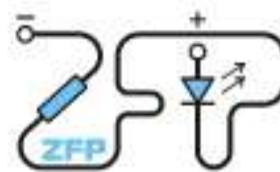


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

## Fyzikální praktikum ...



Úloha č. ....

Název úlohy: .....

Jméno: ..... Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření: .....

Datum odevzdání: .....

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval:.....

dne: .....

# 1 Pracovní úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete pomocí lineární regrese.

# 2 Teoretická část

Působíme-li na drát délky  $l_0$  o průřezu  $S$  silou  $F$ , dochází k deformaci drátu a jeho prodloužení o  $\Delta l$ . Pokud tak působíme v oboru pružné deformace, lze prodloužení vyjádřit jako [1]

$$\Delta l = \frac{l_0 F}{E \cdot S}, \quad (1)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu, který lze zadefinovat jako

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{l_0 F}{\Delta l \cdot S}, \quad (2)$$

$\sigma$  je napětí a  $\varepsilon$  relativní prodloužení. V našem měření budeme působit silou danou tíhou závaží, tedy  $F = m \cdot g$ , kde  $m$  je hmotnost závaží a  $g$  místní tíhové zrychlení. Budeme uvažovat  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

U drátu budeme předpokládat kruhový průřez, tedy

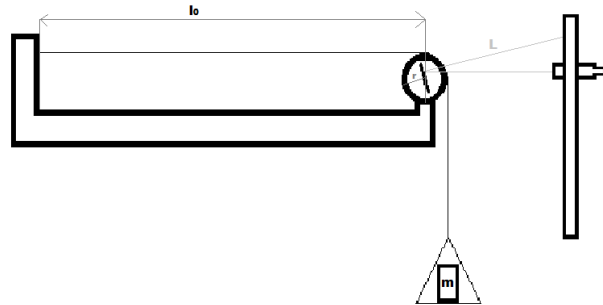
$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (3)$$

Pro měření metodou přímou využijeme aparaturu se zrcátkem, na které je drát veden přes kladku o poloměru  $r$  s upevněným zrcátkem. V zrcátku uvidíme stupnici vzdálenou  $L$  od zrcátka, na které odečteme dílek  $n_0$ . Při prodloužení drátu dojde k otočení kladky a tedy k posunu obrazu stupnice, odečtením změny na stupnici dostaneme změnu úhlu  $\Delta\alpha$ . Protože změna úhlu bude malá, lze jí aproximovat jako

$$\Delta\alpha = \frac{n_0 - n}{2L}. \quad (4)$$

Označíme-li  $\Delta n = n_0 - n$ , dostáváme pomocí  $\Delta l = r\Delta\alpha$  závislost

$$\Delta n = \frac{8Ll_0 mg}{\pi d^2 r E}. \quad (5)$$



Obr. 1 Experimentální aparatura pro přímé měření modulu pružnosti v tahu

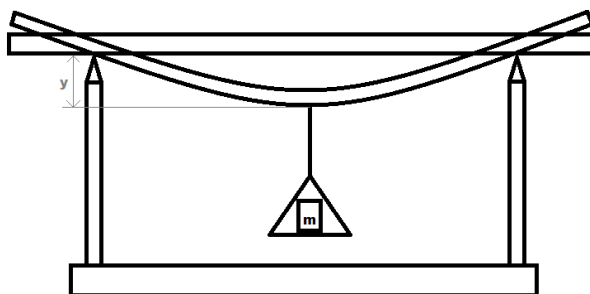
Lineární regresí předepsanou rovnicí

$$\Delta n = k_1 m \quad (6)$$

pak dopočítáme modul pružnosti v tahu z rovnice

$$E = \frac{8Ll_0g}{\pi d^2 r k_1}. \quad (7)$$

Dále změříme modul pružnosti v tahu dvou trámků metodou nepřímou, budeme měřit průhyb  $y$  trámku obdélníkového průřezu s šířkou  $a$  a výškou  $b$  podepřeného dvěma břity ve vzdálenosti  $l$  při zatížení ve středu silou  $F$ . Pro tuto situaci platí



