

1 Pracovní úkoly

- Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
- Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
 - $y_1 = y_2 = B$... doba kmitu T_1
 - $y_1 = -y_2 = B$... doba kmitu T_2
 - $y_1 = 0, y_2 = B$
 - doba kmitu T_3
 - doba $T_s/2$ za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
- Vypočítejte kruhové frekvence $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_s , ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4 .
- Vypočítejte stupeň vazby κ .
- Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

2 Teoretická část

Pokud kyvadla vychýlíme z rovnovážné polohy a není mezi nimi natažená pružina, začnou kmitat s úhlovou frekvencí ω_0 dané výrazem [1]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (1)$$

kde D je směrný moment kyvadla a I jeho moment setrvačnosti. Mezi úhlovou frekvencí a periodou obecně platí vztah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Pokud mezi kyvadly napneme pružinu, jejich původní rovnovážné polohy se vychýlí o úhel α . Pokud nyní vychýlíme kyvadlo 1 (resp. 2) z nové rovnovážné polohy o úhel φ_1 (resp. φ_2), jeho pohybová rovnice bude mít tvar

$$I\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 - D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3)$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4)$$

kde D^* je směrný moment pružiny. Dostali jsme soustavu dvou diferenciálních rovnic řešitelných pomocí substituce $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, jejichž řešením je

$$\psi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \quad (5)$$

$$\psi_2 = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t \quad (6)$$

kde a_1, a_2, b_1, b_2 jsou integrační konstanty závislé na počátečních podmínkách a pro úhlové frekvence platí

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (7)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{I}} \quad (8)$$

Těmto úhlovým frekvencím odpovídají periody T_1 a T_2 . Řešení pro φ_1 a φ_2 můžeme dostat zpětnou substitucí.

Pro počáteční podmínky $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ bude řešením

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A \cos \omega_1 t \quad (9)$$

Obě kyvadla se tedy budou pohybovat ve fázi a jejich úhlová frekvence nebude pružinou ovlivněna.

Pro počáteční podmínky $\varphi_1(0) = A$, $\varphi_2(0) = -A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ bude řešením

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A \cos \omega_2 t \quad (10)$$

Kyvadla se tedy budou pohybovat s fázovým posuvem π , ale se stejnou úhlovou frekvencí ω_2 , která již bude ovlivněna působením pružiny.

Nakonec pro počáteční podmínky $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ bude řešením

$$\varphi_1 = \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \right] \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t \right] \quad (12)$$

kde bylo využito vzorců pro součet, resp. rozdíl kosinů. Jelikož pro slabou vazbu budou hodnoty ω_1 a ω_2 velmi blízké, lze toto řešení interpretovat tak, že kyvadla kmitají s úhlovou frekvencí ω_3 , pro kterou platí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \quad (13)$$

čemuž odpovídá perioda T_3 , a amplituda se mění periodicky s úhlovou frekvencí

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad (14)$$

čemuž odpovídá perioda T_4 . Amplituda pohybu kyvadla 1 bude pak nulová pro časy $t = n \frac{T_4}{2} = n T_s$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), pro takto zavedené T_s tedy platí

$$T_s = \frac{\pi}{\omega_4} \quad (15)$$

Stupeň vazby κ je definován jako

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*} \quad (16)$$

z rovnic (7), (8) a (2) dostaneme, že

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \quad (17)$$

$$\kappa = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (18)$$

Při malých výchylkách kyvadla bude směrný moment pružiny úměrný čtverci vzdálenosti zavěšení pružiny $D^* \propto l^2$ [2] a dosazením do rovnice (17) s využitím rovnic (7) a (8) dostaneme závislost stupně vazby na l

$$\kappa = 1 - \frac{1}{1 + A \cdot l^2} \quad (19)$$

kde A je nějaká konstanta.

