

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM III – Optika

Úloha č. XXII.

Název: Geometrická optika

Pracoval: Radim Pechal

stud. skup. F-11

dne 28. dubna 2009

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

Pracovní úkol

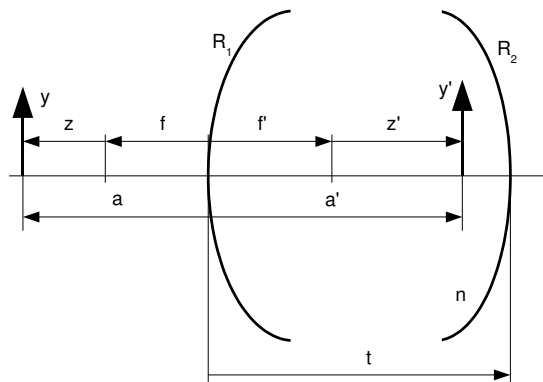
1. Určete ohniskové vzdálenosti předložených čoček.
2. Pro různé kombinace dvou čoček určete vzdálenost obrazu od druhé čočky v závislosti na vzdálenosti čoček pro různé vzdálenosti předmětu od první čočky. Pomocí fitu příslušného vztahu určete ohniskové vzdálenosti používaných čoček.
3. Pro kombinaci dvou čoček určete zvětšení a porovnejte jej s teoretickou hodnotou.
4. Pro kombinaci tří čoček změřte závislost vzdálenosti obrazu od třetí čočky na vzdálenosti čoček při konstantní vzdálenosti obrazu a předmětu pro různé vzdálenosti předmětu od první čočky.

Teoretický úvod

Jedním ze základních vztahů geometrické optiky je tzv. *Abbeův invariant*. Pokud se umístí do vzdálenosti a před kulové rozhraní materiálů s indexy lomu n_1 a n_2 předmět, tak se jeho obraz zobrazí do vzdálenosti a' . Vztah mezi vzdálenostmi udává právě Abbeův invariant

$$n_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{R} \right), \quad (1)$$

kde R je poloměr křivosti rozhraní.



Obrázek 1: Tlustá čočka.

Pro obecnou tlustou čočku, která je spojením dvou kulových rozhraní, ve vzduchu platí vztah

$$f' = -f = \frac{n \cdot R_1 \cdot R_2}{(n-1)[(n-1) \cdot t + n \cdot (R_2 - R_1)]}, \quad (2)$$

kde R_1 , R_2 jsou poloměry křivosti rozhraní, n je index lomu materiálu, ze kterého je čočka vyrobena, a t je tloušťka čočky. Pokud se k měření používá ploskovypuklá čočka (jedno z rozhraní je rovinné), pak je možné určit index lomu pomocí limity

$$f' = -f = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{n \cdot R_1 \cdot R_2}{(n-1)[(n-1) \cdot t + n \cdot (R_2 - R_1)]} = \frac{R_1}{n-1}. \quad (3)$$

To znamená, že ohnisková vzdálenost ploskovypuklé čočky nezávisí na tloušťce. Můžeme tedy předpokládat, že se jedná o tenkou čočku. Uvažme dále vztah $f = -f'$. Pak je možné pro čočku odvodit *zobrazovací rovnici*

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \quad (4)$$

kde f a f' jsou ohniskové vzdálenosti čočky a a je vzdálenost předmětu a a' je vzdálenost obrazu od čočky, z resp. z' je vzdálenost předmětu resp. obrazu od příslušného ohniska viz. obrázek 1. S využitím stejné znaménkové konvence jako v [1] (vzdálenosti, které jsou na obrázku 1 označeny šipkou zleva do prava, jsou kladné, jinak jsou záporné).

