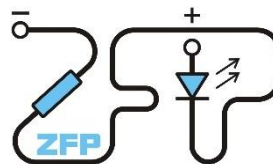


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. II

Název úlohy: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Jméno: Sára Tkadlecová

Datum měření: 28. 2. 2022

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 - 2	
Výsledky a zpracování měření	0 - 9	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

1 Pracovní úkol

- 1) Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou.
- 2) Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = y(F)$
- 3) Změřte tuhost k pěti pružin metodou dynamickou.
- 4) Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g .
- 5) Sestrojte grafy závislostí:

$$a) \omega = f(\sqrt{k})$$

$$b) \omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

- 6) Data zaznamenávejte rovnou do tabulky v počítači, proveďte výpočty, nakreslete grafy. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teoretická část

2.1 Harmonický kmit

Harmonický pohyb je periodický pohyb kolem rovnovážné polohy, který vzniká působením síly F . Velikost této síly je přímo úměrná velikosti výchylky y z rovnovážné polohy. Síla F má opačný směr než výchylka. Harmonické kmity lze charakterizovat periodou kmitu (T) a úhlovou frekvencí (ω), pro které platí vztah

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

2.2 Lineární pružina

V lineárním případě o velikosti síly F , která je při harmonickém periodickém pohybu úměrná výchylce, platí

$$F = -ky \quad (2)$$

Pokud je síla F způsobena deformací lineární pružiny, označuje veličina k ($k > 0$) tuhost pružiny. Díky tomu dostaneme vztah pro sílu F_D , která je potřeba k deformaci pružiny.

$$F_D = ky \quad (3)$$

2.3 Mechanický oscilátor

Mechanický oscilátor, který je tvořen lineární pružinou o tuhosti k . Na jednom konci je pružina pevně zavěšená, na druhém konci je závaží o hmotnosti m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

Přímým měřením lze zjistit periodu kmitu (T) a díky vztahům (1) a (4) lze získat vztah mezi periodou (T) a charakteristikou mechanického oscilátoru

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} \quad (5)$$

pokud tedy známe hmotnost závaží nebo tuhost pružiny, můžeme díky T spočítat druhý neznámý parametr.

2. 4 Tíhové zrychlení

Pokud u mechanického oscilátoru známe jeho výchylku Δy a úhlovou frekvenci ω , můžeme vypočítat velikost místního tíhového zrychlení (nemusíme znát hmotnost zavěšeného závaží ani hodnotu tuhosti pružiny). Pro tíhové zrychlení g platí vztah

$$g = \omega^2 \Delta y \quad (6)$$

Pokud g vyjádříme pomocí periody kmitu (T), která je přímo měřenou veličinou, dostaneme pro místní tíhové zrychlení

$$g = 4\pi^2 \frac{\Delta y}{T^2} \quad (7)$$

2. 5 Metoda statická

Jedním z úkolů je charakterizovat pět pružin pomocí jejich tuhostí. První metodou určení tuhosti je metoda statická, při níž je na pružinu zavěšeno závaží a po ustálení je změřeno prodloužení pružiny. Nastane tedy rovnováha mezi tíhovou silou F_G a vratnou silou pružiny F_D

$$G - F_D = 0 \quad (8)$$

Dostaneme vztah pro výpočet pružiny

$$k = \frac{mg}{\Delta y} \quad (9)$$

(m – hmotnost závaží, g – tíhové zrychlení, Δy – prodloužení pružiny).

2. 6 Metoda dynamická

Dynamická metoda charakterizuje tuhost pružiny pomocí úhlové frekvence kmitů

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10)$$

Díky známému vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde T je perioda kmitů, lze tuhost pružiny k vyjádřit jako

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad (11)$$

Použité přístroje

Katetometr je přístroj k měření výškových odlehlostí. K měření slouží svislá centimetrová stupnice a jezdec s noniem, na kterém je uchycen dalekohled s křížem. Před měřením se musí celý přístroj postavit do přímé polohy pomocí stavěcích šroubů a libel, stejně tak je nutné nastavit přímou polohu dalekohledu. Měření probíhá zaměřením měřeného předmětu a odečtením číselné hodnoty ze stupnice. Nonium umožňuje měřit rozdíly až $0,1\text{ mm}$, ale pro otřesy v laboratoři je výsledná nepřesnost okolo 1 mm .