Obr. 2 Experimentální aparatura pro nepřímé měření modulu pružnosti v tahu

$$y = \frac{Fl^3}{4Eab^3}, \quad (8)$$

označíme-li

$$\Delta y = y - y_0, \quad (9)$$

kde  $y_0$  představuje prohnutí ke kterému dochází vlastní tíhou a tíhou misky na závaží, tj. prohnutí při  $m = 0$  g, můžeme pak pomocí metody lineární regrese s rovnicí

$$\Delta y = k_2 m \quad (10)$$

vyjádřit modul pružnosti v tahu jako

$$E = \frac{gl^3}{4k_2 ab^3} \quad (11)$$

### 3 Výsledky měření

#### Podmínky experimentu

Měření bylo provedeno za teploty 23,8 °C, při atmosférickém tlaku 978,5 hPa a relativní vlhkosti vzduchu 25,0%.

#### Protahování drátu

Původní délka ocelového drátu  $l_0$  byla změřena pomocí pásového měřidla a posuvného měřidla, pásovým měřidlem byl změřen upevněný drát i s kladkou, posuvným měřidlem změřen průměr kladky  $2r$  a od hodnoty naměřené pásovým měřidlem byl odečten poloměr kladky  $r$ , z předpokladu že drát na kladku dosedá v nejvyšším bodě.

Vzdálenost  $L$  zrcátka od stupnice byla změřena pásovým měřidlem. U obou délek  $l_0$  a  $L$  je nutné nadhodnotit chybu, v prvním případě kvůli špatně určitelným místům úchyty a dosednutí na kladku, v druhém případě kvůli nemožnosti přesně určit vzdálenost stupnice od zrcátka (tzn. nemožnosti přesně ji definovat jako vzdálenost dvou bodů) a kvůli mírným změnám v této vzdálenosti v závislosti na natočení zrcátka.

Průměr kladky  $2r$  byl měřen pro různá natočení kladky posuvným měřidlem, nepřesnost měřidla je  $\sigma_{2r} = 0,05$  mm, naměřené hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty průměru kladky

$2r$ [mm]	38,45	38,50	38,45	38,35	38,45
-----------	-------	-------	-------	-------	-------

Průměr drátu byl měřen na různých místech pomocí mikrometru. Nepřesnost měřidla je  $\sigma_d = 0,005$  mm. Naměřené hodnoty jsou v následující tabulce.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty průměru drátu

$d$ [mm]	0,51	0,51	0,52	0,51	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52
----------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Výsledky měření jsou v tabulce 3.

Tabulka 3: Naměřené hodnoty  $l_0, L, r, d$

$l_0$ [cm]	$L$ [cm]	$r$ [mm]	$d$ [mm]
$115 \pm 1$	$89 \pm 1$	$19,23 \pm 0,03$	$0,509 \pm 0,005$

Chyby  $\sigma_{l_0}$  a  $\sigma_L$  byly odhadnuty na základě možné systematické chyby měření. Chyby  $\sigma_r$  a  $\sigma_d$  byly spočteny jako odmocnina ze součtu kvadrátu chyby přístroje a kvadrátu výběrové směrodatné odchylky.

Drát byl napínán postupným zatěžováním závažími o hmotnosti 100 g, nejprve byla závaží přidávána, poté odebrána. Tím se zároveň ověřilo, že se stále nacházíme v

