

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I.

Úloha č. VIII

Název: Kalibrace odporového teploměru a termočlánku – fázové přechody

Pracoval: Pavel Ševeček

stud. skup.: F/F1X/11

dne: 25. 2. 2012

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval:..... dne .....

# 1 Pracovní úkol

1. Okalibrujte pomocí bodu tání ledu, bodu varu vody a bodu tuhnutí cínu:
  - (a) platinový odporový teploměr (určete konstanty  $R_0$ ,  $A$ ,  $B$ ).
  - (b) termočlánek měď-konstantan (určete konstanty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ )
2. Registrujte časový průběh termoelektrického napětí termočládku  $\varepsilon(\tau)$  a odporu platinového teploměru  $R(\tau)$  při ohřevu a varu vody a při tuhnutí cínu. Změřené průběhy graficky znázorněte.
3. Nakreslete graf teplotní závislosti odporu  $R$  (kalibrační křivka odporového teploměru) a graf teplotní závislosti termoelektrického napětí  $\varepsilon$  (kalibrační křivka termočládku).
4. Ze závislostí  $\varepsilon(\tau)$  a  $R(\tau)$  dle bodu 2 a kalibračních hodnot dle bodu 1 určete časové závislosti  $t_R(\tau)$  a  $t_\varepsilon(\tau)$  teplot měřených odporovým teploměrem a termočládkem při ohřevu vody a tuhnutí cínu. Určené závislosti porovnejte.

## 2 Teorie

Máme k dispozici dva různé nekalibrované teploměry - odporovou trubici a termočlánek. Naší snahou je tyto teploměry kalibrovat. V obou případech předpokládáme, že měřená veličina je na teplotě závislá kvadraticky (viz vztahy níže). Pro určení polynomu (nejvýše) druhého stupně tedy potřebujeme zjistit tři hodnoty veličiny při známých teplotách. Za tyto výchozí teploty volíme teploty fázových přechodů, protože tyto teploty známe a můžeme jednoduše realizovat prostředí o teplotě fázového přechodu.

Při ochlazování (resp. oteplování) látky klesá (resp. roste) její teplota, dokud látka nedosáhne teploty fázového přechodu. Při následném odebrání (resp. dodávání) tepla se teplota nemění<sup>1</sup>, teplo se spotřebovává na změnu skupenství, dle [1]. Tento bod tedy můžeme jednoduše určit, neboť teplota látky se přestane měnit a tedy přestane klesat (resp. růst) i měřená veličina.

Za výchozí teploty volíme bod tání ledu  $t_1$ , bod varu vody  $t_2$  a bod tání cínu  $t_3$ . Za standardních podmínek je  $t_1 = 0$  °C. Teplota  $t_2$  je netriviálně závislá na atmosférickém tlaku, určíme ji podle přibližného vztahu:

$$t_2(p) = 100,0 + 28,0216 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right) - 11,642 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right)^2 + 7,1 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right)^3 \quad (1)$$

Teplota  $t_3$  je pro čistý cín rovna  $t_3 = 231,93$  °C.

### 2.1 Odporová trubice

Odporová trubice nám umožňuje měřit teplotu prostředí pomocí odporu. Předpokládáme, že závislost odporu trubice na teplotě je kvadratická, tedy že platí:

$$R(t) = R_0(1 + At + Bt^2) \quad (2)$$

$R_0$ ,  $A$  a  $B$  jsou konstanty pro danou trubici a získáme je pomocí Lagrangeovy interpolace ze změřených teplot  $t_1, t_2, t_3$ .

### 2.2 Termočlánek

Termočlánek se skládá ze dvou různých vodičů a umožňuje měřit napětí  $\varepsilon$  mezi nimi, které vzniká kvůli Seebeckově jevu (viz. [1]). Opět předpokládáme, že závislost napětí na rozdílu teplot mezi vodiči bude kvadratická, tedy

$$\varepsilon(t_1, t_2) = a + b(t_2 - t_1) + c(t_2 - t_1)^2 \quad (3)$$

Stejně jako v případě odporové trubice,  $a, b, c$  jsou konstanty, které získáme při naměření výchozích teplot.

## 3 Měření

### 3.1 Postup měření

Nejprve změříme hodnotu odporu  $R(0^\circ)$ . Pro realizaci této teploty použijeme směs vody a ledu umístěnou v termosce. Je nutno počkat, až se hodnota odporu úplně ustálí. Protože měříme ve stupních Celsia a teplota tání ledu je právě  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , odpovídá  $R(0^\circ)$  odporu  $R_0$  v rovnici (2).

Dále změříme rozdíl napětí  $\varepsilon(0^\circ, 0^\circ)$ , když jsou oba vodiče ponořeny do termosky. Tato hodnota by v ideální situaci byla nulová, naměříme však určitou nenulovou hodnotu, neboť vodiče nejsou ze stejného materiálu, nejsou stejně ponořeny do termosky atd. Ze stejného důvodu jako výše, tato naměřená hodnota vlastně odpovídá hodnotě koeficientu  $a$  ve vztahu (3).

Nejprve budeme měřit var vody, poté tuhnutí cínu, princip je však stejný v obou. Budu tedy popisovat pouze var.

Odporovou trubici a jeden z dvojice vodičů vložíme nad vodu, kterou postupně přivedeme k varu, druhý z vodičů termočlánek necháme v termosce. Termočlánekem měříme rozdíl teplot  $t_2 - t_1$ , ale protože  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , můžeme rovnici (3) přepsat na tvar:

$$\varepsilon(t) = a + bt + ct^2 \quad (4)$$

<sup>1</sup>Za předpokladu, že látka není amorfni a není znečištěná.

kde  $t$  je teplota druhého vodiče termočlánku.

Program *Zapisovač* automaticky zaznamenává výsledky měření, odpor zaznamenáváme ručně každých 50 sekund. Naměřené hodnoty odporu jsou uvedeny v tabulce 2 a ve grafu 1, zapsané hodnoty napětí jsou zobrazeny ve grafu 2.