Čidlo Go!Motion pomocí kterého je zaznamenána časová závislost výchylky závaží kmitajícího na pružině. Vzorkovací frekvence je nastavena na 25 Hz , poloha se tedy zaznamenává v intervalu $0,04\text{ s}$. Přístroj je využit při měření tuhosti pružiny dynamickou metodou (měření period). Chybou je zatíženo měření počátečního i koncového bodu.

3 Výsledky měření

Měřené pružiny, označeny písmeny A–E a jejich délky d , jsou uvedeny v tabulce 1

<i>pružina</i>	$d\text{ [cm]}$
A	$4,5 \pm 0,1$
B	$9,0 \pm 0,1$
C	$10,9 \pm 0,1$
D	$17,4 \pm 0,1$
E	$13,7 \pm 0,1$

Tabulka 1: Přehled měřených pružin A-E

Délka d byla měřena svinovacím metrem.

Během měření pružin pomocí metody statické i dynamické, byla použita závaží o hmotnosti mezi $50\text{--}1000\text{ g}$.

3. 1 Statická metoda

Absolutní prodloužení Δy bylo měřeno katetometrem, kvůli nepevnému umístění je přesnost odhadnuta na 1 mm . Naměřené hodnoty, které jsou uvedeny v *tabulce 2* jsou proto zatíženy touto nejistotou.

Metodou nejmenších čtverců a lineární regrese pak byly určeny tuhosti jednotlivých pružin. Metody byly aplikovány na prodloužení pružin Δy . K vypočtení tuhosti použijeme vztah (9), hodnoty tuhostí jsou uvedeny v *tabulce 3*.

Nejistota při měření tuhosti k pochází z regresní analýzy a je dána vztahem

$$\sigma^2 = \frac{R^2}{X^2(n-1)} \quad (12)$$

(R – reziduální suma čtverců, X^2 – suma čtverců hodnot F , n – počet měření pro jednu pružinu)

nejistota (12) byla vůči nejistotě, která byla způsobena měřidly a určena vztahem (13), zanedbatelná

$$\sigma^2 = \frac{g^2}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\sigma_m}{y_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{m_i \sigma_y}{y_{0i}^2} \right)^2 \right) \quad (13)$$

(σ_m – nejistoty při měření hmotnosti závaží, σ_y – při měření prodloužení pružiny na katetometru, y_{0i} – prodloužení závěsu, m_i – hmotnost závaží)

Vztah (13) je běžný vztah pro přenos nejistoty při nepřímém měření.

V *tabulce 2* jsou uvedeny naměřená data pro určení tuhosti pružin statickou metodou. Poloha konce pružiny bez zatížení je označena v y_0 , hmotnost závaží m , poloha konce pružiny po zavěšení závaží y_z a odpovídající prodloužení po zatížení je označeno Δy .

Pružina A

$y_0 [m]$	0,5978				
$m [kg]$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_z [m]$	0,5429	0,4823	0,4212	0,3619	0,3034
$\Delta y [m]$	0,0549	0,1155	0,1766	0,2359	0,2944
$F [N]$	1,80	3,78	5,78	7,72	9,64

Pružina B

$y_0 [m]$	0,5475				
$m [kg]$	0,05	0,1	0,12	0,15	0,2
$y_z [m]$	0,4387	0,4124	0,38	0,3465	0,2801
$\Delta y [m]$	0,1088	0,1351	0,1675	0,201	0,2674
$F [N]$	0,98	1,22	1,51	1,82	2,42

Pružina C

$y_0 [m]$	0,5273				
$m [kg]$	0,08	0,1	0,12	0,15	0,2
$y_z [m]$	0,4181	0,3919	0,3647	0,32	0,2575
$\Delta y [m]$	0,1092	0,1354	0,1626	0,2073	0,2698
$F [N]$	0,79	0,98	1,18	1,51	1,96

Pružina D

$y_0 [m]$	0,4705				
$m [kg]$	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
$y_z [m]$	0,403	0,3698	0,3367	0,2729	0,2061
$\Delta y [m]$	0,0675	0,1007	0,1338	0,1976	0,2644
$F [N]$	2,02	3,02	4,01	5,93	7,93

Pružina E

$y_0 [m]$	0,5113				
$m [kg]$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_z [m]$	0,4883	0,4487	0,4089	0,3679	0,3283
$\Delta y [m]$	0,023	0,0626	0,1024	0,1434	0,183
$F [N]$	1,1	3,1	5,0	7,0	9,0