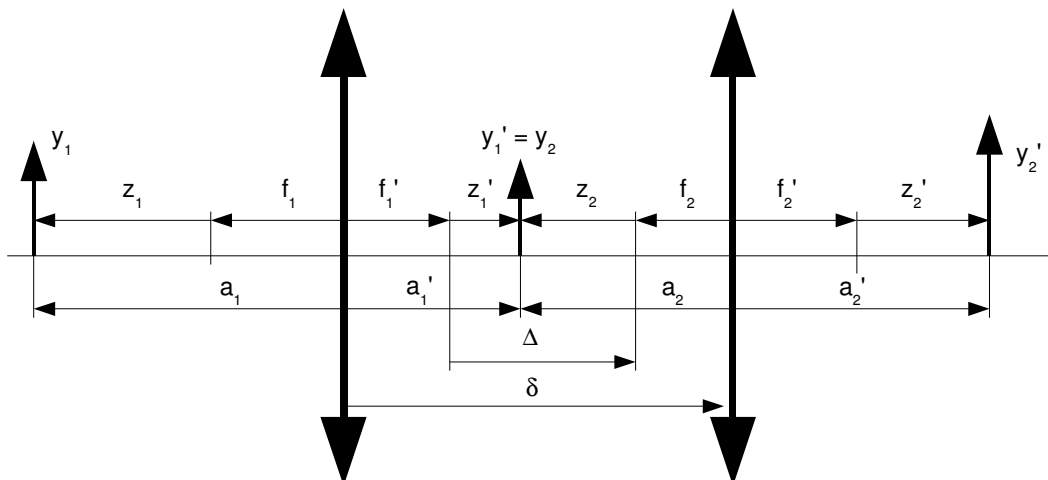
Dle [2] je možno využít vztah (4) pro určení ohniskových vzdáleností. Do pevné vzdálenosti a se umístí předmět. Pak se pomocí stínítka najde vzdálenost obrazu a' . Ohnisková vzdálenost se určí ze vztahu

$$f = -f' = \frac{a \cdot a'}{a + a'}. \quad (5)$$

Základní vztahy pro zobrazení čočkou jsou *Newtonovy zobrazovací rovnice*

$$z \cdot z' = a \cdot a', \quad (6)$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{f'} = -\frac{f}{z}. \quad (7)$$



Obrázek 2: Kombinace dvou čoček.

Z těchto rovnic je možné určit vztahy pro kombinaci dvou zobrazení. Mějme dvě čočky o ohniskových vzdálenostech f_1 , f_1' , f_2 a f_2' vzdáleny tak, že f_1' a f_2 jsou vzdáleny o Δ . Do vzdálenosti z_1 od ohniska f_1 umístíme předmět. Obraz tohoto předmětu se nám zobrazí do vzdálenosti

$$z_2' = \frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_1' - \Delta}. \quad (8)$$

Při měření je však mnohem praktičtější používat vzdálenosti od čoček a ne od ohnisek. Uvážíme, že $f' = -f$ a vztah upravíme do tvaru

$$a_2' = \frac{-f_2'^2}{\frac{-f_1'^2}{a_1 - f_1} - (\delta - f_1 + f_2)} + f_2'. \quad (9)$$

Pokud naměříme závislost a_2' na δ , měl by nám vyjít vztah typu

$$a_2' = \frac{-f_2'^2 + A \cdot f_2' - f_2' \cdot \delta}{A - \delta}. \quad (10)$$

který závisí na f'_2 a A . Z A je možno určit f'_1

$$f'_1 = \frac{A \cdot a_1 + f_2 \cdot a_1}{a_1 - f_2 - A}. \quad (11)$$

Pokud tedy naměříme závislost a'_2 na δ , můžeme pomocí fitování tohoto vztahu určit ohniskové vzdálenosti jednotlivých čoček.

Pro zvětšení soustavou dvou čoček platí vztah

$$\beta = \frac{y'_2}{y_1} = \frac{f_1 \cdot f_2}{-f_1^2 - (a_1 - f_1)(\delta + f_1 + f_2)}. \quad (12)$$