Napětí  $\varepsilon$  měříme přístrojem s rozsahem  $\varepsilon_M = 100$  mV. Chyba měření tohoto přístroje je:

$$\Delta\varepsilon = 90 \cdot 10^{-6} \cdot \varepsilon + 35 \cdot 10^{-6} \cdot \varepsilon_M \quad (5)$$

Odpor  $R$  měříme s rozsahem  $R_M = 0,2$  k $\Omega$ . Přístroj udává výsledek měření s chybou:

$$\Delta R = 0,5\% \cdot R + 0,1\% \cdot R_M \quad (6)$$

### 3.2 Kalibrace

Z rovnice (1) určíme teplotu  $t_2$ . Naměřený atmosferický tlak je  $p = 99,23$  kPa, teplota varu vody je tedy

$$t_2 = 99,42 \text{ }^\circ\text{C}$$

Z naměřených hodnot určíme dva zbývající body pro kalibraci, tedy koeficienty  $A, B$  v rovnici (2), resp. koeficienty  $a, b$  v rovnici (3). Potřebujeme vědět, při jaké hodnotě  $R$ , resp.  $\varepsilon$ , je dosažena kalibrační teplota  $t_2$  a  $t_3$ . To určíme podle toho, že hodnota  $R$ , resp.  $\varepsilon$  se přestane měnit (v závislosti na čase), tedy že funkce závislosti  $R$ , resp.  $\varepsilon$  na čase bude v daném místě (přibližně) konstantní.

$t$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$R$ [ $\Omega$ ]	$\varepsilon$ [mV]
0	$100,5 \pm 0,7$	$(-2,3 \pm 3,5) \cdot 10^{-3}$
99,42	$138,4 \pm 0,9$	$4,3 \pm 0,1$
231,93	$187,5 \pm 1,1$	$11,0 \pm 0,1$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty veličin  $R$  a  $\varepsilon$  při fázových přechodech.

Z těchto naměřených hodnot určíme koeficienty kvadratického polynomu, jak je popsáno v teorii. Dostáváme tyto hodnoty pro odporovou trubici:

- $R_0 = 100,5 \pm 0,7 \text{ } \Omega$
- $A = (3,84 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
- $B = (-4,6 \pm 6,0) \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-2}$

Pro termočlánek dostáváme analogickým způsobem následující koeficienty:

- $a = (-2,30 \pm 3,50) \cdot 10^{-6} \text{ V}$
- $b = (4,01 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ VK}^{-1}$
- $c = (3,24 \pm 0,03) \cdot 10^{-8} \text{ VK}^{-2}$

Výsledné kalibrační křivky jsou zobrazeny v grafech 3.

### 3.3 Výpočet teploty z naměřených hodnot

Chceme-li zjistit teplotu  $t_R$  z naměřeného odporu  $R_i$ , jednoduše vyjádříme  $t$  z rovnice (2). Chybu této teploty  $\Delta t_R$  pak získáme metodou přenosu chyb dle [2].

$$t_R(R_i) = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4B \left( \frac{R_i}{R_0} - 1 \right)}}{2B} \quad (7)$$

$$\Delta t_R(R_i) = \left. \frac{\partial t_R}{\partial R} \right|_{R=R_i} \Delta R_i = \frac{\Delta R_i}{R_0 \sqrt{A^2 + 4B \left( \frac{R_i}{R_0} - 1 \right)}} \quad (8)$$

Analogicky dostaneme teplotu  $t_\varepsilon$  a chybu  $\Delta t_\varepsilon$ , kterou naměřil termočlánek.

