

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM 1

Úloha č.: IX.

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Vypracoval: Mária Šoltésová stud. sk. F – 16 dne 20.04.2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval:dne výsledek klasifikace

Připomínky:

Pracovní úloha:

1. Změřte modul pružnosti v tahu E ocele z predĺženia drôtu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E ocele a mosadze z priehybu trámika.
3. Výsledky merania spracujte použitím lineárnej regresie.
4. Výsledky merania graficky znázornite.

Teoretická časť:

Meranie modulu pružnosti E z predĺženia drôtu

Ak pôsobíme na drôt dĺžky l_0 a priemeru d silou F , potom v obore pružnej deformácie je predĺženie Δl dané ako [1]

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S} \quad (1)$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, ktorý udáva pomer medzi napätím σ

$$s = \frac{F}{S} \quad (2)$$

a relatívnym predĺžením ε

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3)$$

Z rovníc (1), (2), (3) plynie

$$E = \frac{s}{e} = \frac{l_0 F}{\Delta l S}. \quad (4)$$

Výsledkom meraní je stanoviť modul pružnosti pomocou vzťahu (4). K tomu je potrebné určiť počiatočnú dĺžku drôtu l_0 , priemer drôtu d a pomocou závaží kladených na miskú pôsobiť známou silou F a merať príslušné predĺženia Δl .

Na meranie predĺženia drôtu použijeme zrkadlovú metódu. Drôt je na jednom konci vedený cez kladku s polomerom R , na ktorej je upevnené malé zrkadlo. Predĺženie drôtu sa tým prevedie na pootočenie zrkadla o uhol $\Delta\alpha$ vzťahom

$$R\Delta\alpha = \Delta l. \quad (5)$$

Uhol $\Delta\alpha$ určíme odčítaním hodnôt zo stupnice, ktorej odraz v zrkadle pozorujeme ďalekohľadom. V rovnovážnej polohe odčítame hodnotu n_0 , po zaťažení hodnotu n . Hľadaný uhol $\Delta\alpha$ je potom daný ako

$$\tan(2\Delta\alpha) = \frac{n - n_0}{L} \quad (6)$$

kde L je vzdialenosť stupnice od zrkadla. Vzhľadom k veľkosti uhlu pootočenia môžeme použiť približný vzorec

$$\Delta\alpha \approx \frac{n - n_0}{2L}. \quad (7)$$

Meranie modulu pružnosti E z priehybu trámika

Modul pružnosti možno určovať aj z priehybu trámiku tvaru kvádra, podopreného dvoma britmi vo vzdialenosti l , na ktorý pôsobí v strede sila F . Týmto vznikne priehyb y , daný vzťahom [1]

$$y = \frac{Fl^3}{4Eab^3} \quad (8)$$

kde a je šírka trámika a b je výška trámika. Modul pružnosti potom môžeme určiť ako

$$E = \frac{Fl^3}{4yab^3}. \quad (9)$$

Použité pomôcky a prístroje:

upínacie zariadenie drôtu, drôt so závesnou miskou, osvetľovacia súprava s ďalekohľadom, sada závaží, aparátúra na meranie priehybu trámika, oceľový a mosadzný trámik, závesná miska

| merací prístroj | najmenší dielik |
|--|-----------------|
| posuvné meradlo | 0,05 mm |
| pásmové meradlo | 1 mm |
| mikrometrické meradlo | 0,01 mm |
| stupnica na meranie priehybu trámika | 0,1 mm |
| stupnica na meranie predlžovania drôtu | 1 mm |

Postup:

Metóda predlžovania drôtu

1. Zaťažíme drôt závažím o hmotnosti 1 kg, aby sa vyrovnal.
2. Odmeriame dĺžku drôtu l_0 , priemer drôtu d vo viacerých miestach, polomer kladky R a vzdialenosť stupnice od zrkadielka L .
3. Na misku postupne pridávame závažia o hmotnosti 100g, odčítame hodnotu n zo stupnice pomocou ďalekohľadu.
4. Po dosiahnutí najvyššieho zaťaženia závažia postupne odoberáme a opäť odčítame hodnotu n .

Metóda priehybu trámika

1. Zmeriame výšku b a šírku a oceľového a mosadzného trámiku a vzdialenosť britov l na zariadení na meranie priehybu trámika.
2. Doprostred trámika umiestnime stupnicu a misku na závažia. Postupne pridávame závažia a odčítame hodnotu priehybu y zo stupnice.
3. Po dosiahnutí najvyššieho zaťaženia závažia odoberáme a opäť odčítame hodnotu priehybu y .
4. Postup opakujeme pre obidva trámiky.

