

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I.  
PRO OBOR OBECNÁ FYZIKA

---

## **VII. Štúdium kmitov viazaných oscilátorov**

---

*Autor:*  
Samuel Kočiščák

21. apríla 2016

## 1 Pracovné úlohy

- Zmerajte dobu kmitu  $T_0$  dvoch rovnakých neviazaných fyzických kyvadiel.
- Zmerajte dobu kmitu dvoch rovnakých fyzických kyvadiel spojených slabou pružnou väzbou vypustených z pokoja pri počiatočných podmienkach:
  - $y_1 = y_2 = B$  ...doba kmitu  $T_1$
  - $y_1 = -y_2 = B$  ...doba kmitu  $T_2$
  - $y_1 = 0, y_2 = B$ 
    - doba kmitu  $T_3$
    - doba  $\frac{T_s}{2}$ , za ktorú dôjde k maximálnej výmene energie medzi kyvadlami
- Vypočítajte kruhové frekvencie  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  zodpovedajúce dobám  $T_0, T_1, T_2, T_3, T_s$  a overte meraním platnosť vzťahov odvodených pre  $\omega_3$  a  $\omega_4$ .
- Vypočítajte stupeň väzby  $\kappa$ .
- Pre jednu pružinu zmerajte závislosť stupňa väzby na vzdialenosti zavesenia pružiny od uloženia závesu kyvadla a graficky zdôvodnite.

## 2 Teoretická časť

Medzi uhlovou frekvenciou a periódou kmitu je všeobecne vzťah:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \Leftrightarrow T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (1)$$

Neviazané fyzické kyvadlo sa pri zanedbaní strát a za predpokladu malých výchýliiek riadi vzťahom:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad (2)$$

kde  $I$  je moment zotrvačnosti kyvadla okolo osi prechádzajúcej bodom upevnenia kolmý na rovinu rotácie tohto kyvadla a  $D$  je direkčný moment kyvadla, teda konštanta charakterizujúca kyvadlo, ktorú definuje vzťah:

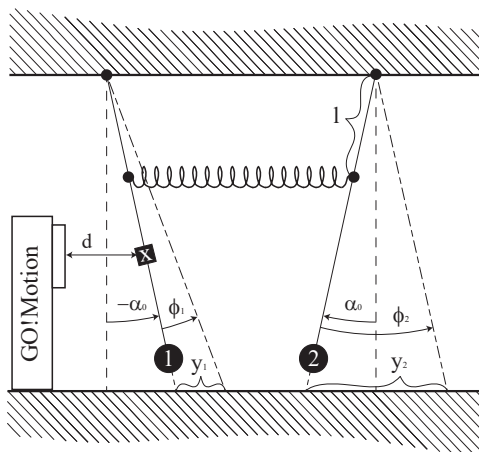
$$D = -\frac{M}{\alpha}, \quad (3)$$

kde  $M$  je moment sily, ktorý na kyvadlo pôsobí pri výchýlke  $\alpha$ .

Po pridaní slabej pružnej väzby sa obe kyvadlá symetricky vychýlia z pôvododnej rovnovážnej polohy každé o malý uhol  $\alpha$  a zotrývajú v novej rovnovážnej polohe, v ktorej bude výsledný moment síl pôsobiacich na každé z kyvadiel opäť nulový, bude teda pre každé kyvadlo platiť:

$$D\alpha_0 = M_0, \quad (4)$$

kde  $M_0$  je moment vonkajších síl (v našom prípade jedinej sily - sily slabej pružnej väzby medzi kyvadlami), ktorý je kompenzovaný výchylkou kyvadla o uhol  $\alpha_0$ .