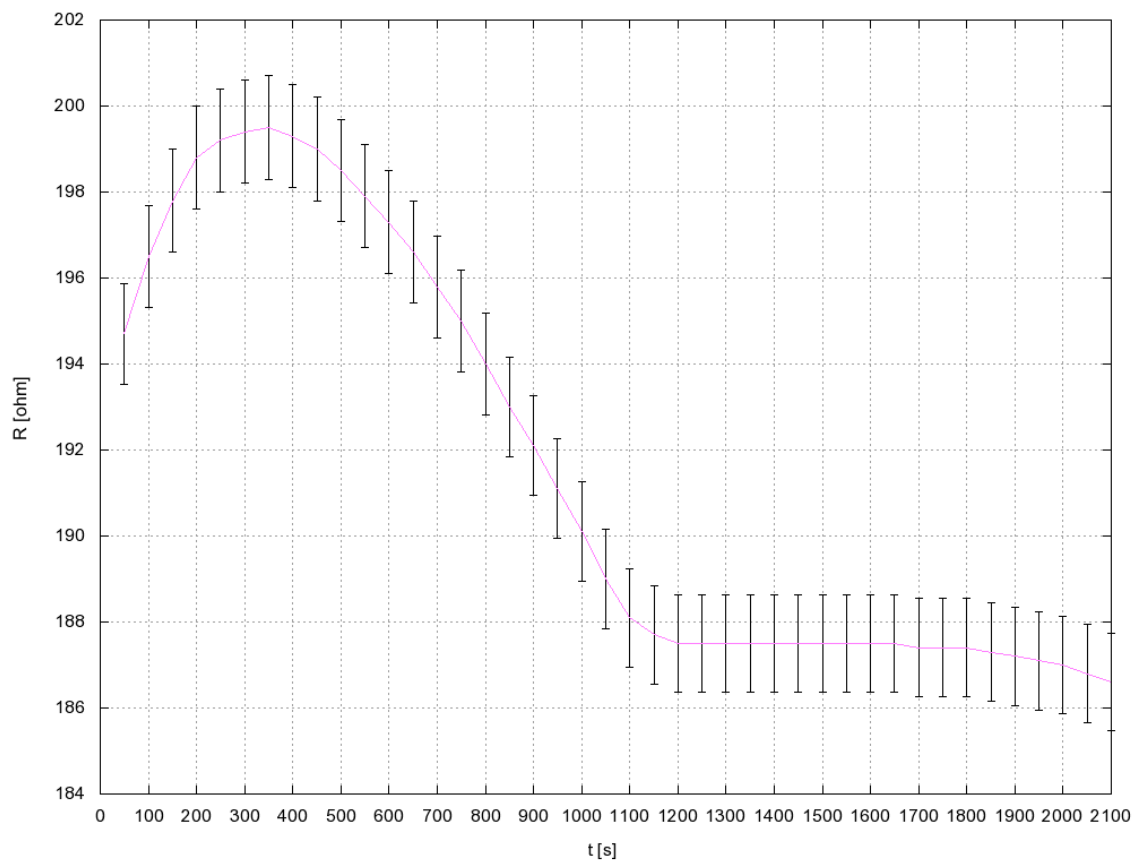
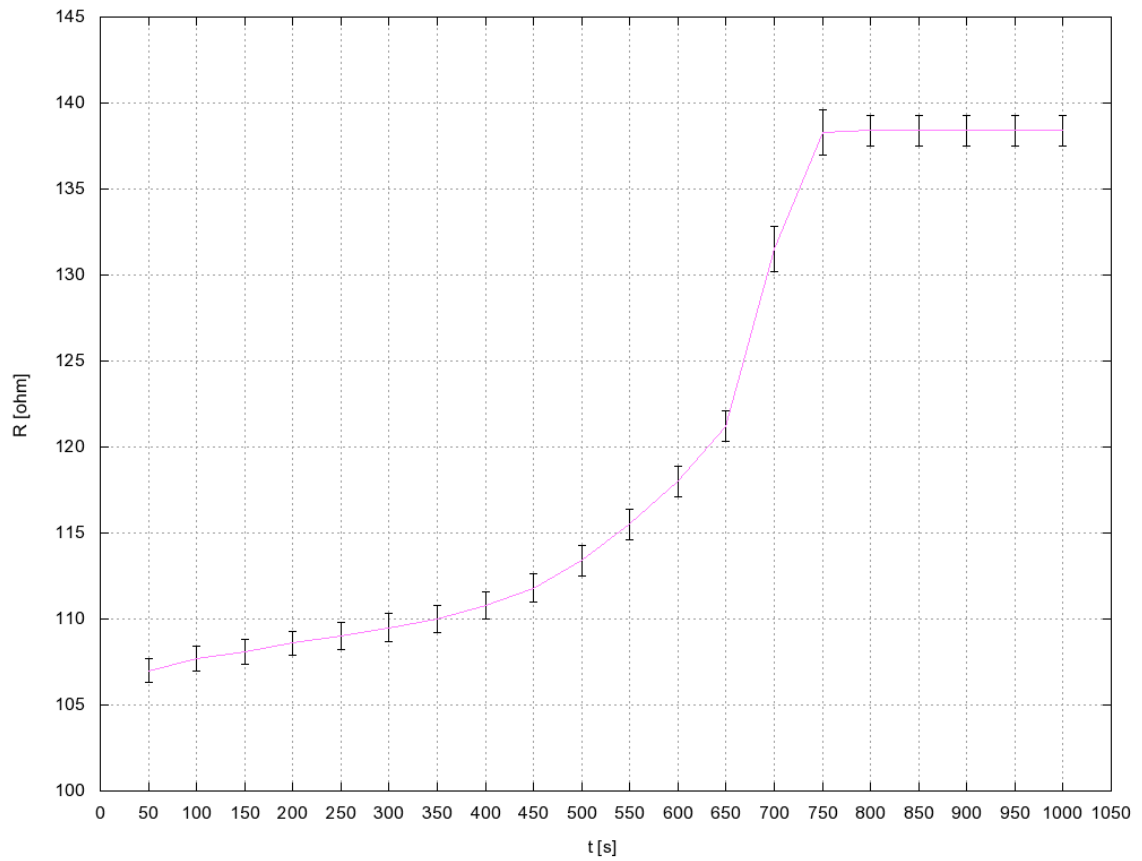
$$t_\varepsilon(\varepsilon_i) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c(\varepsilon_i - a)}}{2c} \quad (9)$$

$$\Delta t_\varepsilon(\varepsilon_i) = \left. \frac{\partial t_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_i} \Delta \varepsilon_i = \frac{\Delta \varepsilon_i}{\sqrt{b^2 + 4c(\varepsilon_i - a)}} \quad (10)$$