Při zobrazení pomocí tří čoček se situace zesložití. Pomocí vztahů (6) a (7) je možné odvodit vzorec pro vzdálenost z'_3

$$z'_3 = \frac{f_3^2 (f_1^2 + z_1 \cdot \Delta_1)}{-z_1 \cdot f_2^2 + \Delta_2 (f_1^2 + z_1 \cdot \Delta_1)}, \quad (13)$$

kde se používá podobné značení jako na obrázku 2. Vzdálenost mezi ohnisky f'_1 a f_2 se označí Δ_1 a vzdálenost mezi ohnisky f'_2 a f_3 se označí Δ_2 . Podobně jako na obrázku 2 zavedeme také δ jako vzdálenost čoček. Opět budeme používat místo vzdáleností od ohnisek vzdálenosti od rozhraní. Pak upravíme vztah na tvar

$$a'_3 = \frac{f_3^2 (f_1^2 + (a_1 - f_1) \cdot \Delta_1)}{-(a_1 - f_1) \cdot f_2^2 + \Delta_2 (f_1^2 + (a_1 - f_1) \cdot \Delta_1)} + f'_3. \quad (14)$$

V případě, že při měření zůstává vzdálenost obrazu a předmětu $l = -a_1 + f'_1 - 2 \cdot f_2 - f_3 + \delta_1 + \delta_2 + a'_3$ stále stejná a mění se pouze vzdálenost δ_1 , tak se vztah pro vzdálenost obrazu a'_3 upraví na tvar

$$a'_3 = \frac{f_3^2 (f_1^2 + (a_1 - f_1) \cdot (\delta_1 + f'_1 - f_2))}{-(a_1 - f_1) \cdot f_2^2 + (l + a_1 - f'_1 + f_2 - \delta_1 - a'_3) (f_1^2 + (a_1 - f_1) \cdot (\delta_1 + f'_1 - f_2))} + f'_3, \quad (15)$$

což po úpravě dává vztah typu

$$A(\delta_1) \cdot a_3'^2 + B(\delta_1^2, \delta_1) \cdot a'_3 + C(\delta_1) = 0, \quad (16)$$

kde koeficienty A , B a C jsou značně složité výrazy. Z výrazu (16) můžu vyjádřit a'_3 pomocí diskriminantu

$$a'_3(\delta_1) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}. \quad (17)$$

Výsledky měření

Nejdříve jsem proměřil ohniskové vzdálenosti používaných čoček. Používal jsem ploskovypuklé čočky. K určení ohniskových vzdáleností jsem použil vztah (5). Vzdálenosti a , a' jsem měřil pomocí metru s přesností $\sigma = \pm 0,2$ cm. Všechna měření jsem prováděl pro $a = (-14,0 \pm 0,2)$ cm.

Z těchto dat jsem určil jednotlivé ohniskové vzdálenosti čoček

$$f'_1 = -f_1 = (7,5 \pm 0,2) \text{ cm},$$

$$f'_2 = -f_2 = (7,4 \pm 0,2) \text{ cm},$$

$$f'_3 = -f_3 = (6,7 \pm 0,2) \text{ cm}.$$

Dále jsem měřil ohniskové vzdálenosti čoček při zobrazení dvou čoček. Postupoval jsem tak, že jsem zvolil pevné a_1 , pak jsem zvolil polohu stínítka a posunem vzdálenější čočky od předmětu jsem nastavil polohu této čočky tak, že se obraz objevil na stínítku. Odečtením polohy druhé čočky jsem mohl určit δ a z'_2 . Opět jsem měření prováděl pomocí metru a hodnoty jsem určoval s přesností $\sigma = \pm 0,2$ cm.

Čočka č. 1		Čočka č. 2		Čočka č. 3	
a' [cm]	f'_1 [cm]	a' [cm]	f'_2 [cm]	a' [cm]	f'_3 [cm]
16,0	$7,47 \pm 0,06$	15,7	$7,40 \pm 0,06$	13,0	$6,74 \pm 0,05$
16,1	$7,49 \pm 0,06$	16,0	$7,47 \pm 0,06$	13,0	$6,74 \pm 0,05$
15,9	$7,44 \pm 0,06$	15,7	$7,40 \pm 0,06$	12,9	$6,71 \pm 0,05$
15,8	$7,42 \pm 0,06$	15,8	$7,42 \pm 0,06$	12,8	$6,69 \pm 0,05$
16,1	$7,49 \pm 0,06$	15,9	$7,44 \pm 0,06$	13,0	$6,74 \pm 0,05$
16,0	$7,47 \pm 0,06$	15,9	$7,44 \pm 0,06$	13,1	$6,77 \pm 0,05$
15,9	$7,44 \pm 0,06$	16,0	$7,47 \pm 0,06$	13,0	$6,74 \pm 0,05$
16,1	$7,49 \pm 0,06$	16,0	$7,47 \pm 0,06$	12,8	$6,69 \pm 0,05$
16,0	$7,47 \pm 0,06$	15,9	$7,44 \pm 0,06$	12,7	$6,66 \pm 0,05$
16,0	$7,47 \pm 0,06$	16,1	$7,49 \pm 0,06$	13,0	$6,74 \pm 0,05$