Tabulka 2: Prodloužení Δy jednotlivých pružin po zavěšení závaží o hmotnostech m

Při výpočtu lineární regrese a metody nejmenších čtverců vycházíme z rovnice

$$y = A + Bm \quad (14)$$

Konstanta A značí původní polohu konce pružiny bez zatížení a pro konstantu B platí vztah

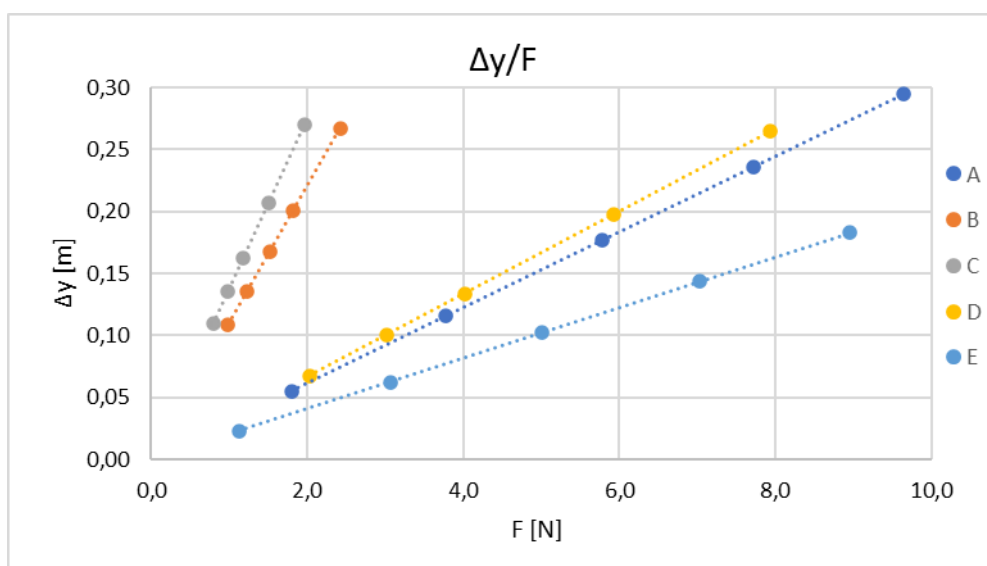
$$B = \frac{g}{k} \quad (15)$$

Obě konstanty A, B určíme z naměřených hodnot metodou nejmenších čtverců, tuhost spočítáme z konstanty B.

pružina	k [N/m]
A	32,73 ± 0,36
B	9,04 ± 0,14
C	7,26 ± 0,16
D	30,00 ± 0,25
E	48,95 ± 0,16

Tabulka 3: Tuhosti pružin změřené statickou metodou

Graf 1 znázorňuje závislost síly působící na pružinu na příslušné prodloužení.



Graf 1: Závislost síly působící na pružinu a příslušného prodloužení

3. 2 Dynamická metoda

Při této metodě je perioda kmitů měřena pomocí sonaru, který snímá polohu závaží. V tomto případě sonar snímá polohu s frekvencí 25 Hz. Nejistota měření doby kmitu je menší 0,01 s, nejistotou je zatížen začátek i konec měření

V následujících tabulkách jsou uvedeny hodnoty pro jednotlivé pružiny při zavěšení závaží o různých hmotnostech. Měření probíhalo jednou, vždy byl měřen počet period v průběhu 10 s.

Pružina A

č. měření	m [g]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t[s]	počet T	T [s]
1	200	0,24	9,64	9,40 ± 0,02	19	0,495 ± 0,001
2	400	0,44	8,76	8,32 ± 0,02	12	0,693 ± 0,002
3	600	1,20	8,80	7,60 ± 0,02	9	0,844 ± 0,02
4	800	1,00	8,80	7,80 ± 0,02	8	0,975 ± 0,003
5	1000	0,68	9,32	8,64 ± 0,02	8	1,080 ± 0,003

Pružina B

č. měření	m [g]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t[s]	počet T	T [s]
1	80	0,32	9,64	9,32 ± 0,02	14	0,666 ± 0,001
2	100	0,84	9,72	8,88 ± 0,02	12	0,740 ± 0,002
3	120	1,16	9,12	7,96 ± 0,02	10	0,796 ± 0,002
4	150	0,80	8,96	8,16 ± 0,02	9	0,907 ± 0,002
5	200	1,24	9,52	8,28 ± 0,02	8	1,035 ± 0,001

