

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

## 2 Teoretický úvod

### 2.1 Protažení drátu

Pro prodloužení  $\Delta l$  drátu kruhového průřezu o průměru  $d$  a délky  $l_1$  s Youngovým modulem pružnosti v tahu  $E$  vlivem působící síly  $F$  platí

$$\Delta l = \frac{4l_1 F}{\pi d^2 E}. \quad (1)$$

V našem případě je zatěžující síla  $F$  realizována závažími o hmotnosti  $m$ , pro které platí

$$F = mg, \quad (2)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení. Z toho pro prodloužení plyne

$$\Delta l = \frac{4l_1 mg}{\pi d^2 E}. \quad (3)$$

Pokud zrcátko, pomocí kterého probíhá měření, je připevněné na kladce o vnitřním průměru  $D$  přibližně rovnoběžně s délkovou stupnicí, které je vzdálená od zrcátka  $L$ , pak přibližně pro prodloužení platí

$$\Delta l \approx \frac{D \Delta x}{4L}. \quad (4)$$

Pokud pomocí lineární regrese zjistíme  $x' = \left| \frac{\Delta x}{\Delta m} \right|$ , pak můžeme vypočítat  $E$  ze vztahu

$$E = \frac{16}{\pi} \frac{gl_1 L}{d^2 D x'}. \quad (5)$$

### 2.2 Průhyb trámku

Youngův modul  $E$  můžeme také určovat pomocí průhybu trámku - pro průhyb platí

$$y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (6)$$

kde  $F$  je síla působící na střed trámku a realizujeme ji zase závažími,  $l$  je vzdálenost mezi břity, na kterých je trámek upevněn a  $I_p$  je plošný moment setrvačnosti průřezové plochy tyče vzhledem k vodorovné ose kolmé k délce trámku a procházející těžištěm, pro který platí

$$I_p = \frac{ab^3}{12}, \quad (7)$$

kde  $a$  je šířka trámku a  $b$  je jeho výška. Dosazením (7) do (6) a vyjádřením  $E$  získáváme

$$E = \frac{mgl^3}{4yab^3}. \quad (8)$$

Vzhledem k tomu, že z lineární regrese získáme  $y' = \left| \frac{\Delta y}{\Delta m} \right|$ , pak můžeme vypočítat  $E$  jako

$$E = \frac{gl^3}{4ab^3 y'}. \quad (9)$$

Tabulka 1: Naměřené průměry drátu a oba rozměry trámek

drát	ocel		mosaz	
$d/\text{mm}$	$a/\text{mm}$	$b/\text{mm}$	$a/\text{mm}$	$b/\text{mm}$
0,50	11,95	2,97	11,98	1,99
0,49	11,80	2,98	11,80	1,98
0,49	11,97	2,97	11,80	1,98
0,49	11,89	2,97	11,79	1,99
0,49	11,88	2,97	11,82	1,97
0,50	11,88	2,96	11,97	1,98
0,49	11,93	2,97	11,95	1,98
0,50	11,71	2,97	11,89	1,97
0,50	11,93	2,97	11,79	1,98
0,49	11,87	2,97	11,92	1,98

### 2.3 Chyba měření

Chyba měření  $s_f$  (pro veličinu  $f$ ) je určena jako

$$s_f = \sqrt{s_{stat}^2 + s_{mer}^2}, \quad (10)$$

kde  $s_{stat}$  je statistická chyba a  $s_{mer}$  je chyba měřidla. Metoda přenosu chyb je pak pro veličinu vypočtenou z  $n$  jiných naměřených veličin  $x_i$

$$s_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2} \quad (11)$$

## 3 Měření

### 3.1 Prodloužení drátu

Nejprve byl změřen průměr drátu na deseti různých místech pomocí mikrometru s chybou měřidla  $s_{mikrometr} = 0,005$  mm. Naměřené hodnoty jsou součástí tabulky č. 1. Vypočtený průměr drátu s chybou měření spočtenou podle zásad výpočtu chyb zmíněných v sekci Chyba měření je  $d = (0,494 \pm 0,007)$  mm.

Tíhové zrychlení bereme jako přesné  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ , což pro naše účely stačí (daleko větší relativní chyba plyne z určení délky protahovaného drátu.

Vnitřní průměr kladky byl měřen délkovým měřítkem s noniovou stupnicí, které má chybu měřidla  $s_{nonius} = 0,005$  cm. Vnitřní průměr kladky je tedy  $D = (3,850 \pm 0,005)$  cm.

Změřil jsem délku mezi upevněním drátu a vrškem kladky pomocí pásového metru. Hodnota této délky i s odhadem chyby je  $l_0 = (114,0 \pm 0,2)$  cm. Ovšem to není nejspíše celá délka drátu, která se uplatní při prodlužování a měření pomocí zrcátkové metody. Odhaduji, že se uplatní zhruba polovina délky drátu, která se dotýká kladky - tedy  $l_1 = l_0 + \frac{\pi}{8}D = (115,5 \pm 0,2)$  cm.

