladku se zrcátkem prokluzovat, tedy zatímco se drátek prodlouží, kladka se neotočí a my tak nemáme rozdíl Δn resp. odpovídající $\Delta \alpha$.

Jak ilustrují tabulky 2 a 4 a grafy na obr. 1 a 2, nalezené závislosti jsou lineární a odpovídají teoretickým předpokladům a vztahům. Trámky i drátek jsou tak deformovány v pružných oborech. Ani po odstranění napětí nebyla pozorována žádná trvalá deformace.

4 Závěr

Byl naměřen modul pružnosti drátku z jeho protažení $E_{dratek} = (1.70 \pm 0.04) \times 10^{11}$ Pa a moduly pružnosti mosazného a ocelového trámku z jejich průhybu: $E_{mosaz} = (1.00 \pm 0.01) \times 10^{11}$ Pa; $E_{ocel} = (2.06 \pm 0.05) \times 10^{11}$ Pa. Závislosti protažení drátku resp. průhybu trámků jsou zaznamenány v tabulkách 2 a 4 a ilustrují je grafy na obr. 1 a 2.

5 Literatura

Použitá literatura

- [1] Studijní text, IX Měření modulu pružnosti v tahu, <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>
- [2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980