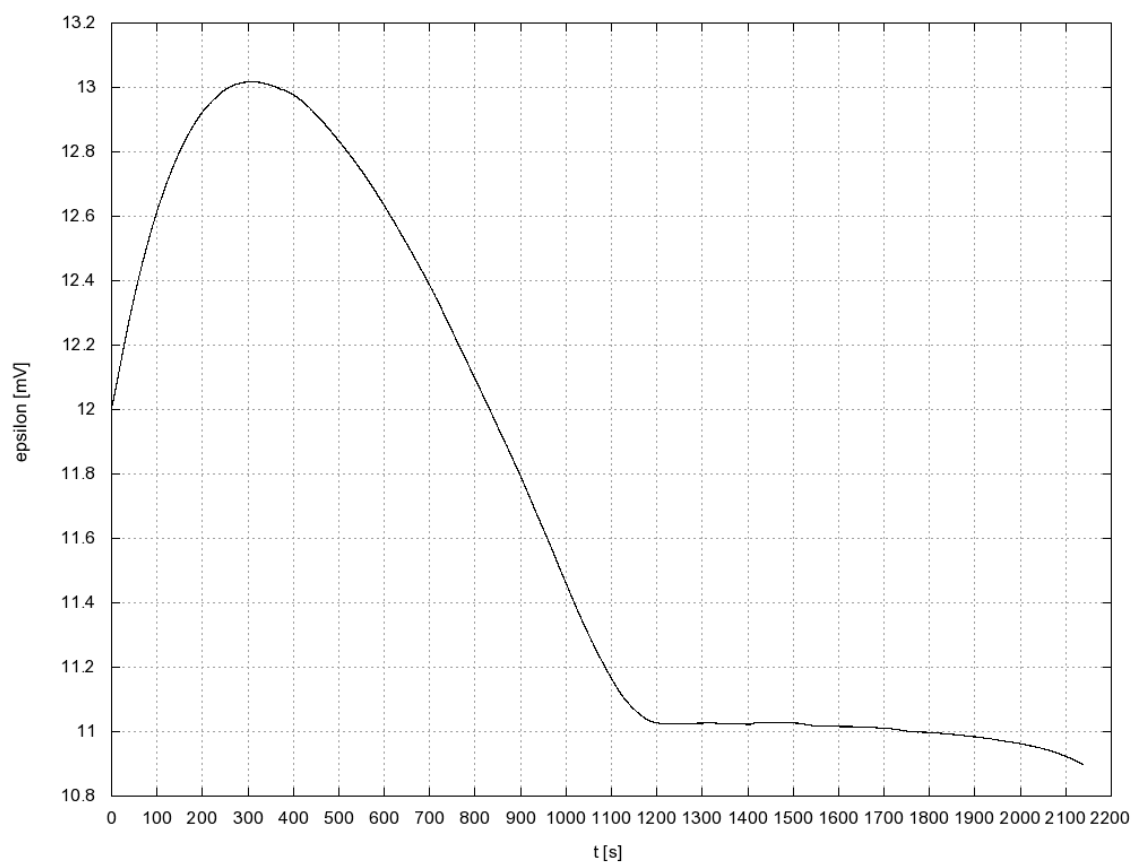
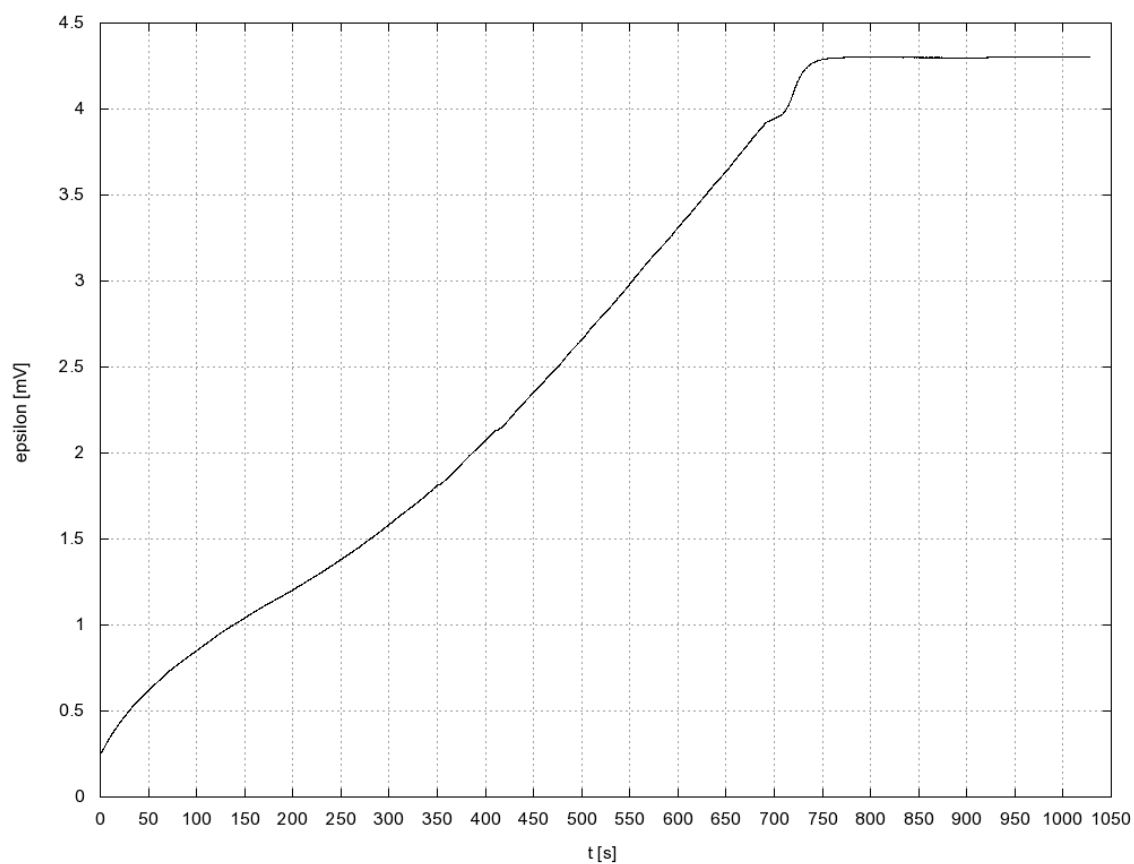
V tabulce níže jsou uvedeny odvozené hodnoty teplot  $t_R$  podle naměřených hodnot odporu  $R$ .