Výsledky meraní:

Podmienky experimentu:

Experiment bol prevádzaný v normálnych laboratórnych podmienkach. Tlak ani teplota v miestnosti nemajú výrazný vplyv na priebeh experimentu, preto nepovažujem za potrebné ich uvádzať.

1. Metóda predĺženia drôtu

Na napnutie drôtu sme použili 1 kg závažie, ktoré považujeme za nulovú hmotnosť. Hodnotu n určenú pri tomto zaťažení považujeme za hodnotu n_0 . Zmerali sme dĺžku drôtu pri tomto zaťažení pásmovým meradlom ako $l_0 = (114 \pm 1)$ cm, chybu odhadujeme ako 1 cm, pretože nemôžeme presne určiť, čo pokladať za namáhanú dĺžku drôtu, vzhľadom k tomu, že

drôt bol upevnený cez kladku. Vzďialenosť zrkadielka upevneného na kladke sme určili pásmovým meradlom ako $L = (97,3 \pm 0,3)$ cm, chyba 0,3 cm je odhadnutá s ohľadom na to, že rôzne miesta stupnice majú od zrkadla rôznu vzdialenosť. Posuvným meradlom sme určili priemer kladky D a mikrometrickým meradlom sme určili priemer drôtu d . Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1: namerané hodnoty priemeru drôtu a kladky

| | d [mm] | r [mm] | D [mm] | R [mm] |
|----------|----------|----------------------------|----------|----------------------------|
| 1 | 0,50 | 0,25 | 38,35 | 19,18 |
| 2 | 0,52 | 0,26 | 38,45 | 19,23 |
| 3 | 0,51 | 0,26 | 39,20 | 19,60 |
| 4 | 0,51 | 0,26 | 38,90 | 19,45 |
| 5 | 0,50 | 0,25 | 38,85 | 19,43 |
| 6 | 0,51 | 0,26 | 38,35 | 19,18 |
| 7 | 0,51 | 0,26 | 39,20 | 19,60 |
| 8 | 0,51 | 0,26 | 38,30 | 19,15 |
| 9 | 0,50 | 0,25 | 38,55 | 19,28 |
| 10 | 0,50 | 0,25 | 38,30 | 19,15 |
| priemer | 0,51 | 0,25 | 38,65 | 19,30 |
| odchýľka | | $\sigma_r = \mathbf{0,01}$ | | $\sigma_R = \mathbf{0,20}$ |

Chyba polomeru drôtu σ_r je určená ako chyba meracieho zariadenia, chyba polomeru kladky σ_R je štatistická chyba, chyba meracieho zariadenia je oproti nej zanedbateľná.

Postupne sme pridávali na misku závažia s hmotnosťou 100 g a odčítavali sme zo stupnice hodnoty n_1^i . Potom sme závažia z misky odoberali a odčítali sme hodnoty n_2^i . Chybu určenia hodnôt n^i uvažujeme ako 1 mm. Z týchto hodnôt sme určili predĺženie drôtu Δl . Namerané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 2: hodnoty predĺženia drôtu pri pridávaní a odoberaní závaží

| č. mer. | závažia | sila | zaťažovanie | odoberanie | predĺženie | chyba |
|---------|----------|---------|--------------|--------------|-----------------|--------------------------|
| | m [kg] | F [N] | n_1^i [cm] | n_2^i [cm] | Δl [mm] | $\sigma_{\Delta l}$ [mm] |
| 1 | 0 | 0,00 | 31,7 | 31,6 | 0,030 | 0,013 |
| 2 | 0,1 | 0,98 | 31,4 | 31,3 | 0,060 | 0,013 |
| 3 | 0,2 | 1,96 | 31,1 | 31 | 0,089 | 0,013 |
| 4 | 0,3 | 2,94 | 30,8 | 30,7 | 0,119 | 0,013 |
| 5 | 0,4 | 3,92 | 30,5 | 30,5 | 0,149 | 0,013 |
| 6 | 0,5 | 4,91 | 30,2 | 30,2 | 0,169 | 0,013 |
| 7 | 0,6 | 5,89 | 30 | 29,9 | 0,199 | 0,013 |
| 8 | 0,7 | 6,87 | 29,7 | 29,6 | 0,218 | 0,013 |
| 9 | 0,8 | 7,85 | 29,5 | 29,4 | 0,248 | 0,013 |
| 10 | 0,9 | 8,83 | 29,2 | 29 | 0,278 | 0,013 |
| 11 | 1 | 9,81 | 28,9 | 28,8 | 0,308 | 0,013 |
| 12 | 1,1 | 10,79 | 28,6 | 28,5 | 0,328 | 0,013 |
| 13 | 1,2 | 11,77 | 28,4 | 28,2 | 0,357 | 0,013 |
| 14 | 1,3 | 12,75 | 28,1 | 27,9 | 0,397 | 0,014 |
| 15 | 1,4 | 13,73 | 27,7 | 27,6 | 0,427 | 0,014 |
| 16 | 1,5 | 14,72 | 27,4 | 27,3 | 0,447 | 0,014 |
| 17 | 1,6 | 15,70 | 27,2 | 27 | 0,477 | 0,014 |