Obr. 1: Sústava dvoch viazaných kyvadiel

Po vychýlení kyvadiel z rovnovážkových polôh o uhly  $\phi_1$  a  $\phi_2$  (ako vidno na obrázku 1) sa budú<sup>[St]</sup> kyvadlá pohybovať podľa pohybových rovníc:

$$I\ddot{\phi}_1 = -D\phi_1 - D^*(\phi_1 - \phi_2) \quad (5)$$

$$I\ddot{\phi}_2 = -D\phi_2 + D^*(\phi_1 - \phi_2), \quad (6)$$

kde  $D^*$  je direkčný moment pružiny. Riešeniami týchto rovníc sú<sup>[St]</sup> funkcie:

$$\phi_1 = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) \quad (7)$$

$$\phi_2 = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) - a_2 \cos(\omega_2 t) - b_2 \sin(\omega_2 t), \quad (8)$$

kde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad (9)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{I}}, \quad (10)$$

a  $a_i, b_i$  sú konštanty vzyšlé z integrácie. Tie určíme v jednotlivých prípadoch (podúlohy druhej úlohy) z počiatočných podmienok.

(a): ak  $\phi_1(0) = \phi_2(0) = A$  a  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ , tak  $a_1 = A$  a  $a_2 = b_1 = b_2 = 0$ , teda:

$$\phi_1 = \phi_2 = A \cos(\omega_1 t), \quad (11)$$

teda kyvadlá sa budú pohybovať rovnako, akoby medzi nimi väzba ani nebola, čo dáva zmysel vzhľadom na to, že dĺžka pružiny medzi nimi sa evidentne meníť nebude.

(b): ak  $\phi_1(0) = A$ ,  $\phi_2(0) = -A$  a  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ , tak  $a_2 = A$  a  $a_1 = b_1 = b_2 = 0$ , teda:

$$\phi_1 = -\phi_2 = A \cos(\omega_2 t), \quad (12)$$

z čoho vidno, že obidve kyvadlá budú kmitať s rovnakou frekvenciou, ale fázovým posunom o polperiódu, čo sa dá vypočítavať aj zo symetrie tohto systému.

(c): ak  $\phi_1(0) = 0$ ,  $\phi_2(0) = A$  a  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ , tak  $a_1 = -a_2 = \frac{A}{2}$  a tiež  $b_1 = b_2 = 0$ , teda:

$$\phi_1 = A \sin \left[ \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \right], \quad (13)$$

$$\phi_2 = A \cos \left[ \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \right], \quad (14)$$

V priblížení, keď sú  $\omega_1$  a  $\omega_2$  podobné, možno vzťahy (13) a (14) interpretovať ako kyvadlá kmitajúce s rovnakou konštantnou frekvenciou:

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (15)$$

a ich amplitúda sa periodicky mení s frekvenciou

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \quad (16)$$

teda:

$$\phi_1 = (A \sin(\omega_4 t)) (\sin(\omega_3 t)) \quad (17)$$

$$\phi_2 = (A \cos(\omega_4 t)) (\cos(\omega_3 t)) \quad (18)$$

Vidno teda, že prvé kyvadlo bude mať nulovú amplitúdu vždy v čase:

$$t = nT_s = \frac{n\pi}{\omega_4}, \quad (19)$$

kde  $n \in \mathbb{Z}$  a  $T_s = \frac{\pi}{\omega_4}$ .

Stupeň previazanosti  $\kappa$  definujeme ako:

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*}, \quad (20)$$

kde použitím (9) a (10) získame vzťah:

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}, \quad (21)$$

za pomoci ktorého vieme zo znalosti frekvencií  $\omega_1$  a  $\omega_2$  vypočítať stupeň väzby  $\kappa$ .

### 3 Výsledky merania

Podmienky pri meraní v laboratóriu neboli konštantné, teplota sa pohybovala okolo  $24^{\circ}\text{C}$  a relatívna vlhkosť okolo 30%, žiadny z týchto parametrov nemal výraznejší vplyv na meranie.