Var vody			Tuhnutí cínu		
$\tau$ [s]	$R$ [ $\Omega$ ]	$t_R$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$\tau$ [s]	$R$ [ $\Omega$ ]	$t_R$ [ $^\circ\text{C}$ ]
50	107,0 $\pm$ 0,7	16,9 $\pm$ 1,9	100	196,5 $\pm$ 1,2	256,7 $\pm$ 3,3
100	107,7 $\pm$ 0,7	18,7 $\pm$ 1,9	200	198,8 $\pm$ 1,2	263,1 $\pm$ 3,3
150	108,1 $\pm$ 0,7	19,7 $\pm$ 1,9	300	199,4 $\pm$ 1,2	264,7 $\pm$ 3,3
200	108,6 $\pm$ 0,7	21,0 $\pm$ 2,0	400	199,3 $\pm$ 1,2	264,4 $\pm$ 3,3
250	109,0 $\pm$ 0,8	22,1 $\pm$ 2,0	500	198,5 $\pm$ 1,2	262,2 $\pm$ 3,3
300	109,5 $\pm$ 0,8	23,4 $\pm$ 2,0	600	197,3 $\pm$ 1,2	258,9 $\pm$ 3,3
350	110,0 $\pm$ 0,8	24,7 $\pm$ 2,0	700	195,8 $\pm$ 1,2	254,8 $\pm$ 3,3
400	110,8 $\pm$ 0,8	26,8 $\pm$ 2,0	800	194,0 $\pm$ 1,2	249,8 $\pm$ 3,2
450	111,8 $\pm$ 0,8	29,4 $\pm$ 2,0	900	192,1 $\pm$ 1,2	244,6 $\pm$ 3,2
500	113,4 $\pm$ 0,9	33,6 $\pm$ 2,4	1000	190,1 $\pm$ 1,2	239,1 $\pm$ 3,2
550	115,5 $\pm$ 0,9	39,1 $\pm$ 2,4	1100	188,1 $\pm$ 1,1	233,6 $\pm$ 3,1
600	118,0 $\pm$ 0,9	45,6 $\pm$ 2,5	1200	187,5 $\pm$ 1,1	231,9 $\pm$ 3,1
650	121,2 $\pm$ 0,9	54,0 $\pm$ 2,5	1300	187,5 $\pm$ 1,1	231,9 $\pm$ 3,1
700	131,5 $\pm$ 1,3	81,1 $\pm$ 3,5	1400	187,5 $\pm$ 1,1	231,9 $\pm$ 3,1
750	138,3 $\pm$ 1,3	99,2 $\pm$ 3,6	1500	187,5 $\pm$ 1,1	231,9 $\pm$ 3,1
800	138,4 $\pm$ 0,9	99,4 $\pm$ 2,4	1600	187,5 $\pm$ 1,1	231,9 $\pm$ 3,1
850	138,4 $\pm$ 0,9	99,4 $\pm$ 2,4	1700	187,4 $\pm$ 1,1	231,7 $\pm$ 3,1
900	138,4 $\pm$ 0,9	99,4 $\pm$ 2,4	1800	187,4 $\pm$ 1,1	231,7 $\pm$ 3,1
950	138,4 $\pm$ 0,9	99,4 $\pm$ 2,4	1900	187,2 $\pm$ 1,1	231,1 $\pm$ 3,1
1000	138,4 $\pm$ 0,9	99,4 $\pm$ 2,4	2000	187,0 $\pm$ 1,1	230,6 $\pm$ 3,1