| | | | | | | |
|----|-----|-------|------|------|-------|-------|
| 18 | 1,7 | 16,68 | 26,9 | 26,7 | 0,516 | 0,014 |
| 19 | 1,8 | 17,66 | 26,5 | 26,5 | 0,546 | 0,014 |
| 20 | 1,9 | 18,64 | 26,2 | 26,1 | 0,586 | 0,014 |
| 21 | 2 | 19,62 | 25,8 | 25,8 | 0,616 | 0,014 |
| 22 | 2,1 | 20,60 | 25,5 | 25,5 | 0,635 | 0,014 |
| 23 | 2,2 | 21,58 | 25,3 | 25,3 | 0,030 | 0,013 |

Hodnoty n_1^i sa od hodnôt n_2^i líšia maximálne o chybu meranie, pre výpočet Δl môžeme použiť hodnoty n_1^i . Odchýlka $\sigma_{\Delta l}$ udáva celkovú chybu Δl určenú ako spojenie štatistickej chyby z lineárnej regresie a chyby prenesenej z veličín vystupujúcich vo vzťahu (5) a (7).

Zo vzťahu (1) plynie, že medzi predĺžením drôtu Δl a hmotnosťou pridávaných závaží m platí lineárny vzťah

$$\Delta l = am, \quad (10)$$

kde koeficient a určíme podľa vzťahu (1) ako

$$a = \frac{l_0 g}{SE} = \frac{l_0 g}{pr^2 E}. \quad (11)$$

Lineárnou regresiou určíme koeficient závislosti a ako $a = (2,85 \pm 0,01)10^{-4} \text{ m.kg}^{-2}$. Modul pružnosti určíme podľa vzťahu (11) ako

$$E = \frac{l_0 g}{pr^2 a} \quad (12)$$

ako $E_0 = (19,4 \pm 0,2)10^{10} \text{ Pa}$ s relatívnou chybou $h_{E_0} = 1\%$, odchýlka je určená ako chyba prenesená z veličín vo vzťahu (12).

2. Metóda priehybu trámika

Zmerali sme vzdialenosť britov meracieho zariadenia ako $l = (411 \pm 3) \text{ mm}$. Mikrometrickým meradlom sme určili výšku ocelového trámika b_1 ako $b_1 = (2,97 \pm 0,01) \text{ mm}$ a výšku mosadzného trámika b_2 ako $b_2 = (1,99 \pm 0,01) \text{ mm}$. Posuvným meradlom sme určili šírku ocelového trámika a_1 ako $a_1 = (11,75 \pm 0,05) \text{ mm}$ a šírku mosadzného trámika a_2 ako $a_2 = (11,80 \pm 0,05) \text{ mm}$. Namerané hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 3: namerané rozmery trámikov

| č. mer. | ocelový trámik | | mosadzný trámik | |
|---------|----------------|-------------|-----------------|-------------|
| | a_1 [mm] | b_1 [mm] | a_2 [mm] | b_2 [mm] |
| 1 | 11,09 | 2,97 | 11,90 | 1,99 |
| 2 | 11,85 | 2,97 | 11,80 | 1,98 |
| 3 | 11,85 | 2,97 | 11,70 | 1,98 |
| 4 | 11,80 | 2,96 | 11,75 | 1,99 |
| 5 | 11,85 | 2,97 | 11,90 | 1,98 |
| 6 | 11,80 | 2,97 | 11,70 | 1,98 |
| 7 | 11,75 | 2,97 | 11,70 | 1,99 |
| 8 | 11,80 | 2,97 | 11,70 | 1,98 |
| 9 | 11,80 | 2,97 | 11,65 | 1,99 |
| 10 | 11,90 | 2,96 | 11,85 | 1,99 |
| priemer | 11,75 | 2,97 | 11,80 | 1,99 |

| | | | | |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| chyba | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|

Chybu merania vo všetkých prípadoch uvažujeme ako chybu meracieho zariadenia, štatistická chyba je oproti nej zanedbateľná.