Vzdálenost od zrcátka ke stupnici byla změřena pásovým metrem, ale vzhledem k tomu, že se jednak mění úhel při měření a navíc je těžké určovat přesnou vzdálenost od dalekohledu (od které jeho části) ke zrcátku, proto je odhad chyby měření této veličiny tak velký. Vzdálenost je  $L = (82,5 \pm 1,0)$  cm.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty  $x$  na stínítku v závislosti na hmotnosti závaží  $m$ 

Zatěžování		Odlehčování	
$m/\text{kg}$	$x/\text{cm}$	$m/\text{kg}$	$x/\text{cm}$
0,0	25,00	1,2	21,50
0,1	24,70	1,1	21,80
0,2	24,35	1,0	22,05
0,3	24,05	0,9	22,30
0,4	23,75	0,8	22,60
0,5	23,45	0,7	22,85
0,6	23,20	0,6	23,10
0,7	22,90	0,5	23,40
0,8	22,65	0,4	23,70
0,9	22,40	0,3	24,00
1,0	22,10	0,2	24,35
1,1	21,80	0,1	24,70
1,2	21,55	0,0	25,05
1,3	21,30		

Naměřené hodnoty  $x$ , což je hodnota odečtená na stupnici pomocí dalekohledu, který je umístěn proti zrcátku, v závislosti na hmotnosti závaží  $m$  jsou v tabulce č. 2 a graficky jsou znázorněny v obrázku grafu č. 1. Za nulovou bereme zátěž misky, na kterou se další závaží umísťují. Vzhledem k tomu, že se nám jedná hlavně o určení změny pomocí lineární regrese, pak poloha nulové zátěže nebude mít vliv na výpočet. Chybu určení hmotnosti jednoho 100 gramového závaží bereme jako  $s_{100g} = 1\text{ g}$ . Hodnoty  $x$  byly odečítány na stupnici s dílkou po 1 mm, ale byla odhadována i na poloviny tohoto dílku, takže chyba měření pro jedno měření délky je  $s_x = 0,3\text{ mm}$ . Naměřené hodnoty jsou proloženy lineární funkcí

$$f_1(m) = A_1 m + B_1. \quad (12)$$

Hodnoty koeficientů ze statistického zpracování vychází

$$A_1 = (-2,96 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ m},$$

$$B_1 = (25,01 \pm 0,04) \text{ cm}.$$

Z toho pro naše značené přímo plyne  $x' = (-2,96 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ m}$ .

Chybu měření veličiny  $E$  určíme jako

$$s_E = \sqrt{\left(\frac{s_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_{x'}}{x'}\right)^2 \frac{16}{\pi} \frac{g l_1 L}{d^2 D x'}} \quad (13)$$

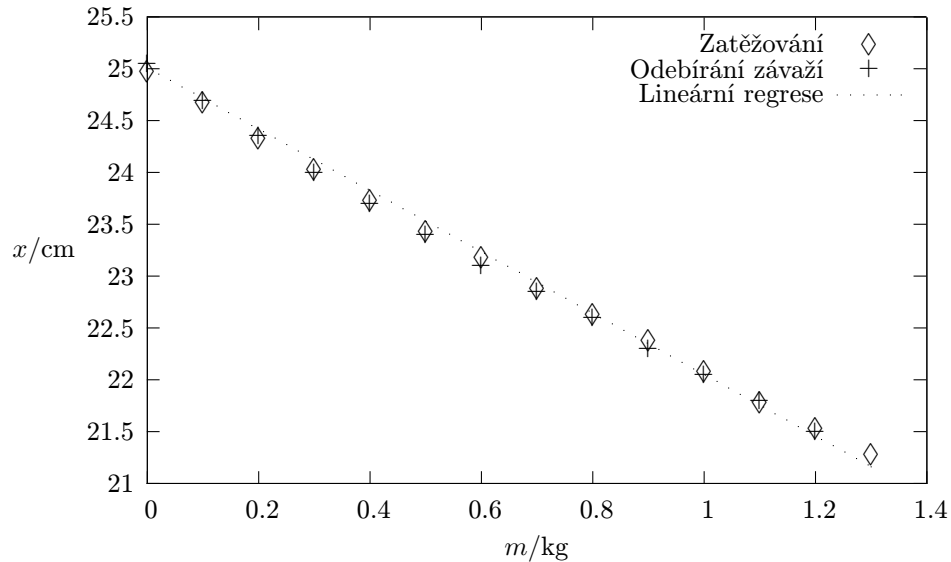
Naměřený Youngův modul pružnosti v tahu drátu je  $E_{drat} = (1,71 \pm 0,06) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ . Tabelaovaná hodnota pro ocel v [2] je  $2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  až  $2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

### 3.2 Prohnutí trámku

Déle v této sekci index  $o$  má ocelový trámek a index  $m$  trámek mosazný.