Pri meraní sme používali vzdialenostný senzor *Vernier GO!Motion*<sup>[Ve]</sup> umiestnený v rovine pohybu kyvadiel snímajúci vzdialenosť  $d$  od značky (na obrázku 1 označenej  $x$ ) na kyvadle 1 tak, ako ukazuje obrázok 1. Tento senzor podľa výrobcu<sup>[Ve]</sup> automaticky zohľadňuje teplotu a tlak vzduchu, teda teplota v miestnosti naozaj žiadnu úlohu nehrá. Pri meraní nás dokonca ani nikdy nezaujímala absolútna vzdialenosť kyvadla od senzoru, iba perióda jeho kmitov, teda čas medzi jednotlivými minimami resp. maximami vzdialenosti senzoru od ľubovoľného bodu kyvadla. Údaje sme spracovali v softvéri *Logger Lite 1.5*. V tabuľke hodnôt typu  $d = f(t)$  sme vyhľadávali lokálne maximá  $d$  a určovali ich vzdialenosť. Pri meraní  $T_s$  sme určovali vzdialenosť minim amplitúdy, keďže tá sa (na rozdiel od maxima amplitúdy) vždy nadobúda. Senzor meral vzdialenosť s frekvenciou 25Hz, teda za chybu určenia časovej polohy maxima považujeme 0,04s, pri meraní  $T_s$  bolo obťažne presne určiť minimum amplitúdy, k presnosti sa vrátíme neskôr.

Na spúšťanie kyvadiel sme použili mechanizmus s nastaviteľnou počítačnou polohou. Pri všetkých meraniach bola konštantna  $B$  nastavená na hodnotu  $B = 3\text{ cm}$  s presnosťou  $\pm 1\text{ mm}$ , čoho chybu nie je potrebné zohľadniť, keďže v priblížení lineárneho oscilátora (ktoré je, ako ukazujú namerané hodnoty, dobre splnené), frekvencia  $\omega_i$  na počítačovej výchylke nezáleží.

Pri meraní sme použili pružinu označenú ako  $A$  s tuhosťou  $7\frac{\text{N}}{\text{m}}$  a pružinu  $B$  s tuhosťou  $4\frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

Pri meraní  $T_{0_i}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  a  $T_s$  sme použili väzbu vo vzdialenosti  $l = 30\text{ cm}$  od závesu. Períodu kmitu neviazaných kyvadiel sme nastavili na rovnakú hodnotu porovnávaním - rozkmytli sme obe synchronne a spúšťali sme závažie nižšie na rýchlejšom z nich až kým sme nedosiahli uspokojivú zhodu. Pri meraní  $T_{0_i}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$  sme merali vždy čas trvania 10-tich periód, teda výsledná presnosť merania je  $\sigma_{T_i} = 0,004\text{s}$ . Periódy kmitu  $T_{0_1}$ ,  $T_{0_2}$  a uhlové frekvencie  $\omega_{0_1}$ ,  $\omega_{0_2}$  týchto neviazaných kyvadiel 1 a 2 respektíve sú teda (realtívna chyba sa pri prepočte  $\omega = f(T)$  podľa (1) zachováva):

$$T_{0_1} = (1,876 \pm 0,004)\text{s} \Rightarrow \omega_{0_1} = (3,349 \pm 0,007)\text{s}^{-1}, \quad (22)$$

$$T_{0_2} = (1,880 \pm 0,004)\text{s} \Rightarrow \omega_{0_2} = (3,342 \pm 0,007)\text{s}^{-1}, \quad (23)$$

teda sú pre naše účely identické a mohli sme prikročiť k ďalším meraniam. Pri meraní  $T_s$  sme priamo merali hodnotu  $3T_s$  pre pružinu  $A$  a  $2T_s$  pre pružinu  $B$ , pre jednoduchosť uvažujeme rovnakú presnosť  $\sigma_{T_s} = 0,1\text{s}$ , keďže presnosť určenia maxima resp. minima bola oveľa nižšia, v podstate len odhadnutá podľa okolitých priebehu. V tabuľke 1 vidno namerané hodnoty  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  a  $T_s$  pre jednotlivé pružiny:

Tabuľka 1: Namerané periódy

	pružina A ( $7\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )	pružina B ( $4\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )
$T_1$ [s]	$1,872 \pm 0,004$	$1,876 \pm 0,004$
$T_2$ [s]	$1,700 \pm 0,004$	$1,780 \pm 0,004$
$T_3$ [s]	$1,688 \pm 0,004$	$1,832 \pm 0,004$
$T_s$ [s]	$18,0 \pm 0,1$	$35,9 \pm 0,1$

V tabuľke 2 vidno dopočítané uhlové frekvencie (zachováva sa relatívna chyba merania periódy), pričom platí, že  $T_4 = 2T_s \Rightarrow \omega_4 = \frac{\pi}{T_s}$ .

Tabuľka 2: Uhlové rýchlosti

	pružina A ( $7\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )	pružina B ( $4\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )
$\omega_1$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$3,356 \pm 0,007$	$3,349 \pm 0,007$
$\omega_2$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$3,696 \pm 0,009$	$3,530 \pm 0,008$
$\omega_3$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$3,722 \pm 0,009$	$3,430 \pm 0,007$
$\omega_4$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$0,175 \pm 0,001$	$0,0875 \pm 0,0004$

Podľa (15) a (16) vieme z  $\omega_1$  a  $\omega_2$  dopočítať teoretické hodnoty  $\omega_{3_t}$  a  $\omega_{4_t}$  ako:

Tabuľka 3: Teoretické uhlové rýchlosti

	pružina A ( $7\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )	pružina B ( $4\frac{\text{N}}{\text{m}}$ )
$\omega_{3_t}$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$3,526 \pm 0,008$	$3,440 \pm 0,008$
$\omega_{4_t}$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$0,170 \pm 0,008$	$0,091 \pm 0,008$

Stupeň väzby  $\kappa$  vypočítame podľa (21):

$$\kappa_A = (0,096 \pm 0,003), \quad (24)$$

$$\kappa_B = (0,052 \pm 0,003), \quad (25)$$

prícom štandardnú chybu sme preniesli ako:

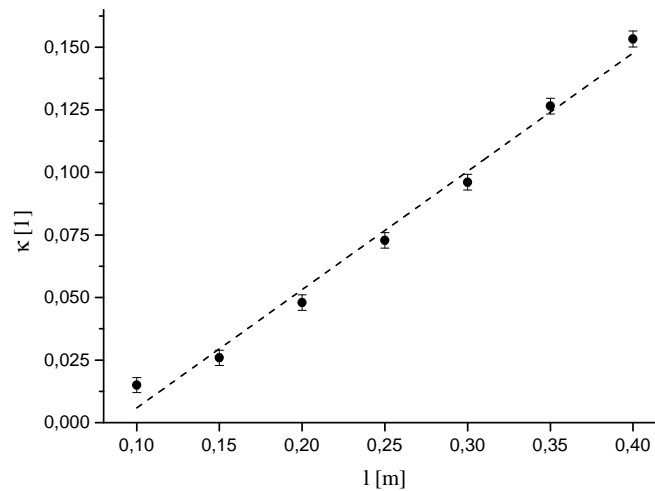
$$\sigma_\kappa^2 = \left( \frac{-4\omega_1\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} \right)^2 \sigma_{\omega_1}^2 + \left( \frac{4\omega_1^2\omega_2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} \right)^2 \sigma_{\omega_2}^2 \quad (26)$$

Na meranie závislosti sme použili pružinu A. Pružný spoj sme umiestňovali do rôznych vzdialeností od osi otáčania, túto vzdialenosť sme určovali zvinovacím pásmom s presnosťou 1mm. V tabuľke 4 vidno namerané hodnoty  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\omega_1$  a  $\omega_2$  s chybou spracovanou rovnako, ako v predošlých meraniach a v grafe na obrázku 4 vidno

závislosť  $\kappa = f(l)$  preloženú lineárnou závislosťou  $\kappa = al + b$  s koeficientmi  $a, b$  v tabuľke 5.