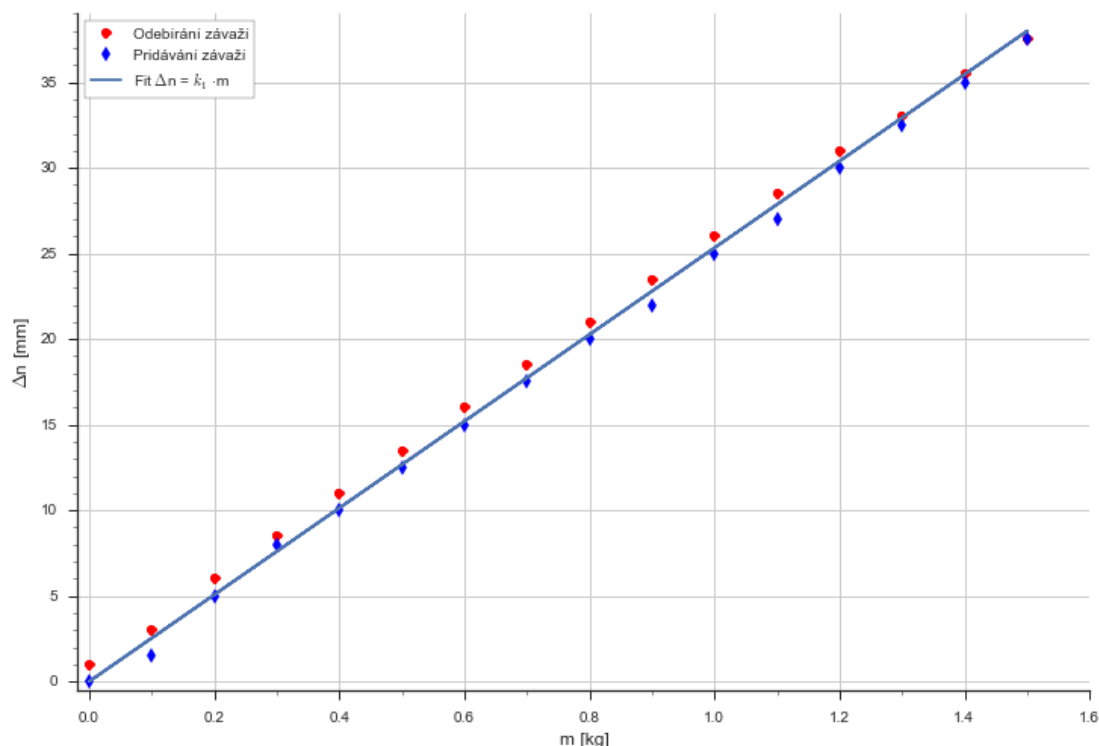
oblasti pružné deformace. Hodnoty odečtené ze stupnice jsou v Tabulce 4, chyba měření je daná nepřesností měřidla, tj.  $\sigma_n = 0,5 \text{ mm}$ .

Tabulka 4: Naměřené hodnoty na stupnici při zatěžování lanka

Celkové závaží - $m$ [g]	Zatěžování - $n$ [cm]	Odlehčování - $n$ [cm]
0	21,60	21,50
100	21,45	21,30
200	21,10	21,00
300	20,80	20,75
400	20,60	20,50
500	20,35	20,25
600	20,10	20,00
700	19,85	19,75
800	19,60	19,50
900	19,40	19,25
1000	19,10	19,00
1100	18,90	18,75
1200	18,60	18,50
1300	18,35	18,30
1400	18,10	18,05
1500	17,85	17,85

Předpokladem lineární regrese je zanedbatelná chyba veličiny na ose  $x$ . Závaží byla převážena na analytických vahách a od jejich udávané hodnoty se lišily řádově nejvýše o  $10^{-1} \text{ g}$ , chybu tedy lze považovat za zanedbatelnou. Z naměřených hodnot byly vypočteny příslušné hodnoty  $\Delta n$ , které jsou spolu s lineární regresí podle rovnice (6) zobrazeny v Grafu 1. Jako chybu koeficientu získaného lineární regresí bereme statistickou chybu fitu.

Graf 1: Závislost prodloužení ocelového lanka na zatížení



Chybové úsečky nejsou pro přehlednost zobrazeny

Parametr lineární regrese byl určen jako  $k_1 = (25,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Modul pružnosti nyní dopočteme z rovnice (7) a chybu výsledku určíme ze zákona šíření chyb [2] jako

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_1}}{k}\right)^2} \quad (12)$$

a dostáváme  $E = (20,3 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ . Relativní chyba přímého měření modulu pružnosti je  $\delta_E = 2,7\%$ .

