

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I

Úloha č.IX

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Pracovala: Jana Ringelová

stud. skup. F/1-Y/15

dne 16.5.2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

Posuzoval:..... dne výsledek klasifikace

Připomínky:

Pracovní úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření zpracujte užitím lineární regrese.
4. Výsledky měření graficky znázorněte.

Teorie

Měření modulu E z protažení drátu

Působí-li na drát délky l_0 a průřezu S síla F , potom v oboru pružné deformace je prodloužení drátu Δl dáno vztahem

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S}, \quad (1)$$

kde E je modul pružnosti tahu. Po úpravě dostaneme

$$E = \frac{l_0 F}{\Delta l S}. \quad (2)$$

Drát je na jednom konci veden přes kladku poloměru r k misce, na kterou se kladou závaží. V ose kladky je upevněno zrcátko. Protažení drátu se tímto způsobem převádí na pootočení zrcátka. Úhel pootočení zrcátka $\Delta\alpha$ souvisí s prodloužením drátu vztahem

$$r\Delta\alpha = \Delta l \quad (3)$$

a měří se metodou zrcátka a stupnice. Vzhledem k velikosti úhlu pootočení zrcátka lze užít pro výpočet $\Delta\alpha$ přibližného vzorce

$$\Delta\alpha = \frac{n - n_0}{2L}. \quad (4)$$

Po dosazení dostaneme

$$E = \frac{16l_0 mgL}{D(n - n_0)\pi d^2}, \quad (5)$$

kde D je průměr drátu.

Měření modulu E z průhybu trámku

Modul pružnosti v tahu lze určovat i metodami nepřímými např. z velikosti průhybu ohýbaných tyčí. Mezi tyto metody patří i metoda měření E z průhybu trámku obdelníkového průřezu podepřeného dvěma břity ve vzdálenosti l . Při zatížení trámku uprostřed silou F se trámek prohne tak, že v působišti síly vznikne průhyb y , pro který platí

$$y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (6)$$

kde I_p je plošný moment setrvačnosti průřezové plochy tyče vzhledem k vodorovné ose, kolmé k délce trámku a procházející těžištěm. Pro obdelníkový průřez trámku výšky b , šířky a lze I_p vyjádřit vztahem $I_p = ab^3/12$. Po dosazení dostaneme

$$E = \frac{Fl^3}{4yab^3}. \quad (7)$$

Použité pomůcky a přístroje

aparatura na měření zrcátkovou metodou, aparatura na měření průhybu, měřený drát a trámek, sada závaží, pásové měřítko, posuvné měřítko, mikrometr

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	\bar{d}	$3\sigma_{\bar{d}}$
0,50	0,50	0,51	0,51	0,50	0,50	0,01

Tabulka 1: Průměry drátu v milimetrech.

Podmínky pokusu

teplota 24,7°C

Výsledky měření

Určení modulu pružnosti oceli z protažení drátu

Nejdříve jsem změřila parametry soustavy. Délku l_0 jsem určila pomocí pásového měřítka jako

$$l_0 = (114 \pm 1) \text{ cm.} \quad (8)$$

Chybu jsem určila tak velkou kvůli tomu, že není úplně zřejmé, kde je drát ve svěráku uchycen. Průměr drátu jsem určila z pěti měření na pěti různých místech. Hodnoty jsou uvedeny (včetně chyby) v tabulce 1. Výsledná hodnota je potom

$$d = (0,51 \pm 0,02) \text{ mm.} \quad (9)$$

Chybu jsem určila jako složení systematické chyby mikrometru a statistické chyby. Průměr kladky jsem určila pomocí posuvného měřítka jako

$$D = 2r = (3,87 \pm 0,05) \text{ cm.} \quad (10)$$

Délku L mezi stupnicí a zrcátkem jsem určovala pomocí pásového měřítka. Přestože nejmenší dílek měřidla je 1 mm, chybu tohoto měření považuji za podstatně větší, protože se tato vzdálenost mění podle toho, kam světlo na stupnici svítí.