Pružina C

č. měření	m [g]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t[s]	počet T	T [s]
1	80	0,60	9,28	8,68 ± 0,02	13	0,668 ± 0,002
2	100	0,76	9,76	9,00 ± 0,02	12	0,750 ± 0,002
3	120	0,52	9,48	8,96 ± 0,02	11	0,815 ± 0,002
4	150	0,76	8,96	8,20 ± 0,02	9	0,911 ± 0,002
5	200	0,40	8,80	8,40 ± 0,02	8	1,050 ± 0,003

Pružina D

č. měření	m [g]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t[s]	počet T	T [s]
1	200	0,32	9,64	9,32 ± 0,02	17	0,548 ± 0,001
2	300	0,28	9,8	9,52 ± 0,02	15	0,635 ± 0,001
3	400	0,56	9,28	8,72 ± 0,02	12	0,727 ± 0,002
4	600	1,08	9,12	8,04 ± 0,02	9	0,893 ± 0,002
5	800	0,68	8,84	8,16 ± 0,02	8	1,020 ± 0,003

Pružina E

č. měření	m [g]	t ₁ [s]	t ₂ [s]	t[s]	počet T	T [s]
1	200	0,08	9,68	9,60 ± 0,02	26	0,369 ± 0,001
2	400	0,44	9,60	9,16 ± 0,02	16	0,573 ± 0,001
3	600	0,40	9,56	9,16 ± 0,02	13	0,705 ± 0,002
4	800	0,72	9,60	8,88 ± 0,02	11	0,807 ± 0,002
5	1000	1,00	9,12	8,12 ± 0,02	9	0,902 ± 0,002

Tabulka 4: Periody pružin změřené dynamickou metodou

V *tabulce 5* jsou uvedeny vypočítané tuhosti pružin A-E, spolu s nejistotami. K výpočtu byl použit vztah (11) a (14).

<i>pružina</i>	k [N/m]
A	$33,08 \pm 0,33$
B	$6,75 \pm 1,23$
C	$7,11 \pm 1,21$
D	$29,12 \pm 1,55$
E	$50,15 \pm 1,77$

Tabulka 5: Tuhosti pružin určené dynamickou metodou.

3. 3 Určení tíhového zrychlení

K určení tíhového zrychlení g byly použity vztahy (6) a (7) a pracovalo se s naměřenými daty jak z metody statické, tak dynamické.

K tomu byla započtena statistická nejistota, která vznikne při výpočtu tíhového zrychlení jako aritmetického průměru výsledků z měření.

Tabulka 6 obsahuje naměřené veličiny potřebné pro výpočet místního tíhového zrychlení, získané metodou statickou i dynamickou, spolu s vypočtenou úhlovou frekvencí ω .

m [kg]	T [s]	y_0 [m]	ω [s^{-1}]	g [m/s^2]
0,05	0,67	0,109	9,434	9,68
0,10	0,75	0,135	8,378	9,50
0,10	0,74	0,135	8,491	9,74
0,15	0,91	0,201	6,927	9,65
0,15	0,91	0,207	6,897	9,86
0,20	1,05	0,270	5,984	9,66
0,20	0,55	0,068	11,466	8,87
0,30	0,64	0,101	9,895	9,86
0,40	0,73	0,134	8,643	9,99
0,40	0,57	0,063	10,965	7,53
0,60	0,89	0,198	7,036	9,78
0,60	0,71	0,102	8,912	8,13
0,80	0,81	0,143	7,786	8,69
1,00	0,90	0,183	6,966	8,88
PRŮMĚR				9,27