### Nepřímé měření

Vzdálenost břitů byla změřena pomocí pásového měřidla s nejmenším dílkem 1 mm jako  $l = (41,0 \pm 0,1) \text{ mm}$ .

Naměřené hodnoty šířky  $a$  a výšky  $b$  trámků jsou v tabulce Tabulce 5. Šířka  $a$  byla měřena pomocí posuvného měřítka, výška  $b$  byla měřena mikrometrem, chyby měření jsou dány chybou přístroje, tedy  $\sigma_a = 0,05 \text{ mm}$  a  $\sigma_b = 0,005 \text{ mm}$ .

Tabulka 5: Naměřené hodnoty šířek a výšek ocelového a mosazného trámku.

$a_{ocel}$ [mm]	$b_{ocel}$ [mm]	$a_{mosaz}$ [mm]	$b_{mosaz}$ [mm]
12,00	1,96	12,10	1,98
12,00	1,96	12,00	1,98
12,00	1,96	11,95	1,99
12,05	1,95	12,0	1,98
12,10	1,96	11,95	1,98
12,05	1,96	12,00	1,98
12,00	1,96	12,10	1,98
12,00	1,95	12,00	1,99
12,05	1,96	12,00	1,98
11,95	1,95	12,00	1,99

Celkově tedy dostáváme  $a_{ocel} = (12,02 \pm 0,05)$  mm,  $b_{ocel} = (1,96 \pm 0,01)$  mm,  $a_{mosaz} = (12,01 \pm 0,05)$  mm,  $b_{mosaz} = (1,98 \pm 0,01)$  mm. Odchytky byly spočteny jako odmocnina součtu kvadrátu chyby měřicího přístroje a kvadrátu výběrové směrodatné odchytky.

Trámky byly postupně zatíženy příslušnými závažími, poté byla závaží postupně odebírána. Naměřené hodnoty  $y_o$  prohnutí ocelového trámku a  $y_m$  prohnutí mosazného trámku jsou v Tabulce 6. Chyba měření odpovídá chybě aparatury, tedy  $\sigma_y = 0,05$  mm.

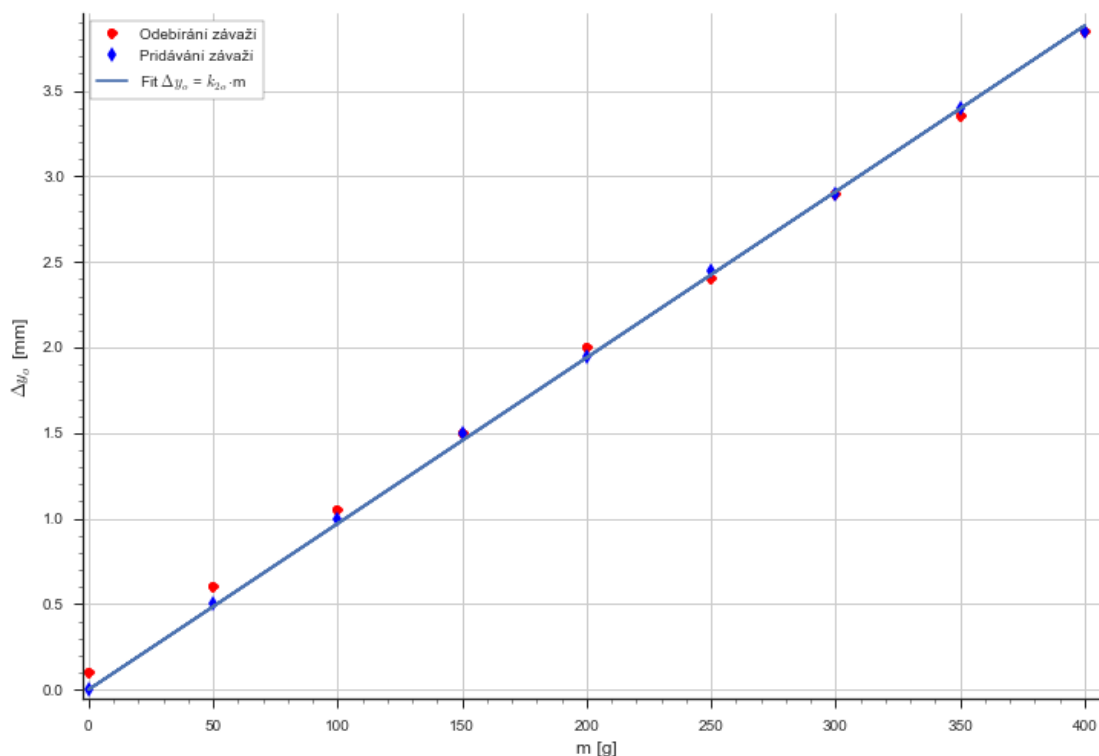
Tabulka 6: Naměřené hodnoty prohnutí obdélníkových trámků z oceli a mosazi