$$L = (97 \pm 1) \text{ cm.} \quad (11)$$

Chybu určení dílku jsem stanovila na $s_n = 0,1$ cm vzhledem k velikosti světelné stopy a čitelnosti. Jako základ byl systém zatížen kilogramovým závažím, aby došlo k napnutí drátu. Závaží jsem nejprve přidávala po 100 g v rozmezí 100–2800 g a potom jsem zpátky ubírala na 0 g. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 2. Vztah (5) upravíme do tvaru

$$\Delta n = \frac{16l_0gL}{ED\pi d^2}m. \quad (12)$$

To je lineární závislost výchylky $\Delta n = n - n_0$ na hmotnosti m závaží ve tvaru $n = Am + C$ Konstantu A jsem si nechala spočítat programem Matlab, získala jsem tento výsledek (počítám absolutní hodnotu)

$$A = (2,82 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}. \quad (13)$$

Chyba odpovídá 95% intervalu spolehlivosti. Odhaduje se z rozptylu dat kolem regresní přímky. Ze vztahu (5) již snadno vyjádříme modul pružnosti E pomocí A ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

$$E = \frac{16l_0gL}{AD\pi d^2}. \quad (14)$$

$m[\text{kg}]$	$n[\text{cm}]$ – zatěžovací	$n[\text{cm}]$ – odlehčovací	$\bar{n}[\text{cm}]$ – průměr
0	21.3	21.2	21.25
0.1	21.1	20.9	21.00
0.2	20.8	20.6	20.70
0.3	20.4	20.3	20.35
0.4	20.1	20.0	20.05
0.5	19.8	19.7	19.75
0.6	19.6	19.4	19.50
0.7	19.2	19.2	19.20
0.8	19.0	18.8	18.90
0.9	18.7	18.6	18.65
1.0	18.4	18.3	18.35
1.1	18.2	18.0	18.10
1.2	17.8	17.7	17.75
1.3	17.6	17.5	17.55
1.4	17.2	17.2	17.20
1.5	17.0	16.9	16.95
1.6	16.7	16.7	16.70
1.7	16.4	16.3	16.35
1.8	16.2	16.1	16.15
1.9	15.9	15.8	15.85
2.0	15.6	15.5	15.55
2.1	15.3	15.3	15.30
2.2	15.0	15.0	15.00
2.3	14.8	14.7	14.75
2.4	14.5	14.4	14.45
2.5	14.2	14.1	14.15
2.6	13.9	13.9	13.90
2.7	13.6	13.6	13.60
2.8	13.3	13.3	13.30

Tabulka 2: Naměřené hodnoty prodloužení drátu.

Hodnota E přibližně vychází $E = 195$ GPa. Pro výpočet chyby můžeme použít Gaussův zákon hromadění chyb ve tvaru

$$\delta_E = \delta_{l_0} + \delta_L + \delta_A + \delta_D + 2\delta_d \quad (15)$$

Numericky vychází přibližně $\delta_E = 12\%$. Výsledek potom můžeme psát ve tvaru

$$E = (195 \pm 23) \text{ GPa}. \quad (16)$$

Určení modulu pružnosti z průhybu trámku

Začala jsem měřením paramterů soustavy. Vzdálenost břitů jsem určila pomocí pásového měřítka jako

$$l = (41,1 \pm 0,1) \text{ cm}. \quad (17)$$

Dále jsem si změřila parametry měřených trámků. Šířku trámků jsem měřila posuvným měřítkem a výšku mikrometrem, každé na pěti místech s hodnotami uvedenými v tabulkách 4 a 3.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	\bar{a}	$3\sigma_{\bar{a}}$
11,8	12,0	11,7	11,9	11,9	11,9	0,2
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	\bar{b}	$3\sigma_{\bar{b}}$
1,99	1,98	1,97	1,98	1,98	1,98	0,01

Tabulka 3: Rozměry mosazného trámku v milimetrech.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	\bar{a}	$3\sigma_{\bar{a}}$
12,0	11,8	12,0	11,9	11,8	11,9	0,1
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	\bar{b}	$3\sigma_{\bar{b}}$
2,95	2,97	2,96	2,97	2,975	2,96	0,01

Tabulka 4: Rozměry ocelového trámku v milimetrech.