Naměřené hodnoty šířky  $a$  a výšky  $b$  průřezů trámku jsou v tabulce č. 1. Obě dvě veličiny byly měřeny mikrometrem. Konkrétní hodnoty:

$$a_o = (11,88 \pm 0,07) \text{ mm},$$

Obrázek 1: Závislost naměřené hodnoty na stupnici  $x$  a proložená lineární závislost

$$b_o = (2,970 \pm 0,007) \text{ mm},$$

$$a_m = (11,87 \pm 0,08) \text{ mm},$$

$$b_m = (1,980 \pm 0,008) \text{ mm}.$$

Prohnutí trámků bylo měřeno pomocí objektivového mikrometru, který měl jednotlivé dílky po 0,1 mm, ale měřeno bylo i na poloviny těchto dílků - chyba měřidla je tedy  $s_{om} = 0,03$  mm. Relativní chybu hodnot závaží můžeme odhadnout jako  $\eta_m = 1\%$ . Naměřené hodnoty pro ocelový trámek jsou v tabulce č. 3 a pro mosazný trámek v tabulce č. 4.

Tyto naměřené hodnoty byly zaznamenány do obrázků grafu č. 2 a grafu č. 3. Naměřené závislosti byly proloženy lineárními funkcemi

$$f_o(m) = A_o m + B_o, \quad (14)$$

$$f_m(m) = A_m m + B_m. \quad (15)$$

Z toho jsme získali hodnoty  $y'_o$  a  $y'_m$ :

$$y'_o = (2,70 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ m}$$

$$y'_m = (18,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ m}$$

Chybu měření  $E$  při metodě měření pomocí trámku určíme jako

$$E = \sqrt{\left(3 \frac{s_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(3 \frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_{y'}}{y'}\right)^2} \frac{gl^3}{4ab^3 y'} \quad (16)$$

Z předcházejících naměřených hodnot a zmíněných rovnic pak vychází

$$E_o = (2,04 \pm 0,03) \cdot 10^{11} \text{ Pa},$$

$$E_m = (1,02 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

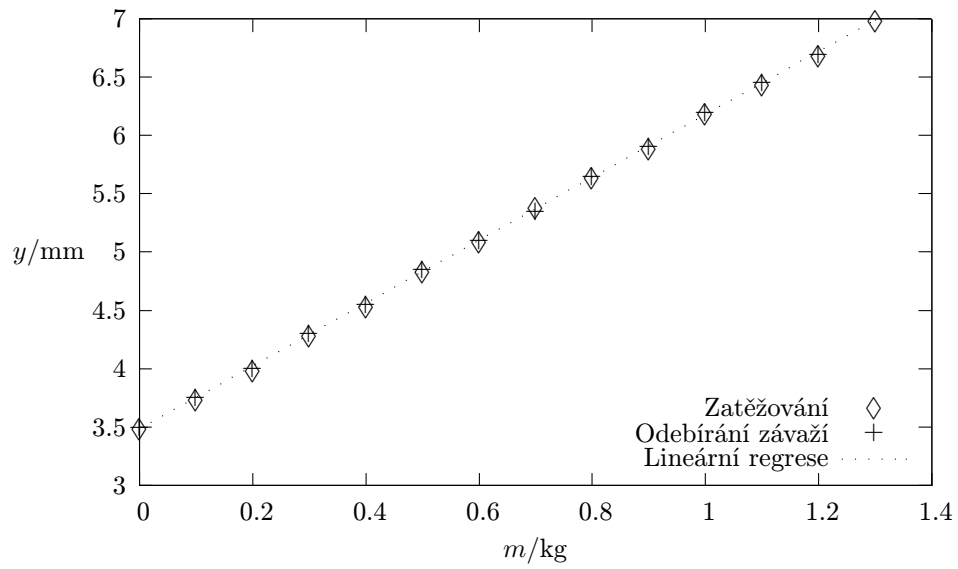
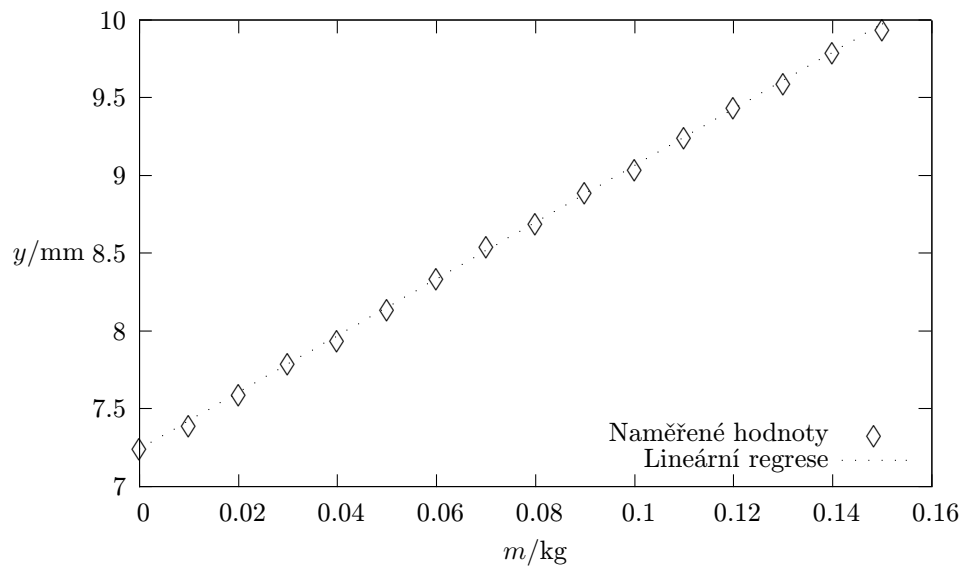
Tabelovaná hodnota pro mosaz z [2] je  $9,9 \cdot 10^{10}$  Pa.