Tabuľka 4: Závislosť stupňa väzdy od vzdialenosti pružiny od osi otáčania

$l$ [m]	$T_1$ [s]	$T_2$ [s]	$\omega_1$ [s <sup>-1</sup> ]	$\omega_2$ [s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\omega_1}$ [s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\omega_2}$ [s <sup>-1</sup> ]
10	1,880	1,852	0,3342	0,3393	$7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$
15	1,876	1,828	0,3349	0,3437	$7 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
20	1,876	1,788	0,3349	0,3514	$7 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
25	1,876	1,744	0,3349	0,3603	$7 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
30	1,872	1,700	0,3356	0,3696	$7 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
35	1,876	1,652	0,3349	0,3803	$7 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
40	1,872	1,604	0,3356	0,392	$7 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$



Obr. 2: Závislosť  $\kappa = f(l)$

Tabuľka 5: Koeficienty fitu

	$a$	$b$
hodnota	0,47	-0,041
štandardná odchýlka	0,02	0,006

## 4 Diskusia výsledkov

Hodnoty  $T_i$  sa nám podarilo odmerať a vypočítať z nich hodnoty  $\omega_i$  pre obe pružiny s pomerne vysokou presnosťou. Z  $T_1$  a  $T_2$  sme dopočítali  $\omega_3$  a  $\omega_4$  pre obe pružiny, pričom sme dosiahli veľmi dobrú zhodu pri všetkých hodnotách okrem  $\omega_3$  pre pružinu  $A$ . Chyba je pri tejto pružine vyššia, keďže táto pružina nespĺňa predpoklad slabej väzby tak dobre, ako napríklad pružina  $B$ , keďže  $A$  je takmer dvojnásobne tuhšia, než  $B$ . Každopádne, overili sme, že pre dostatočne slabú pružinu naša teória funguje a dobre predpovedá správanie systému.

Podarilo sa nám určiť závislosť stupňa väzby od vzdialenosti pružiny a osi otáčania a zistili sme, že ju dobre aproximuje afinná funkcia, ako vidno v tabuľke 4 a 5.

Meranie  $T_s$  by mohlo sprasniť, ak by sa nám podarilo odmerať trvanie viacerých periód  $T_4$ , keďže po niekoľkých málo polperiódach bola výchylka tak malá, že bolo nemožné presne určiť minimum amplitúdy, preto sme merali iba 2 resp. 3 polperiódy  $T_s$ . Keďže kyvadlá sú precízne a aparátúra je presná, jediné zlepšenie, ktoré možno navrhnúť, je umiestniť aparátúru do prostredia so znížením tlakom vzduchu kvôli zníženiu vplyvu odporu vzuchu, aby bolo možné odmerať trvanie viacerých poleriód  $T_s$ .

## 5 Záver

Úspešne sme odmerali periódy a dopočítali amplitúdy podľa zadania, kvôli stručnosti neuvádzame všetky údaje. Hodnota stupňa väzby pre pružinu  $A$  vo vzdialenosti 30cm od závesu je:

$$\kappa_A = (0,096 \pm 0,003), \quad (27)$$

a pre pružinu  $B$  v rovnakej vzdialenosti:

$$\kappa_B = (0,052 \pm 0,003) \quad (28)$$

Závislosť stupňa väzby  $\kappa$  od vzdialenosti pružiny od závesu  $l$  sme určili ako:

$$\kappa = (0,47 \pm 0,02) \cdot l - (0,041 \pm 0,006) \quad (29)$$

## 6 Zoznam použitej literatúry

- [St] Kolektív ZFP KVOF MFF UK. *Študijný text k meraniu: Štúdium kmitov viaaných oscilátorov*. [cit. 2016-15-04]. URL: <[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_107.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_107.pdf)>.
- [Ve] Vernier Software and Technology. *Go!Motion user manual and full specifications* [cit. 2016-05-3]. URL: <<http://www.vernier.com/files/manuals/go-mot.pdf>>.