Vzhledem k přesnosti měřidel jsem rozměry mosazného trámku určila jako

$$a = (11,9 \pm 0,3) \text{ mm} \quad b = (1,98 \pm 0,02) \text{ mm.} \quad (18)$$

a ocelového trámku jako

$$a = (11,9 \pm 0,2) \text{ mm} \quad b = (2,96 \pm 0,02) \text{ mm.} \quad (19)$$

Poté jsem měřila průhyb trámku v závislosti na hmotnosti závaží, které jsem použila jako zátěž, a to při přidávání i při ubírání závaží. Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 5 a 6. Chybu odečtení y ze stupnice odhaduji na $s_y = 0,1 \text{ mm}$.

m [g]	y [mm] – zatěžování	y [mm] – odtěžování	y [mm] – průměr
0	3.6	3.6	3.6
50	3.7	3.7	3.7
100	3.9	3.8	3.85
150	4.0	4.0	4.0
200	4.1	4.1	4.1
300	4.4	4.4	4.4
400	4.6	4.7	4.65
500	4.9	4.9	4.9

Tabulka 5: Naměřené hodnoty prohnutí ocelového trámku.

K určení modulu pružnosti jsem opět použila lineární regresi. Vydeme ze vztahu (7) ve tvaru

$$y = \frac{gl^3}{4Eab^3}m = Bm + C. \quad (20)$$

m [g]	y [mm] – zatěžování	y [mm] – odtěžování	y [mm] – průměr
0	7.3	7.3	7.3
10	7.5	7.5	7.5
20	7.7	7.7	7.7
30	7.8	7.9	7.85
40	8.0	8.1	8.05
50	8.2	8.2	8.2
60	8.4	8.4	8.4
70	8.6	8.6	8.6
80	8.8	8.7	8.75
90	8.9	8.9	8.9
100	9.1	9.1	9.1

Tabulka 6: Naměřené hodnoty prohnutí mosazného trámku.

kde C je počáteční výchylka (stupnice není v nule při nulovém zatížení). Program Matlab určil koeficienty regrese

$$B_1 = (2,64 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1} \quad B_2 = (1,78 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}, \quad (21)$$

kde první index značí ocel a druhý mosaz. Pro modul pružnosti potom bude platit

$$E = \frac{gl^3}{4ab^3B}. \quad (22)$$

Po dosazení dostaneme $E_1 = 209$ GPa a $E_2 = 104$ GPa. Chybu určíme podle Gaussova zákona hromadění chyb

$$\delta_E = 3\delta_l + \delta_a + 3\delta_b + \delta_B. \quad (23)$$

Numericky vychází $\delta_{E_1} = 7,8\%$ a $\delta_{E_2} = 8,5\%$. Výsledné hodnoty tedy jsou pro ocel

$$E = (209 \pm 16) \text{ GPa}$$

a pro mosaz

$$E = (104 \pm 9) \text{ GPa}.$$

Diskuse

Chyby měření

Kromě již započítaných chyb bylo měření zatíženo i dalšími nepřesnostmi. Jde například o hmotnosti závaží. Ačkoli byla závaží oceňchovaná na 100 g, zjistila jsem jisté odchylky. Dávají chybu asi 0,2%, což je chyba daleko menší než je chyba výsledku, takže nebude hrát velkou roli. Měření průhybu mosazného trámku koplikoval jednak malý rozsah stupnice (mohla jsem jej zatěžovat pouze do 300 g), jednak kmitání trámku, jež nebylo snadné zastavit.

Je vidět, že při všech měřeních se hodnoty naměřené při přidávání závaží v rámci chyby shodují s hodnotami naměřenými při ubírání závaží. Ověřila jsem tím, že nebyla překročena

mez plasticity.

Tabulkové hodnoty podle [2] se pohybují mezi 200 – 210 GPa pro ocel a $E = 99$ GPa pro mosaz. Naměřené hodnoty se tedy v rámci chyb měření shodují s tabulkovými hodnotami.