$m$ [g]	Přidávání $y_o$ [mm]	Odebírání $y_o$ [mm]	$m$ [g]	Přidávání $y_m$ [mm]	Odebírání $y_m$ [mm]
0	4,5	4,6	0	2,2	2,3
50	5,0	5,1	20	2,6	2,65
100	5,5	5,55	40	2,95	3,0
150	6,0	6,0	60	3,4	3,4
200	6,45	6,5	80	3,7	3,75
250	6,95	6,9	100	4,1	4,1
300	7,40	7,4	120	4,5	4,5
350	7,9	7,85	140	4,8	4,8
400	8,35	8,35	160	5,2	5,2

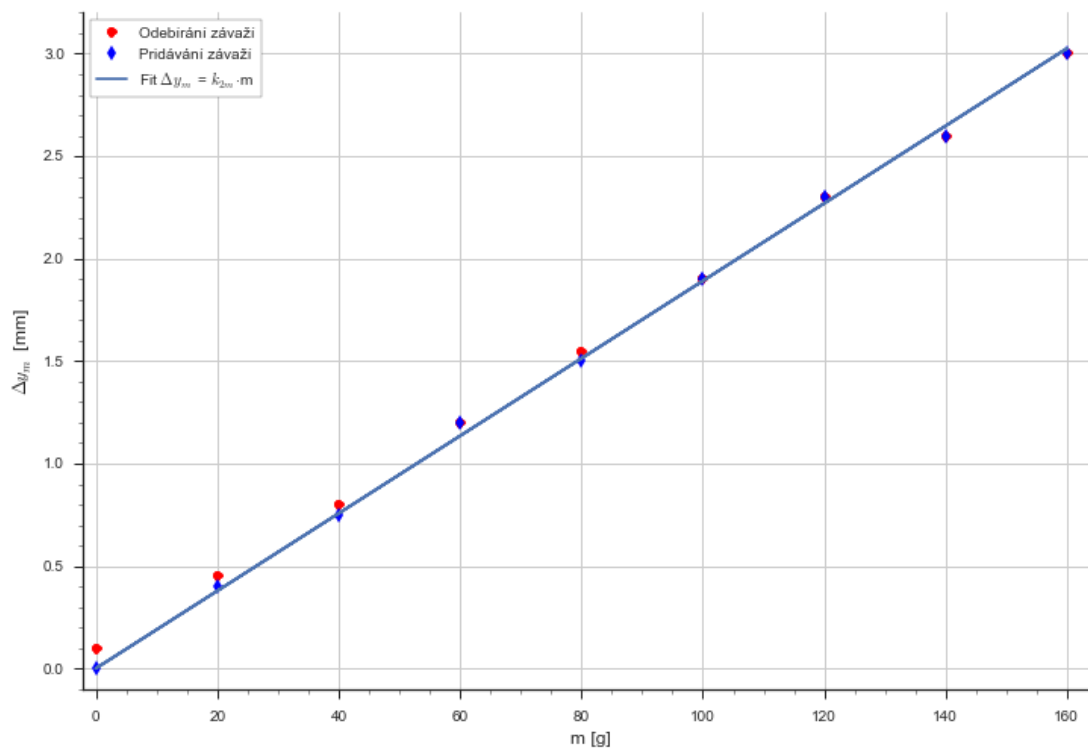
Opět byla ověřena zanedbatelná chyba hmotnosti použitých závaží, z naměřených hodnot  $y_o$  a  $y_m$  tedy vyjádříme pomocí vzorce (9) příslušné  $\Delta y_o$  pro ocel a  $\Delta y_m$  pro mosaz a provedeme lineární regresi předepsanou rovnicí (10) pro jednotlivé