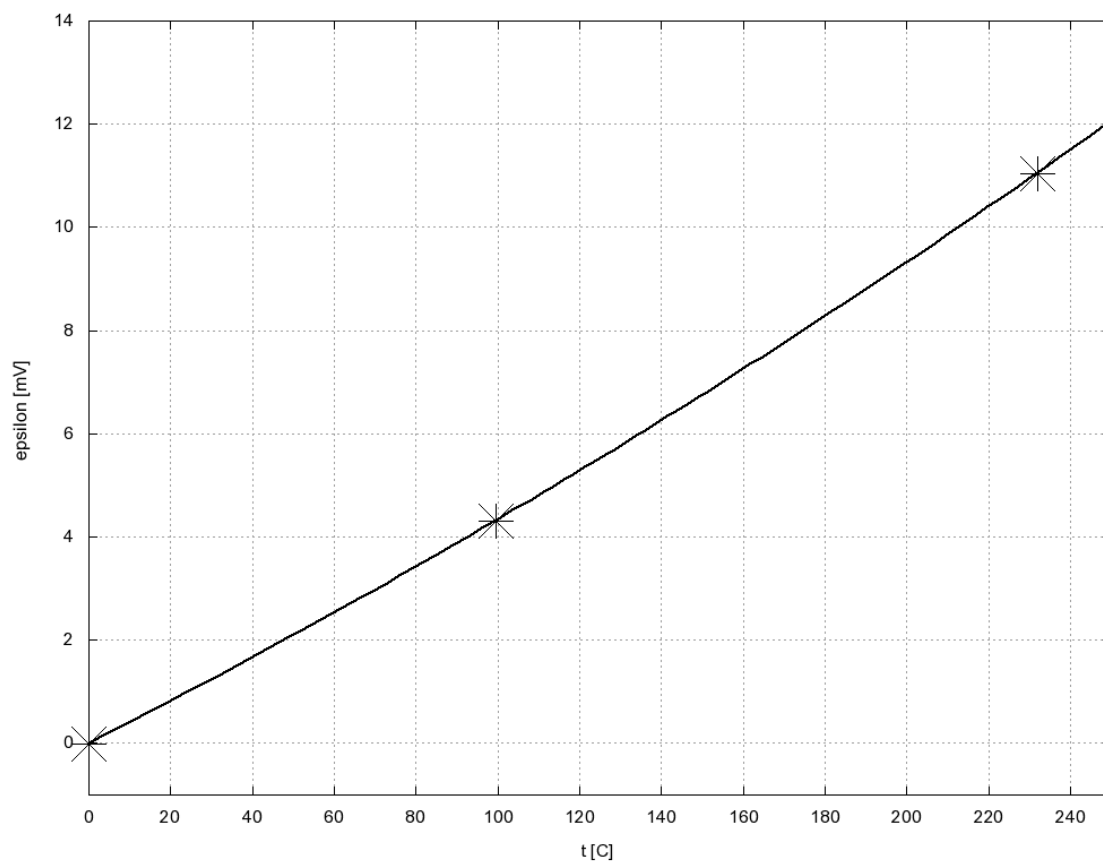
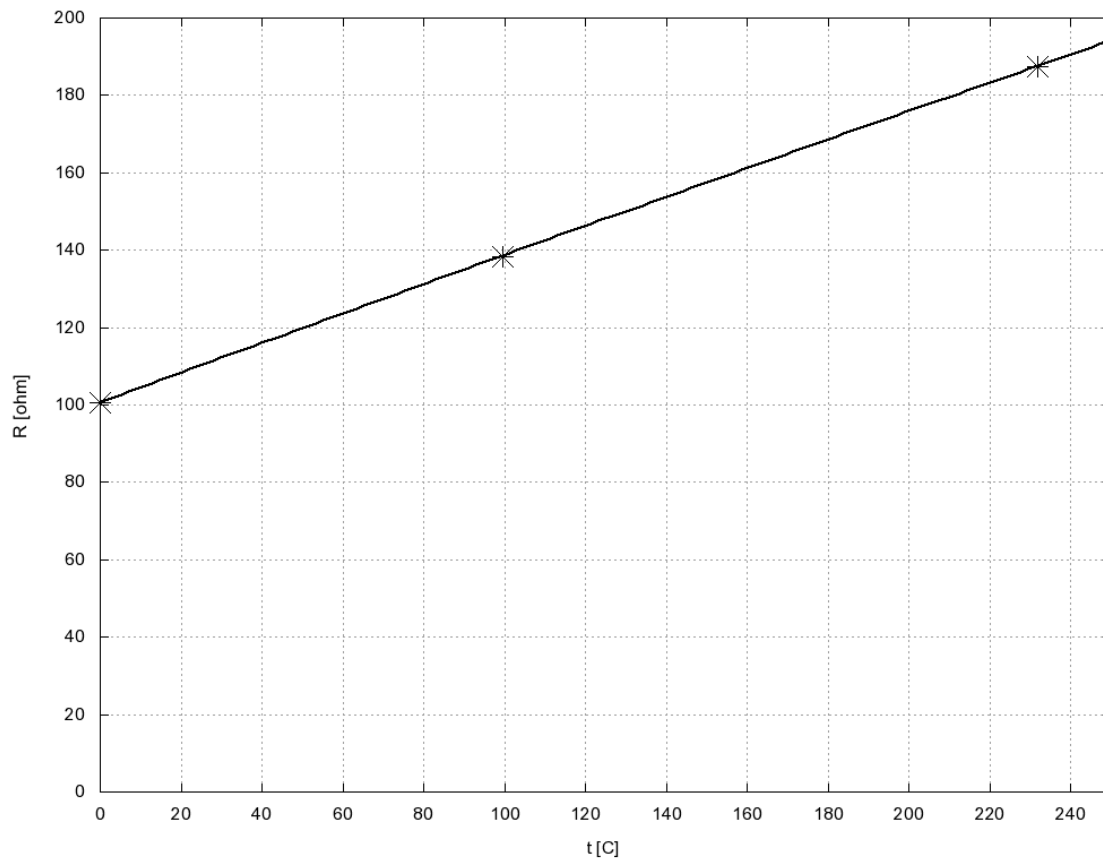
Tabulka 2: Naměřené hodnoty odporu  $R$  v časech  $\tau$  a vypočítané hodnoty teploty  $t_R$  dle vztahu (7) a chyby  $\Delta t_R$  dle vztahu (8).



Obrázek 1: Naměřené hodnoty odporu  $R$  [ $\Omega$ ] v časech  $\tau$  [s], v případě varu vody (nahore) a tuhnutí cínu (dole). U cínu jsou patrné větší chybové úsečky než u varu, což je způsobeno jednak vyšší naměřenou hodnotou (a tedy fakticky větší chybou přístroje), ale také menším rozpětím teplot grafu a tedy pouze zdánlivě větší chybou.