Závěr

Při laboratorní teplotě 25°C jsem metodou založenou na prodloužení drátu naměřila jeho modul pružnosti v tahu

$$E = (195 \pm 23) \text{ GPa.} \quad (24)$$

Z průhybu trámku vyšel modul pružnosti oceli

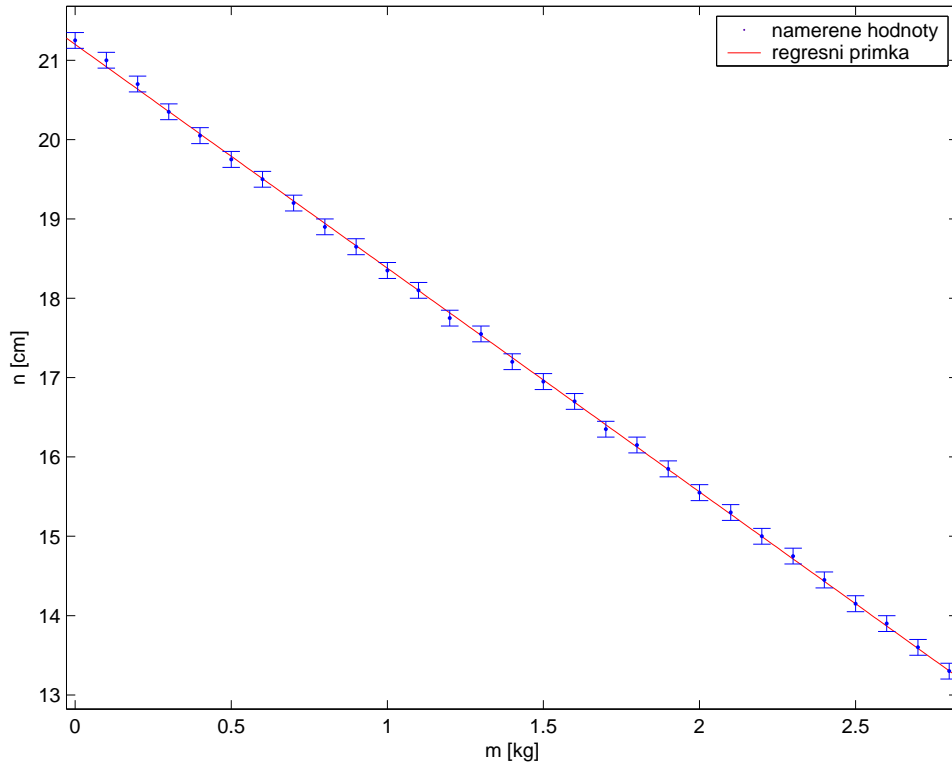
$$E = (209 \pm 16) \text{ GPa.} \quad (25)$$

a modul pružnosti mosazi

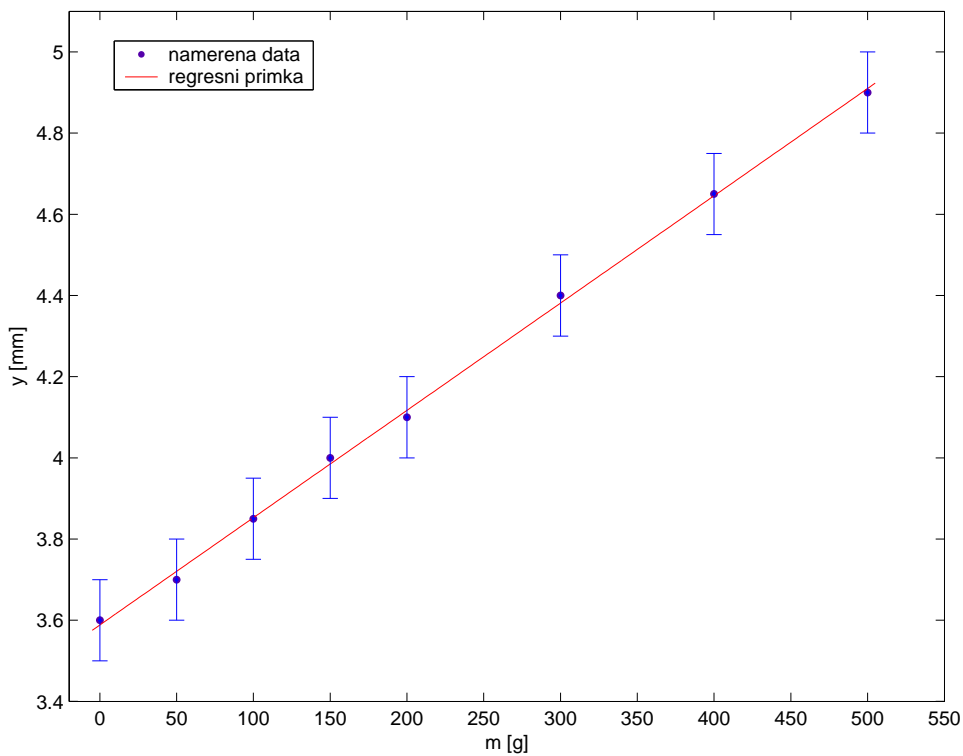
$$E = (104 \pm 9) \text{ GPa.} \quad (26)$$