3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při teplotě $t = 24,2^\circ\text{C}$ a tlaku $p = 974,2 \text{ hPa}$. Pro měření času bylo použito čidlo pohybu se vzorkovací frekvencí 25 Hz společně se softwarem GO!Motion. Pro měření vzdáleností byl použit posuvný metr s přesností 1 mm a pro určení správných počátečních podmínek bylo použito mechanické spouštěcí zařízení připevněné ke stěně s osou s přesností 1 mm .

3.1 Nevázaná kyvadla

Nejdříve jsem změřil periody kmitů obou kyvadel, když nebyly spojené pružinou. Naměřené hodnoty shrnuje tabulka 1.

Tabulka 1: Naměřené doby kmitů T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel

Kyvadlo 1	Kyvadlo 2
$\frac{10T_0}{s}$	$\frac{10T_0}{s}$
18,88	18,92
18,92	18,96
18,88	18,92
18,92	18,92
18,92	18,92

Pro zvýšení přesnosti měření jsem měřil vždy deset period kmitů nezatížených kyvadel. Pro obě kyvadla jsem provedl pět měření a chybu měření $10T_0$ jsem určil podle vztahu

$$\sigma_{10T_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (10T_{0i} - \overline{10T_0})^2}{(n-1)n}} + \frac{\sigma_p^2}{n} \quad (20)$$

kde $n = 5$ jelikož jsem měření opakoval pětkrát, $\overline{10T_0}$ je průměr z naměřených hodnot a σ_p je chyba čidla pohybu, kterou zde uvažuji rovnu $0,02 \text{ s}$.

Dobu jednoho kmitu jsem pak určil dle vztahu $\overline{T_0} = \frac{\overline{10T_0}}{10}$ a standardní odchylku tohoto výsledku

$$\sigma_{\overline{T_0}} = \frac{\sigma_{10T_0}}{10} \quad (21)$$

Celkově jsem určil periodu prvního kyvadla na $T_0 = (1,890 \pm 0,001) \text{ s}$ a druhého kyvadla na $T_0 = (1,893 \pm 0,001) \text{ s}$. Výsledky shrnuje Tabulka 2.

Tabulka 2: Průměrné doby kmitů T_0

	$\frac{\overline{10T_0}}{s}$	$\frac{\sigma_{10T_0}}{s}$	$\frac{\overline{T_0}}{s}$	$\frac{\sigma_{\overline{T_0}}}{s}$
Kyvadlo 1	18,90	0,01	1,890	0,001
Kyvadlo 2	18,93	0,01	1,893	0,001

3.2 Kyvadla vázaná slabou pružinou

Další měření bylo provedeno pro dvě různé pružiny, které charakterizuje tabulka 3. Při měření period T_1 , T_2 , T_3 a T_4 byly počáteční podmínky, zmíněné v teoretické části, nastaveny pomocí mechanického spouštěcího zařízení připevněného ke stěně.

Tabulka 3: Charakteristika použitých pružin

	vzdálenost zavěšení pružiny	tuhost pružiny
Pružina 1	30 cm	4 Nm ⁻¹
Pružina 2	30 cm	7 Nm ⁻¹

Pro zvýšení přesnosti jsem měřil deset period při měření T_1 , T_2 . Při měření T_3 jsem měřil deset period u pružiny 1 a pět period u pružiny 2, protože když se amplituda kmitů blížila nule, tak jejich průběh v GO!Motion byl nepřesný. Dále jsem měřil přímo T_S u obou pružin, jelikož velikost periody změny amplitudy byla značně větší než perioda jednotlivých kmitů. Měření všech period jsem provedl třikrát. Naměřené hodnoty pro pružinu 1 shrnuje tabulka 4 a pro pružinu 2 tabulka 5.