Tabulka 3: Závislost prohnutí ocelového trámku  $y$  na hmotnosti závaží

Zatěžování		Odlehčování	
$m/\text{kg}$	$y/\text{mm}$	$m/\text{kg}$	$y/\text{mm}$
0,0	3,50	1,2	6,70
0,1	3,75	1,1	6,45
0,2	4,00	1,0	6,20
0,3	4,30	0,9	5,90
0,4	4,55	0,8	5,65
0,5	4,85	0,7	5,35
0,6	5,10	0,6	5,10
0,7	5,40	0,5	4,85
0,8	5,65	0,4	4,55
0,9	5,90	0,3	4,30
1,0	6,20	0,2	4,00
1,1	6,45	0,1	3,75
1,2	6,70	0,0	3,50
1,3	7,00		

Tabulka 4: Závislost prohnutí mosazného trámku  $y$  na hmotnosti závaží

$m/\text{kg}$	$y/\text{mm}$
0,00	7,25
0,01	7,40
0,02	7,60
0,03	7,80
0,04	7,95
0,05	8,15
0,06	8,35
0,07	8,55
0,08	8,70
0,09	8,90
0,10	9,05
0,11	9,25
0,12	9,45
0,13	9,60
0,14	9,80
0,15	9,95

Obrázek 2: Závislost naměřené hodnoty na stupnici  $y$  a proložená lineární závislostObrázek 3: Závislost naměřené hodnoty na stupnici  $y$  a proložená lineární závislost

## 4 Diskuse

Měření Youngova modulu v tahu pomocí prodloužení drátu se neshoduje s tabelovanou hodnotou, kdežto měření, která byla provedena pomocí trámku se pro ocel v rámci chyby s tabelovanou hodnotou shodují a pro mosaz je tabelovaná hodnota se odchyluje jen o necelé 1% od tabelované hodnoty.

Chyby měření mohly být způsobeny zejména tím, že měřené látky nebyly chemicky čisté a tudíž mají vlastnosti odpovídající tabelovaným hodnotám. Mohou obsahovat chemické příměsi nebo mohou být částečně zkorodované nebo mohou být nehomogenní nebo jejich materiál může být již "unavený" (zejména v případě drátu, na který mohli předcházející studenti zavěšovat příliš velké hmotnosti závaží a mohli se dostat do oblasti plastické deformace a tím změnit fyzikální vlastnosti drátu).

Dalším možným zdrojem chyby může být to, že jsme předpokládali lineární závislost, což je ovšem pouze přiblížení reálné závislosti (ale z grafů je vidět, že je to přiblížení poměrně dobré).

V případě drátu jsme mohli nesprávně určit délku, která se uplatňuje při prodlužování - je možné, že drát v kladce prokluzuje lépe, nebo hůře než jsem předpokládal.

V případě měření průhybu trámku mohlo měření ovlivnit to, že měřicí stupnice nebyla umístěna na přesném středu mezi břity.

## 5 Závěr

Naměřený Youngův modul pružnosti v tahu ocelového drátu je

$$E_{drat} = (1,71 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

Youngův modul pro ocel a mosaz měřený pomocí trámku

$$E_o = (2,04 \pm 0,03) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_m = (1,02 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

## 6 Literatura

- [1] *J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I.*  
SPN, Praha 1967
- [2] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky*  
SNTL, Praha 1980