Reference

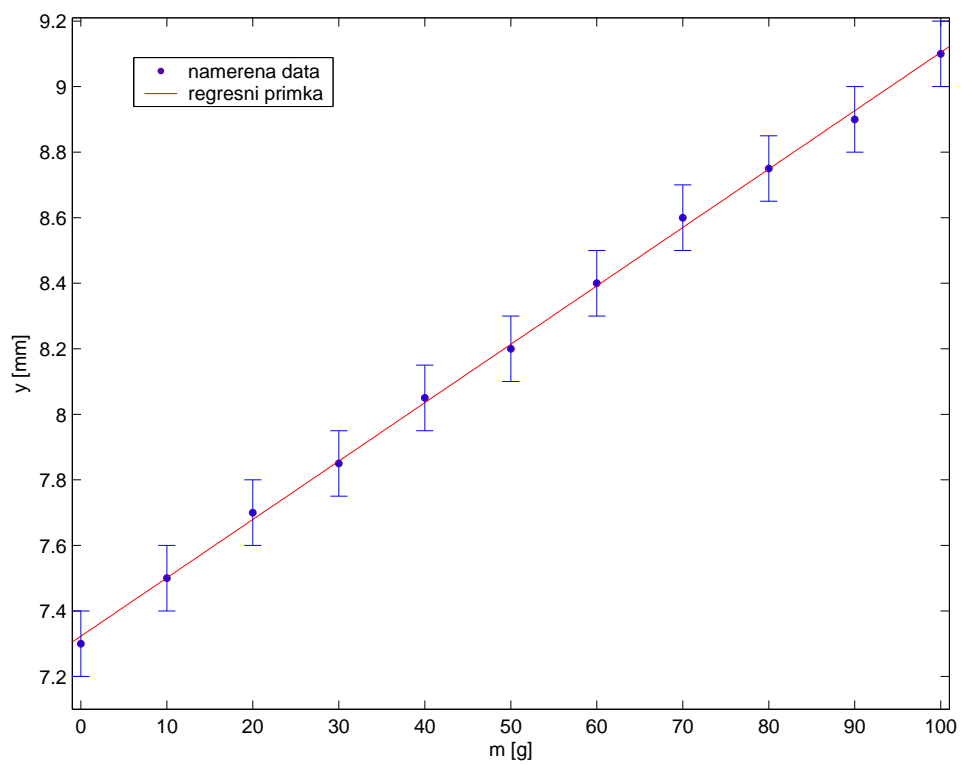
- [1] Studijní text k Fyzikálnímu praktiku I, úloha IX
<http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt109.pdf>
- [2] J.Brož, V.Roskovec, M.Valouch: Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980
- [3] kolektiv: Tabulky matematicko-fyzikální, Prometheus, 1988
- [4] Bohumil Vybíral: Zpracování dat fyzikálních měření, MAFY Hradec Králové 2002
- [5] J.Englich : Zpracování výsledků fyzikálních měření, MFF UK, 2000



Obrázek 1: Závislost prodloužení drátu na jeho zatížení. Na svislé ose jsou vyneseny délky stupnice dalekohledu.



Obrázek 2: Průhyb ocelového trámku.



Obrázek 3: Průhyb mosazného trámku.