Pre obidva trámiky sme odčítali zo stupnice hodnotu y_0 pre nezaťažovaný trámik a hodnoty y_n pri zaťažovaní aj pri odoberaní závaží. Z týchto hodnôt určíme priehyb trámika y ako $y = y_n - y_0$. Chybu určenia y_n uvažujeme 0,1 mm. Namerané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 4: namerané hodnoty priehybu oceľového a mosadzného trámika

| oceľ | | | | mosadz | | | |
|----------|-------------|------------|------------|----------|-------------|------------|------------|
| závažia | zaťažovanie | odoberanie | priehyb | závažia | zaťažovanie | odoberanie | priehyb |
| m [kg] | y_n [mm] | y_n [mm] | y_l [mm] | m [kg] | y_n [mm] | y_n [mm] | y_2 [mm] |
| 0 | 3,5 | 3,5 | 0,0 | 0 | 7,2 | 7,2 | 0,0 |
| 0,1 | 3,8 | 3,8 | 0,3 | 0,01 | 7,4 | 7,4 | 0,2 |
| 0,2 | 4,1 | 4,1 | 0,6 | 0,02 | 7,6 | 7,6 | 0,4 |
| 0,3 | 4,3 | 4,3 | 0,8 | 0,03 | 7,7 | 7,7 | 0,5 |
| 0,4 | 4,6 | 4,6 | 1,1 | 0,05 | 8,1 | 8,1 | 0,9 |
| 0,5 | 4,9 | 4,9 | 1,4 | 0,07 | 8,5 | 8,5 | 1,3 |
| 0,6 | 5,1 | 5,2 | 1,6 | 0,08 | 8,6 | 8,6 | 1,4 |
| 0,7 | 5,4 | 5,4 | 1,9 | 0,1 | 9 | 9 | 1,8 |
| 0,8 | 5,7 | 5,7 | 2,2 | 0,12 | 9,3 | 9,3 | 2,1 |
| 0,9 | 6 | 6 | 2,5 | 0,15 | 9,9 | 9,9 | 2,7 |
| chyba | | | 0,1 | | | | 0,1 |

Hodnoty y_n pre zaťažovanie trámika sa od hodnôt pre odoberanie závaží líšia maximálne o chybu meranie, pre výpočet y_1 a y_2 môžeme použiť hodnoty pre zaťažovanie. Chyba y_1 a y_2 je určená ako spojenie štatistickej chyby určenej lineárnou regresiou a chyby meracieho zariadenia.

Zo vzťahu (8) plynie, že závislosť priehybu trámika y od hmotnosti závažia je lineárna, platí teda