materiály. Graf 2 ukazuje závislost prohnutí ocelového trámku a Graf 3 ukazuje závislost prohnutí mosazného trámku.

Graf 2: Závislost prohnutí ocelového trámku na zatížení



Graf 3: Závislost prohnutí mosazného trámku na zatížení



Chybové úsečky nejsou pro přehlednost zobrazeny.

Koeficienty lineární regrese pro jednotlivé materiály a příslušné chyby fitu byly



určeny jako  $k_{2o} = (9,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$  pro ocel a  $k_{2m} = (18,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$  pro mosaz. Ze vztahu (11) byly dopočteny příslušné moduly pružnosti, chyba výsledku byla určena ze zákona šíření chyb

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{3\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_2}}{k_2}\right)^2}. \quad (13)$$

Pro ocelový trámek dostáváme  $E_o = (19,3 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  a pro mosazný trámek  $E_m = (9,5 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ . Relativní chyba měření ocelového trámku je  $\delta_{E_o} = 1,8\%$ , relativní chyba měření mosazného trámku je  $\delta_{E_m} = 1,9\%$ .

## 4 Diskuze

Naměřené hodnoty se od tabulkových [3], které udávají hodnotu modulu pružnosti v tahu pro ocel v rozmezí  $20 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  až  $21 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  a hodnotu modulu pružnosti v tahu mosazi jako  $9,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ , liší v rozmezí  $2\sigma$ . Přesnější porovnání s tabelovanými hodnotami není možné, protože není známé přesné složení ani obsah nečistot měřených materiálů, což jsou vlastnosti, které mají na výsledné hodnoty výrazný vliv.

Vzniklá chyba měření přímého byla způsobena zejména nepřesně změřenou vzdáleností zrcátka od stupnice a původní délkou lanka. Odlišnost hodnot naměřených při přidávání a ubírání závaží mohla být způsobena prokluzováním kladky pod lankem, což do výsledné hodnoty vneslo další chybu. Aproximace použitá v odvození vzorců vnáší do určené hodnoty pouze minimální chybu, v rámci úhlů o které se zrcátko pootočilo se funkční hodnoty liší od aproximovaných o méně než  $0,01\%$ . U nepřímého měření docházelo po přidání závaží k výrazným kmitům, které často znemožňovaly přesné odečtení hodnoty. Zároveň při přidávání a odebrání závaží docházelo k mírným posunutím trámku na aparatuře a musela se znovu zaostřovat optická část aparatury sloužící k odečítání hodnot. Mohlo tak dojít k chybě naměřených hodnot, což by vysvětlovalo různé hodnoty pro stejné hmotnosti při přidávání a při odebrání závaží.

Také je nutné zvážit možnou únavu materiálu, která má vliv na deformační vlastnosti. Podmínky v laboratoři lze po dobu měření považovat za konstantní a mají zanedbatelný vliv.

## 5 Závěr

Přímou metodou byl naměřen modul pružnosti v tahu ocelového lanka  $E = (20,3 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

Nepřímou metodou byl naměřen modul pružnosti v tahu ocelového trámku  $E_o = (19,3 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  a mosazného trámku  $E_m = (9,5 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

Naměřené hodnoty se od tabulkových liší nejvýše o  $2\sigma$ .

## 6 Literatura

- [1] Měření modulu pružnosti v tahu. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-04-01]. Dostupné online: [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_109.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_109.pdf)
- [2] J. Englich, Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. MATFYZPRESS, Praha 2006, ISBN 80-86732-93-2.
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch. Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980