Tabulka 4: Naměřené periody T_i pro pružinu 1

$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{T_S}{s}$
18,88	18,00	18,36	39,12
18,88	17,96	18,44	39,56
18,84	18,00	18,36	38,64

Tabulka 5: Naměřené periody T_i pro pružinu 2

$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{5T_3}{s}$	$\frac{T_S}{s}$
18,88	17,16	9,04	19,24
18,88	17,16	9,00	19,20
18,88	17,16	9,04	19,04

Pro všechny naměřené periody jsem poté určil jejich průměr a standardní směrodatnou odchylku periody jednoho kmitu σ_{T_i} podle vztahu

$$\sigma_{T_i} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (MT_{ij} - \overline{MT_i})^2}{n(n-1)} + \frac{\sigma_p^2}{n}} \quad (22)$$

kde M je počet period, které jsem měřil, $n = 3$ je počet opakování měření a σ_p je opět chyba čidla pohybu, kterou uvažuji rovnu 0,02 s pro periody T_1 , T_2 a T_3 , ovšem rovnu 0,04 s pro T_4 , neboť při měření periody T_4 se hodnoty hůře odečítaly kvůli nejasnému průběhu malých kmitů. Výsledky shrnuje tabulka 6.

Tabulka 6: Výsledky měření všech period T_i pro obě pružiny

	$\frac{T_1}{s}$	$\frac{T_2}{s}$	$\frac{T_3}{s}$	$\frac{T_S/2}{s}$
Pružina 1	(1,887 ± 0,002)	(1,799 ± 0,002)	(1,839 ± 0,003)	(19,6 ± 0,1)
Pružina 2	(1,888 ± 0,001)	(1,716 ± 0,001)	(1,805 ± 0,004)	(9,58 ± 0,03)

3.3 Kruhové frekvence

Kruhové frekvence odpovídající jednotlivým periodám jsem vypočítal pomocí vztahu (2) pro ω_0 , ω_1 , ω_2 a ω_3 a vztahu (15) pro ω_4 . Standardní směrodatnou odchylku výsledku jsem určil podle rovnice

$$\sigma_{\omega_i} = \frac{2\pi}{T_i^2} \sigma_{T_i} \quad (23)$$

Takto vypočítané kruhové frekvence ukazuje tabulka 7.

Tabulka 7: Kruhové frekvence odpovídající jednotlivým periodám T_i

	$\frac{\omega_0}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_1}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_2}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_3}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_4}{s^{-1}}$
P. 1	$(3,324 \pm 0,002)$	$(3,330 \pm 0,003)$	$(3,493 \pm 0,003)$	$(3,417 \pm 0,005)$	$(0,080 \pm 0,001)$
P. 2	$(3,320 \pm 0,002)$	$(3,328 \pm 0,002)$	$(3,662 \pm 0,002)$	$(3,480 \pm 0,007)$	$(0,164 \pm 0,001)$

Kruhové frekvence ω_3 a ω_4 jsou teoreticky svázány s kruhovými frekvencemi ω_1 a ω_2 dle rovnic (13) a (14). Pro takto vypočítané hodnoty ω_3 a ω_4 určím standardní směrodatnou odchylku jako

$$\sigma_{\omega_3} = \sigma_{\omega_4} = \frac{\sqrt{\sigma_{\omega_1}^2 + \sigma_{\omega_2}^2}}{2} \quad (24)$$

Výsledky ukazuje tabulka 8.

Tabulka 8: Hodnoty ω_3 a ω_4 vypočítané dle rovnic (13) a (14)

	$\frac{\omega_3}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_4}{s^{-1}}$
Pružina 1	$(3,412 \pm 0,002)$	$(0,081 \pm 0,002)$
Pružina 2	$(3,495 \pm 0,002)$	$(0,167 \pm 0,002)$

3.4 Stupeň vazby

Stupeň vazby pro danou pružinu lze spočítat podle rovnice (18). Chyba výsledku lze určit podle zákona šíření chyb

$$\sigma_{\kappa} = \frac{4T_1T_2}{(T_1^2 + T_2^2)^2} \sqrt{T_2^2\sigma_{T_1}^2 + T_1^2\sigma_{T_2}^2} \quad (25)$$

Výsledek ukazuje tabulka 9.