Tabulka 6: Výpočet tíhového zrychlení

Pro hodnotu tíhového zrychlení dostáváme

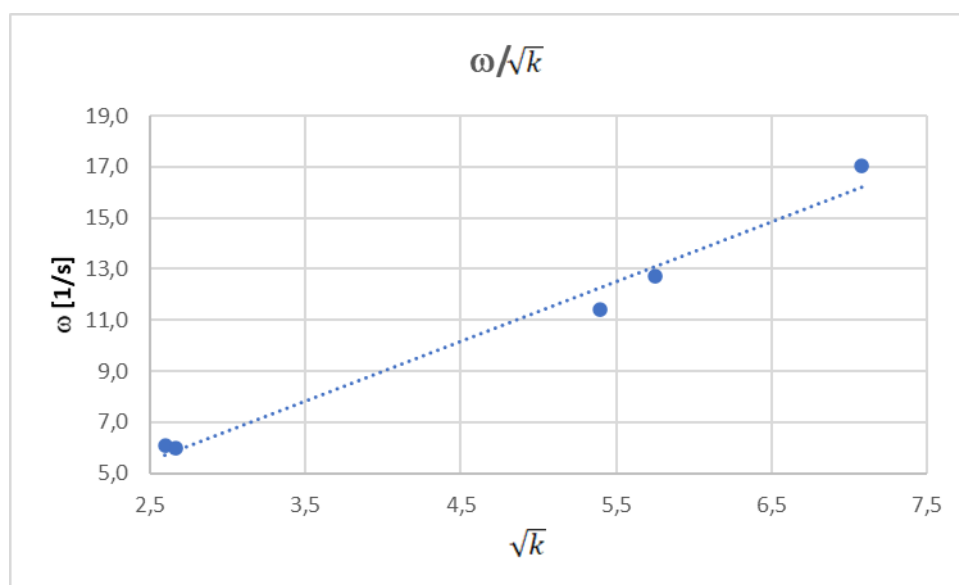
$$g = (9,27 \pm 0,74)m/s^2$$

3. 4 Znáznornění závislostí

Pro grafické znázornění závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$ byla použita data naměřená dynamickou metodou u pružin A-E při hmotnosti závaží $m = 200 \text{ g}$. Tabulka 7 obsahuje potřebné hodnoty. Graf 2 tuto závislost znázorňuje.

	A	B	C	D	E
$k \text{ [N/m]}$	33,08	6,74	7,11	29,12	50,15
\sqrt{k}	5,75	2,60	2,67	5,40	7,08
$\omega \text{ [1/s]}$	12,70	6,07	5,98	11,43	17,02

Tabulka 7: Hodnoty pro určení závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$, $m = 200 \text{ g}$



Graf 2: Znáznorněná závislost $\omega = f(\sqrt{k})$

Pro grafické znázornění $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$ byla využita data uvedená v tabulkách 8, graf 3 následně tuto závislost vykresluje.

Pružina A

$m \text{ [g]}$	200	400	600
$1/(m)^{1/2}$	2,24	1,58	1,29
$\omega \text{ [s}^{-1}\text{]}$	12,70	9,06	7,44

Pružina B

$m \text{ [g]}$	120	150	200
$1/(m)^{1/2}$	2,89	2,58	2,24
$\omega \text{ [s}^{-1}\text{]}$	7,89	6,93	6,07

Pružina C

$m \text{ [g]}$	100	120	150
$1/(m)^{1/2}$	3,16	2,89	2,58
$\omega \text{ [s}^{-1}\text{]}$	8,38	7,71	6,90