$$y = km, \quad (13)$$

kde koeficient k môžeme podľa vzťahu (8) určiť ako

$$k = \frac{l^3 g}{4ab^3 E}. \quad (14)$$

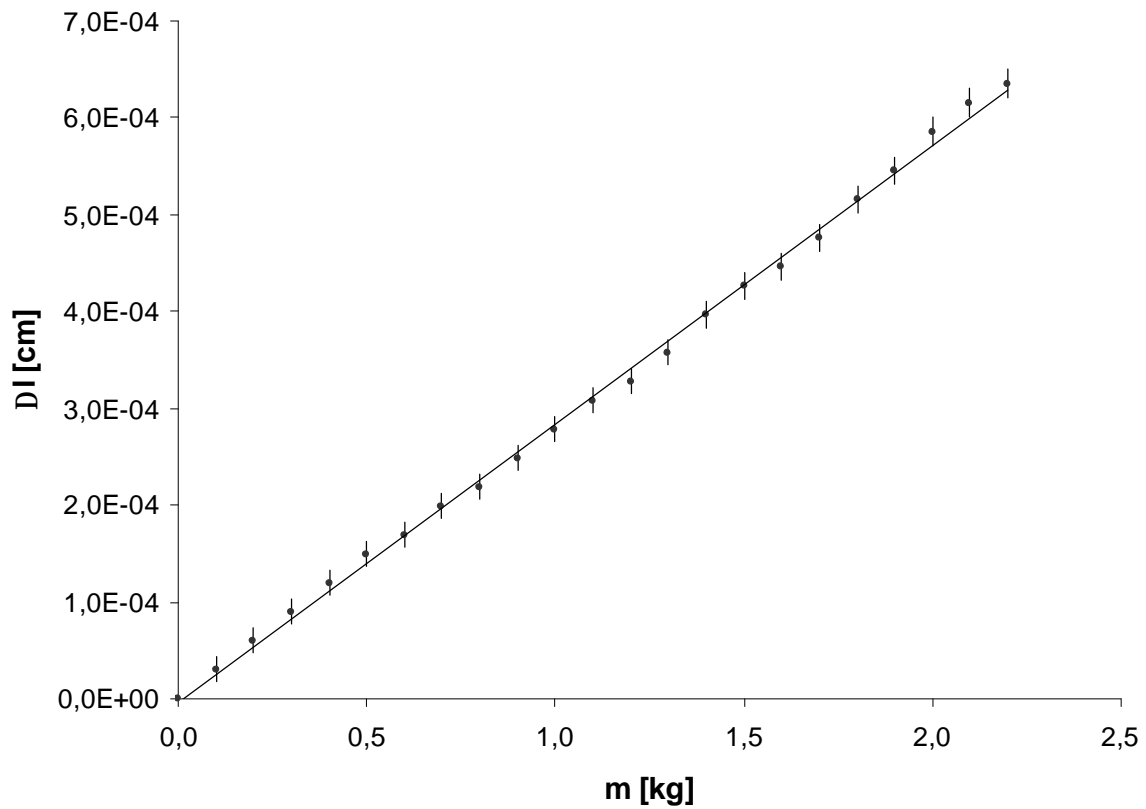
Lineárnou regresiou sme určili koeficient k_1 pre oceľový trámik ako $k_1 = (2,75 \pm 0,02)10^{-3} \text{ m.kg}^{-1}$ a koeficient k_2 pre mosadzný trámik ako $k_2 = (1,79 \pm 0,01)10^{-2} \text{ m.kg}^{-1}$. Modul pružnosti potom zo vzťahu (14) určíme ako

$$E = \frac{l^3 g}{4ab^3 k}. \quad (15)$$

Pre oceľový trámik $E_1 = (20,2 \pm 0,03)10^{10} \text{ Pa}$ s relatívnou chybou $h_{E_1} = 2\%$, pre mosadzný trámik $E_2 = (10,4 \pm 0,02)10^{10} \text{ Pa}$ s relatívnou chybou $h_{E_2} = 2\%$. Chybu E_1 a E_2 sme určili ako chybu prenesenú z veličín vo vzťahu (15).