Tabulka 9: Stupeň vazby daných pružin

	κ
Pružina 1	$(0,048 \pm 0,001)$
Pružina 2	$(0,095 \pm 0,001)$

3.5 Stupeň vazby v závislosti na vzdálenosti zavěšení pružiny

Následující měření jsem provedl pouze pro pružinu 2.

Abych pro danou vzdálenost pružiny mohl určit stupeň vazby, musel jsem změřit periody T_1 a T_2 . Pro první hodnoty jsem měření provedl třikrát, vzhledem k chybě měřícího přístroje jsem však usoudil, že měření není třeba opakovat tolikrát a další hodnoty jsou změřeny pouze jednou. Chyba doby jednoho kmitu byla určena stejně jako dříve, tedy podle rovnice (22), kde uvažuji chybu měřícího přístroje $\sigma_p = 0,02$ s.

Pro každou změřenou dvojici T_1 a T_2 lze pak určit stupeň vazby dle rovnice (18) a chybu výsledku podle (25). Naměřené hodnoty a dopočítaný stupeň vazby zobrazuje tabulka 10. Mezi tyto hodnoty byla zahrnuta i jedna hodnota z předchozího měření pro $l = 30$ cm.

Teoretická závislost $\kappa = \kappa(l)$ pro malé kmity je pak dána rovnicí (19). Parametr A byl určen minimalizací výrazu

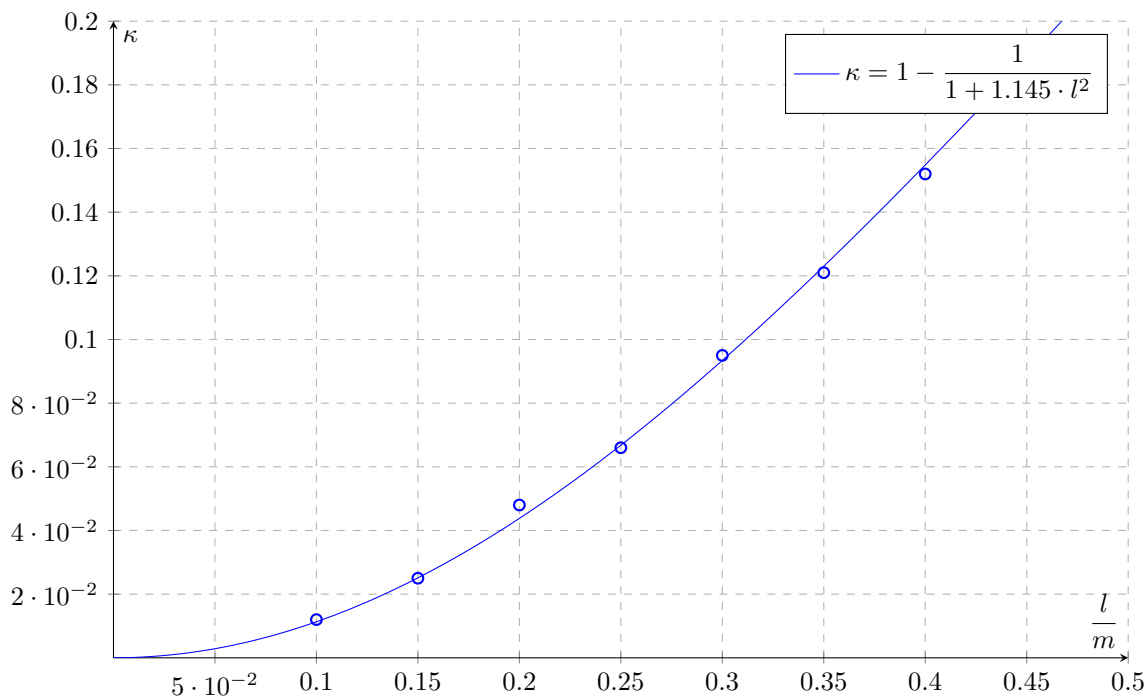
$$\sum_{i=1}^n \frac{(\kappa_i - f(l_i))^2}{\sigma_{\kappa_i}^2} \quad (26)$$

v programu Excel s použitím doplňku Řešitel, kde $n = 7$ je počet naměřených hodnot, κ_i jsou stupně vazby vypočítané z jednotlivých měření s chybou σ_{κ_i} a $f(l_i)$ je předpokládaná závislost $f(l_i) = \kappa(l_i)$ daná rovnicí (19).