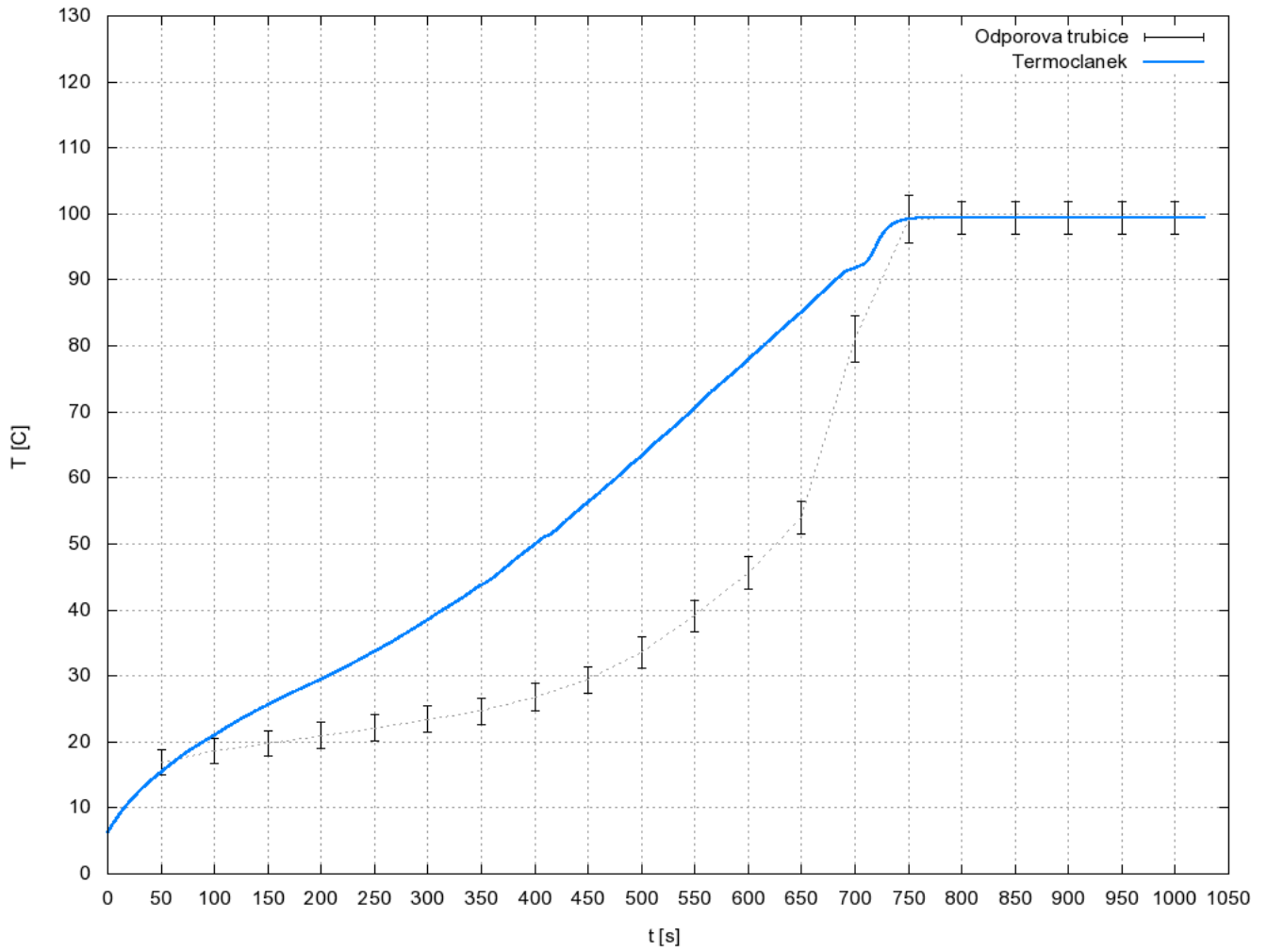


Obrázek 2: Hodnoty napětí  $\epsilon$  [mV] v časech  $\tau$  [s] zapsané programem *Zapisovač*, v případě varu vody (nahore) a tuhnutí cínu (dole).

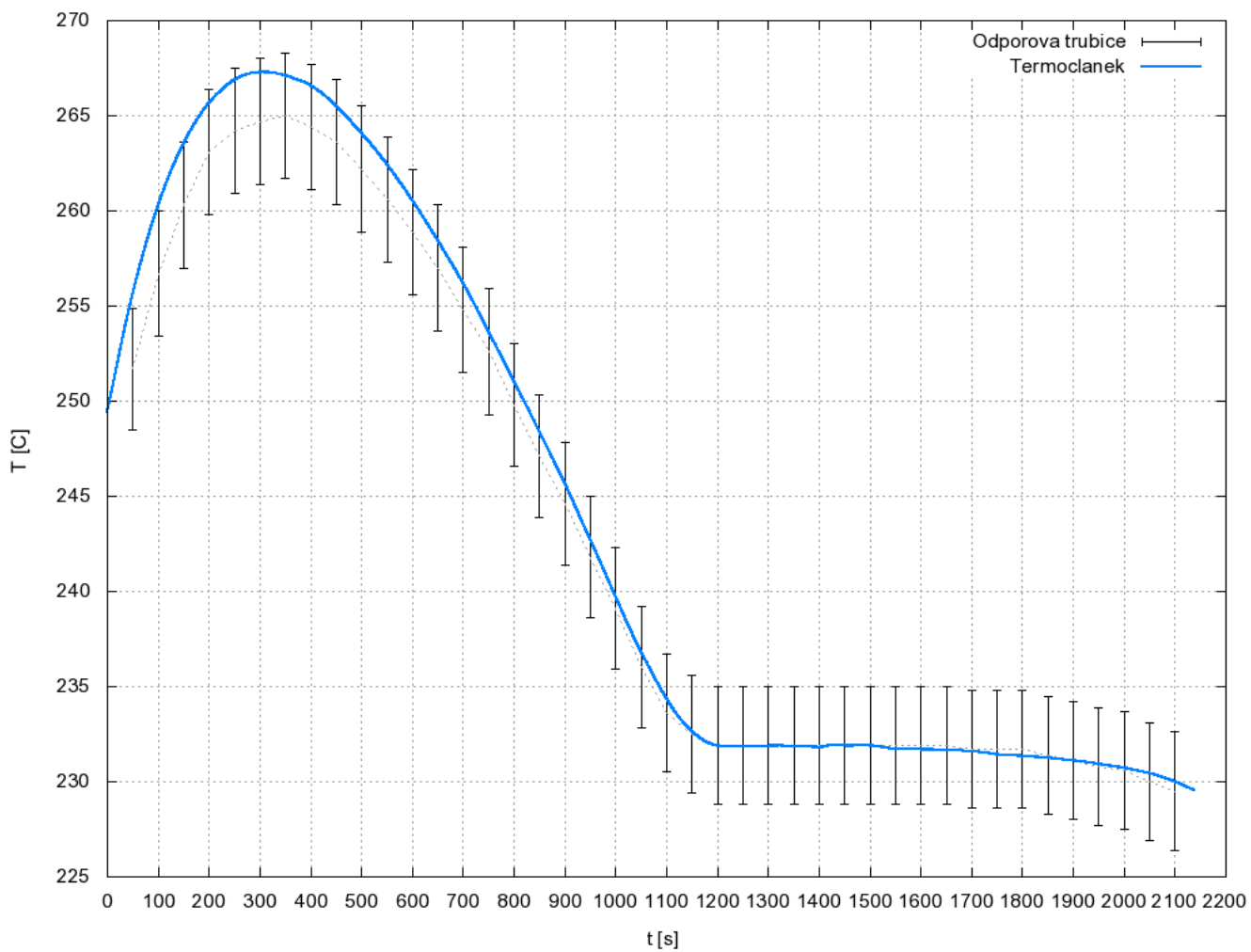


Obrázek 3: Kalibrační křivky pro odporovou trubici (nahore) a termočlánek (dole) s vyznačenými kalibračními body. U odporové trubice vyšla téměř dokonalá lineární závislost, u termočláneku je znatelné mírné zakřivení.