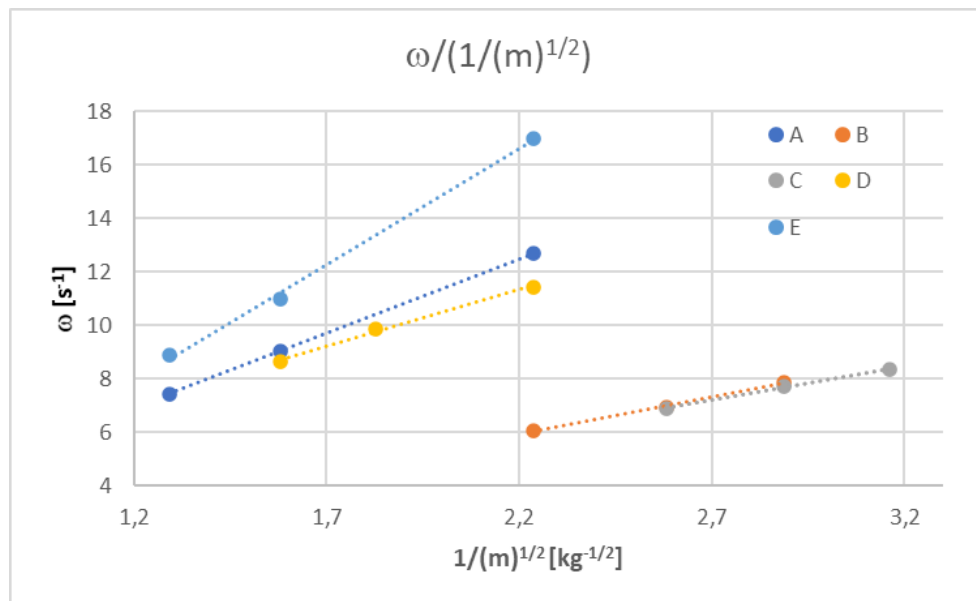
Pružina D

$m \text{ [g]}$	200	300	400
$1/(m)^{1/2}$	2,24	1,83	1,58
$\omega \text{ [s}^{-1}\text{]}$	11,46	9,90	8,65

Pružina E

$m \text{ [g]}$	200	400	600
$1/(m)^{1/2}$	2,24	1,58	1,29
$\omega \text{ [s}^{-1}\text{]}$	17,02	10,97	8,92

Tabulka 8: Hodnoty potřebné pro zjištění závislosti $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$



Graf 3: Zjištěná závislost $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$

4 Diskuse výsledků

Měření probíhalo podle postupu, nesrovnalostí byl teoretický předpoklad, že tělesa kmitají v přímce, čehož v praxi nelze dosáhnout, a proto jsou kmity v přímém směru doprovázeny rozkyvem pružin do stran, což se u některých pružin/závaží projevilo více u některých méně.

V prvním grafu je vidět lineární závislost síly, která působí na pružinu, a prodloužení pružiny.

Výsledky pro tuhost všech pěti pružin změřené metodou statickou a dynamickou jsou podobné, jejich intervaly (včetně chyb) se buď protínají, nebo jsou velmi blízké. Největší rozdíl výsledku určeného statickou a dynamickou metodou byl u pružiny B, kdy se tuhost výrazně lišila. V tomto případě je možné, že při měření došlo ke hrubé chybě.

Z tabulkových hodnot [3] víme, že tíhové zrychlení má hodnotu $9,81 \text{ m/s}^2$. Některé hodnoty, které naměřené u jednotlivých pružin byly blízké, ale celková průměrná hodnota se liší zhruba o 4 desetiny. Zřejmě tedy došlo k systematické chybě, výsledek se ale udržel v rozmezí první platné cifry. Oproti tabulkové hodnotě se liší zhruba o 5,5 %.

Přesnost měření statickou metodou je ovlivněna otřesy země v laboratoři. Katetometr sám o sobě měří s velkou přesností, ale v důsledku otřesů je chyba větší, zhruba 1 mm [2]. Tyto otřesy způsobují rozdíly především při měření se závažími s menšími hmotnostmi.

Nepřesností při dynamické metodě jsou kyvy, které v reálném případě doprovází lineární pohyb pružiny.

V grafu 2 vykreslená závislost ne úplně odpovídá závislosti, která vyšla z naměřených hodnot.

5 Závěr

Tuhosti pružin A-E, změřené **statickou** metodou

pružina A – $(32,73 \pm 0,36) \text{ N m}^{-1}$

pružina B - $(9,04 \pm 0,14) \text{ N m}^{-1}$

pružina C - $(7,26 \pm 0,16) \text{ N m}^{-1}$

pružina D - $(30,00 \pm 0,25) \text{ N m}^{-1}$

pružina E – $(48,95 \pm 0,16) \text{ N m}^{-1}$

Tuhosti pružin A-E, změřené **dynamickou** metodou

pružina A - $(33,08 \pm 0,33) \text{ N m}^{-1}$

pružina B - $(6,75 \pm 1,23) \text{ N m}^{-1}$

pružina C - $(7,11 \pm 1,21) \text{ N m}^{-1}$

pružina D - $(29,12 \pm 1,55) \text{ N m}^{-1}$

pružina E – $(50,15 \pm 1,77) \text{ N m}^{-1}$

Hodnota **tíhového zrychlení**

$$g = (9,27 \pm 0,74) \text{ m/s}^2$$

6 Seznam literatury

[1] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I: Zpracování výsledků měření. Praha: Vydavatelství MatfyzPress, 2006. ISBN 80-86732-93-2. [cit. 2022-03-02].

[2] Studijní text úloha II. Základní fyzikální praktikum [online]. 25.02.2021 [cit. 2022-03-05]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/media/zadani/texty/txt_102.pdf

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980, [cit. 2022-03-14].