Odhad chyby fitovaného parametru A jsem pak určil podle [3] jako

$$\sigma_A = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{\kappa_i}^2} \left(\frac{l_i}{1 + A \cdot l_i^2} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

Celkově jsem určil hodnotu parametru $A = (1,145 \pm 0,008) \text{ m}^{-2}$. Výsledný průběh $\kappa(l)$ společně s naměřenými hodnotami ukazuje Graf 1.



Graf 1: Závislost stupně vazby κ na vzdálenosti zavěšení pružiny l

Tabulka 10: Naměřené hodnoty T_1 , T_2 a dopočítaný stupeň vazby pro určení závislosti $\kappa(l)$

$\frac{l}{cm}$	$\frac{T_1}{s}$	$\frac{\sigma_{T_1}}{s}$	$\frac{T_2}{s}$	$\frac{\sigma_{T_2}}{s}$	κ	σ_κ
0,10	1,893	0,002	1,871	0,002	0,012	0,001
0,15	1,891	0,002	1,844	0,002	0,025	0,001
0,20	1,893	0,002	1,804	0,002	0,048	0,001
0,25	1,888	0,002	1,768	0,002	0,066	0,002
0,30	1,888	0,001	1,716	0,001	0,095	0,001
0,35	1,888	0,002	1,672	0,002	0,121	0,002
0,40	1,888	0,002	1,620	0,002	0,152	0,002

4 Diskuse

Při měření period nevázaných kyvadel T_0 jsem zjistil, že perioda kyvadla 2 byla o málo větší než u kyvadla 1. Pohybem šroubu jsem se snažil upravit periodu kyvadla 2 tak aby odpovídala periodě kyvadla 1, výsledek ukazuje tabulka 2. Periody jsou podobné a shodují se v rámci dvou standardních směrodatných odchylek. Nejsou však totožné a daná nepřesnost mohla ovlivnit další měření.

Dále si myslím, že periody T_1 a T_2 jsou změřeny relativně přesně, jelikož jejich průběh kmitů při jejich měření byl v GO!Motion jasný a největší nepřesnosti při měření byla daná nepřesností samotného čidla pohybu, které snímalo polohu kyvadla každé 0,04 s. Při měření period T_3 a T_4 byl průběh kmitů v GO!Motion nejasný pro malé kmity, takže jsem musel průběh kmitů částečně odhadnout. Výsledek ukazuje tabulka 6 a relativně velká chyba je vidět právě u měření periody T_4 , resp. T_s .

Dalším faktorem, který mohl ovlivnit přesnost měření period, bylo tření v ložiskách kyvadel, které bylo v teoretických úvahách zanedbáno. Při měření všech period bylo však znát, že amplituda kmitů pomalu klesá s časem. Tření se projevilo především při měření T_3 a T_s . Předpokládám, že to bylo způsobeno tím, že se kyvadlo periodicky zastavovalo a opět dávalo do pohybu, takže mohlo hrát roli i statické tření v ložiskách kyvadla, které bývá zpravidla větší než tření dynamické.

Nepřesnost měření mohla být také částečně způsobena nepřesným nastavením počátečních podmínek pohybu. Na osu mechanického spouštěcího zařízení připevněného ke stěně jsem se snažil dívat kolmo, ale je možné, že jsem se při některých měřeních díval pod malým úhlem, takže je možné, že jsem ne vždy nastavil počáteční podmínky zcela přesně.

Z naměřených period jsem určil kruhové frekvence a pro ω_3 a ω_4 jsem také použil rovnice (13) a (14). Naměřené i spočítané hodnoty ω_3 a ω_4 se dobře shodují pro pružinu 1, v rámci jedné směrodatné odchylky měření, a poněkud hůře pro pružinu 2, v rámci dvou směrodatných odchylek měření.