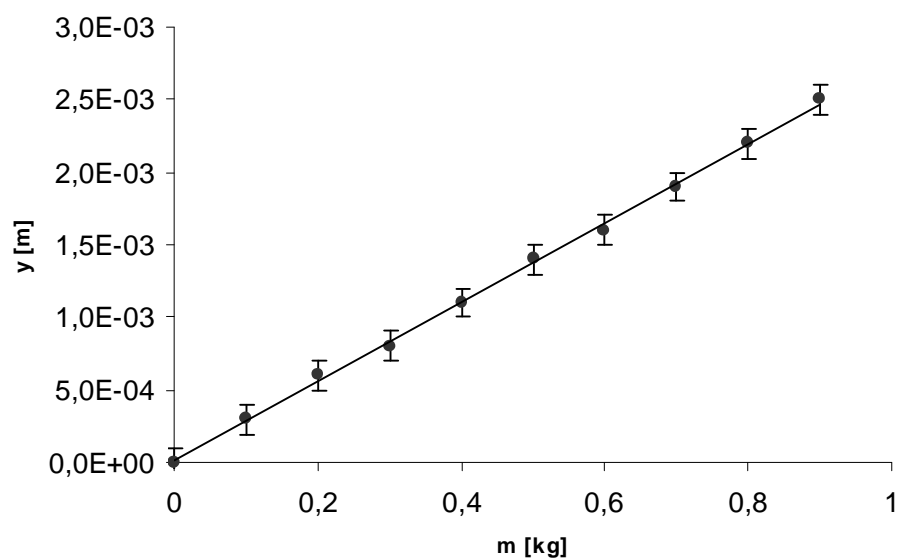
3. Grafické výsledky

Graf 1: závislosť predĺženia drôtu od hmotnosti použitých závaží



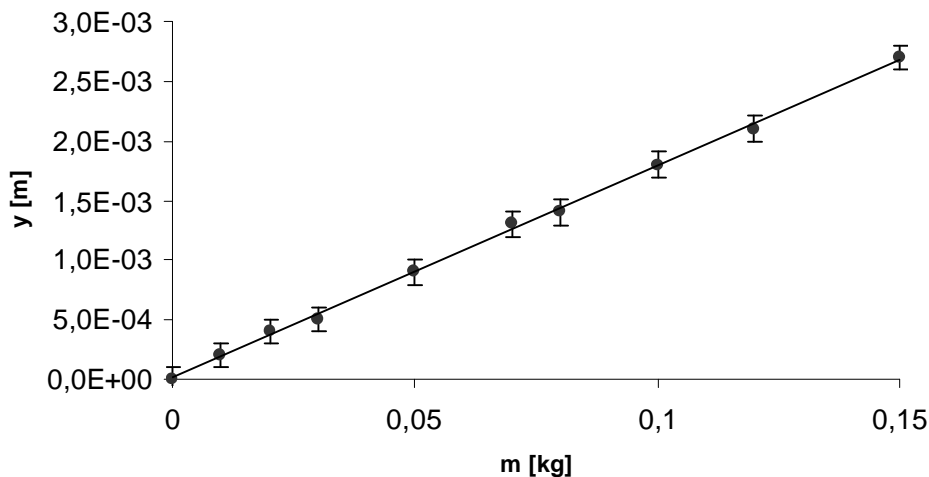
Chybové úsečky udávajú chybu $\sigma_{\Delta l}$ uvedenú v tabuľke 2. Hodnoty sú preložené krovkou určenou lineárnou regresiou.

Graf 2: závislosť priehybu ocelového trámika od hmotnosti použitých závaží



Chybové úsečky udávajú celkovú chybu y určenú ako spojenie štatistickej chyby a chyby meracieho zariadenia, uvedenú v tabuľke 4.

Graf 3: závislosť priehybu mosadzného trámika od hmotnosti použitých závaží



Chybové úsečky udávajú celkovú chybu y určenú ako spojenie štatistickej chyby a chyby meracieho zariadenia, uvedenú v tabuľke 4.

Diskusia:

Hodnoty modulu pružnosti ocele a mosadzu sú určené s relatívnou chybou okolo 2%. Na tejto chybe sa podieľa hlavne chyba veličín Δl a l_0 pri metóde predlžovania drôtu a chyba a a b pri metóde priehybu trámika.

Porovnaním nameraných hodnôt pre zaťažovanie a odoberanie závaží sa vo všetkých prípadoch líši maximálne o chybu meranie, z toho usudzujeme, že deformácia bola elastická a nedochádzalo k hysterézii. Odchýlky nameraných hodnôt od regresnej krivky sú malé (1%), teda pre danú deformáciu bol splnený Hookov zákon.

Porovnaním hodnôt modulu pružnosti drôtu E_o a modulu pružnosti ocelového trámika E_1 zistíme, že sa tieto hodnoty líšia, čomu však nemusíme prikladať veľký význam vzhľadom k tomu, že drôt a trámik mohli byť vyrobené z odlišných druhov ocele.

V tabuľkách [2] je modul pružnosti ocele udávaný ako $20\text{--}21 \cdot 10^{10}$ Pa. Nami nameraná hodnota modulu pružnosti ocelového trámika spadá do uvedeného intervalu, modul pružnosti drôtu sa však s danou hodnotou nezhoduje. Odchýlka môže byť spôsobená odlišným zložením ocele, z ktorej je vyrobený drôt. Modul pružnosti mosadze je udávaný v [2] ako $9,9 \cdot 10^{10}$ Pa, nami nameraná hodnota sa od tabuľkovej mierne líši, čo môže byť takisto spôsobené rôznymi materiálmi.

Záver:

Metódou predlžovania drôtu sme zmerali modul pružnosti ocele v ťahu ako $E_o = (19,4 \pm 0,2)10^{10}$ Pa, metódou priehybu trámika sme zmerali modul pružnosti v ťahu ocele ako $E_1 = (20,2 \pm 0,03)10^{10}$ Pa a modul pružnosti mosadze ako $E_2 = (10,4 \pm 0,02)10^{10}$ Pa. S tabuľkovou hodnotou sa zhoduje modul pružnosti ocele určený metódou priehybu trámika, odchýlky ostatných hodnôt mohli byť spôsobené rôznosťou materiálov.

Literatúra:

- [1] D. Slavínská prom.fyz., CSc., I. Stulíková, CSc., P. Vostrý, CSc.: Fyzikální praktikum I., SPN Praha 1989
- [2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980