Obrázek 4: Závislost  $t_R$  a  $t_\varepsilon$ , udávané ve  $^\circ\text{C}$ , na čase  $\tau$  u měření varu vody. Teplota naměřená oběma způsoby se (pochopitelně) shoduje na začátku (v blízkosti  $0^\circ$ ) a na konci (u  $100^\circ$ ), protože byly přístroje podle těchto hodnot kalibrovány. Vidíme však značné rozdíly v průběhu měření, viz. Diskuze.



Obrázek 5: Závislost  $t_R$  a  $t_\epsilon$  na čase  $\tau$  u tuhnutí cínu. Jde vidět, že (snad kromě začátku) teplota  $t_\epsilon$  naměřená termoclánku spadá do chybového intervalu teploty  $t_R$  naměřené odporovou trubicí. Viz. Diskuze.

## 4 Diskuze

### 4.1 Kalibrace

Protože nemáme žádné srovnání s jiným již kalibrovaným teploměrem, musíme slepě doufat, že naměřené hodnoty fázových přechodů skutečně odpovídají tabulkovým hodnotám. V případě směsi ledu a vody předpokládáme, že pracujeme s destilovanou vodou, která tuhne právě při  $0\text{ }^\circ\text{C}$ ; ve skutečnosti však může být znečištěná a kvůli těmto nečistotám se může skutečný bod tuhnutí od tabulkového mírně lišit. Naměřená hodnota napětí  $\varepsilon(0^\circ, 0^\circ)$  je sice nenulová, nicméně menší než chyba přístroje.

V případě varu vody předpokládáme, že teplotu varu  $t_2$  správně určíme podle rovnice (1), tedy že v baňce je právě atmosférický tlak. Ve skutečnosti je však větší než naměřený tlak kvůli unikajícím parám. Dále je potřeba si uvědomit, že kromě vody se zahřívá i samotná baňka a ta se může zahřát na více než  $100^\circ$  bez fázového přechodu. Unikající páry se tedy při kontaktu s horkým sklem nahřejí na větší teplotu, než je skutečná teplota varu.

Při měření bodu tuhnutí cínu předpokládáme (stejně jako u vody), že se jedná o cín bez příměsí a nečistot, což však nemůžeme zaručit. Naměřený teplota  $t_3$  tedy může být vyšší nebo nižší než skutečná teplota tuhnutí, podle nečistot, které cín obsahuje.

### 4.2 Závislost $t_R(\tau)$ a $t_\varepsilon(\tau)$

Porovnáním grafů 4 a 5 s grafy 1 a 2 vidíme, že funkce  $R(\tau)$ , resp.  $\varepsilon(\tau)$  má velice podobný průběh jako funkce  $t_R(\tau)$ , resp.  $t_\varepsilon(\tau)$ . To není překvapivé, neboť kalibrační křivky (2) a (3) jsou velice blízké lineárním funkcím.

V případě tuhnutí cínu dostáváme poměrně dobrou shodu mezi teplotami  $t_R$  a  $t_\varepsilon$ . V celém měřeném úseku spadá teplota  $t_\varepsilon$  do chybového intervalu  $t_R$ , při fázovém přechodu jsou teploty totožné, neboť byly podle tohoto bodu kalibrovány.

Oproti tomu v grafu 4 jde vidět velké rozdíly mezi teplotami  $t_R$  a  $t_\varepsilon$ . V okolí  $0\text{ }^\circ\text{C}$  a  $100\text{ }^\circ\text{C}$  se teploty shodují opět kvůli kalibraci, v "prostřední" části je však teplota  $t_\varepsilon$  zcela mimo chybové intervaly teploty  $t_R$ . Blíže ke skutečné teplotě má zřejmě  $t_\varepsilon$ , protože lze předpokládat přibližně lineární růst. Náhlý vzrůst teploty, který ukazuje funkce  $t_R(\tau)$ , nedává smysl. Vysvětlení tohoto jevu může být více. Pokud vyloučíme systematické (či hrubé) chyby měření, může být též chyba v předpokladu kvadratické závislosti  $R(t)$ . Z naměřených hodnot sice vidíme téměř lineární závislost, ale ze tří hodnot těžko můžeme usuzovat na průběh celé funkce. Pokud je tedy skutečná hodnota funkce  $R(t)$  v oblasti mezi  $0^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$  menší než kalibrovaná hodnota, výsledná funkce  $t_R(\tau)$  pak bude bližší funkci  $t_\varepsilon(\tau)$ .

## 5 Závěr

Byly kalibrovány dva různé teploměry, odporová trubice a termočlánek. Kalibrační koeficienty pro trubici:

$$R_0 = 100,5 \pm 0,7 \Omega, A = (3,84 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, B = (-4,6 \pm 6,0) \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-2}$$

a pro termočlánek:

$$a = (-2,30 \pm 3,50) \cdot 10^{-6} \text{ V}, b = (4,01 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ VK}^{-1}, c = (3,24 \pm 0,03) \cdot 10^{-8} \text{ VK}^{-2}$$

Byly vykresleny grafy těchto kalibračních funkcí, dále grafy  $R(\tau)$ ,  $\varepsilon(\tau)$ ,  $t_R(\tau)$ ,  $t_\varepsilon(\tau)$ , a to pro var vody i tuhnutí cínu.

## Reference

[1] Studijní text k fyzikálnímu praktiku I, úloha VII

[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_107.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_107.pdf)

[2] English, J. *Úvod do praktické fyziky I*. Praha: Matfyzpress, 2006.

[http://www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/english\\_-\\_uvod\\_do\\_prakticke\\_fyziky\\_1.pdf](http://www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/english_-_uvod_do_prakticke_fyziky_1.pdf)