Změřená závislost stupně vazby pružiny 2 na vzdálenosti zavěšení pružiny, kterou ukazuje graf 1 dobře odpovídá teoretické závislosti dané vztahem (19). Závislost logicky musí procházet nulou a teoreticky jít k jedničce pro velká l . Z měření jsem určil maximální stupeň vazby 0,152, takže nemohu potvrdit platnost vztahu (19) pro velké l , mohu však tvrdit, že vztah (19) dobře popisuje závislost $\kappa(l)$ pro malá l .

5 Závěr

Měřením period nevázaných kyvadel bylo určeno T_0 pro obě kyvadla, výsledek ukazuje tabulka 11.

Tabulka 11: Periody kmitů nevázaných kyvadel

	$\frac{T_0}{s}$
Kyvadlo 1	$(1,890 \pm 0,001)$
Kyvadlo 2	$(1,893 \pm 0,001)$

Dále byly určeny periody T_1 , T_2 , T_3 a $T_s/2$ pro dvě různé pružiny. Výsledek je uveden v tabulce 12.

Tabulka 12: Výsledky měření všech period T_i pro obě pružiny

	$\frac{T_1}{s}$	$\frac{T_2}{s}$	$\frac{T_3}{s}$	$\frac{T_s/2}{s}$
Pružina 1	$(1,887 \pm 0,002)$	$(1,799 \pm 0,002)$	$(1,839 \pm 0,003)$	$(19,6 \pm 0,1)$
Pružina 2	$(1,888 \pm 0,001)$	$(1,716 \pm 0,001)$	$(1,805 \pm 0,004)$	$(9,58 \pm 0,03)$

Z naměřených hodnot byly dopočítané kruhové frekvence, které periodám odpovídají podle vztahu (2). Výsledek uvádí tabulka 13.

Tabulka 13: Kruhové frekvence odpovídající jednotlivým periodám T_i

	$\frac{\omega_0}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_1}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_2}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_3}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_4}{s^{-1}}$
P. 1	$(3,324 \pm 0,002)$	$(3,330 \pm 0,003)$	$(3,493 \pm 0,003)$	$(3,417 \pm 0,005)$	$(0,080 \pm 0,001)$
P. 2	$(3,320 \pm 0,002)$	$(3,328 \pm 0,002)$	$(3,662 \pm 0,002)$	$(3,480 \pm 0,007)$	$(0,164 \pm 0,001)$

Dále byly vypočítány hodnoty ω_3 a ω_4 podle vztahů (13) a (14), které by měly platit teoreticky, a stupeň vazby ze vztahu (18). Výsledky jsou uvedeny v tabulce 14.

Tabulka 14: Vypočítané hodnoty ω_3 , ω_4 a κ

	$\frac{\omega_3}{s^{-1}}$	$\frac{\omega_4}{s^{-1}}$	κ
Pružina 1	$(3,412 \pm 0,002)$	$(0,081 \pm 0,002)$	$(0,048 \pm 0,001)$
Pružina 2	$(3,495 \pm 0,002)$	$(0,167 \pm 0,002)$	$(0,095 \pm 0,001)$

Nakonec byla změřena závislost stupně vazby pružiny 2 na vzdálenosti zavěšení pružiny od osy otáčení. Výsledek ukazuje graf 1. Parametr A vystupující v závislosti (19) byl určen na $A = (1,145 \pm 0,008) m^{-2}$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Studium kmitů vázaných oscilátorů. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-03-17]. http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_107.pdf
- [2] Coupled Pendula. [online]. [cit. 2018-03-17]. https://iitbhu.ac.in/institute-repository/db/2016/ir-2016-382/Coupled_Pendula_reduced.pdf
- [3] Estimating Errors in Least-Squares Fitting. [online]. [cit. 2018-03-17]. https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-122/122E.pdf