Tabulka 1: Měření ohniskových vzdáleností čoček

a_1 [cm]	δ_1 [cm]	δ_2 [cm]	a'_2 [cm]	β [-]	teor [-]
-12	27,3	-	54,7	0,86	$0,56 \pm 0,37$
-12	27,9	-	39,1	0,58	$0,55 \pm 0,35$
-12	28,3	-	28,7	0,33	$0,55 \pm 0,34$
-12	29,3	-	22,7	0,26	$0,53 \pm 0,33$
-14	24,2	-	55,8	0,64	$0,53 \pm 0,53$
-14	24,7	-	40,3	0,44	$0,52 \pm 0,50$
-14	25,0	-	35,0	0,37	$0,51 \pm 0,48$
-14	25,5	-	29,5	0,27	$0,50 \pm 0,46$
-12	-	26,1	55,9	1,03	$0,56 \pm 0,43$
-12	-	26,5	45,5	0,80	$0,55 \pm 0,40$
-12	-	27,0	35,0	0,55	$0,55 \pm 0,38$
-12	-	27,7	24,3	0,36	$0,54 \pm 0,36$
-14	-	23,3	56,7	0,77	$0,53 \pm 0,60$
-14	-	23,6	41,4	0,50	$0,52 \pm 0,57$
-14	-	24,2	30,8	0,37	$0,51 \pm 0,53$
-14	-	24,8	25,2	0,26	$0,50 \pm 0,50$

Tabulka 2: Měření ohniskových vzdáleností a zvětšení pro dvě čočky.

Pokud je v tabulce 1 δ_1 proškrtnuto, znamená to, že měření se provádělo s čočkou č. 1 a čočkou č. 3, pokud je proškrtnuto δ_2 , znamená to, že se měření provádělo s čočkou č. 1 a čočkou č. 2.

Naměřená data jsem fitoval vztahem (10) pomocí programu GNUplot. Ze zjištěných hodnot jsem určil ohniskové vzdálenosti jednotlivých čoček. Pro zobrazení první a druhou čočkou při $a_1 = (-12,0 \pm 0,2)$ cm a $a_1 = (-14,0 \pm 0,2)$ cm mi vyšlo $f'_1 = (7,4 \pm 1,1)$ cm; $f'_1 = (7,4 \pm 0,9)$ cm, $f'_2 = (6,9 \pm 0,7)$ cm; $f'_2 = (7,2 \pm 0,4)$ cm. Pro zobrazení čočkou č. 1 a čočkou č. 3 mi při $a_1 = (-12,0 \pm 0,2)$ cm a $a_1 = (-14,0 \pm 0,2)$ cm vyšlo $f'_1 = (7,2 \pm 0,8)$ cm; $f'_1 = (7,5 \pm 1,3)$ cm, $f'_3 = (7,2 \pm 0,7)$ cm; $f'_3 = (6,5 \pm 0,3)$ cm.

Z těchto hodnot jsem určil jednotlivé ohniskové vzdálenosti jako aritmetický průměr zjištěných hodnot

$$f'_1 = -f_1 = (7,4 \pm 1,0) \text{ cm},$$

$$f'_2 = -f_2 = (7,1 \pm 0,6) \text{ cm},$$

$$f'_3 = -f_3 = (6,9 \pm 0,5) \text{ cm}.$$

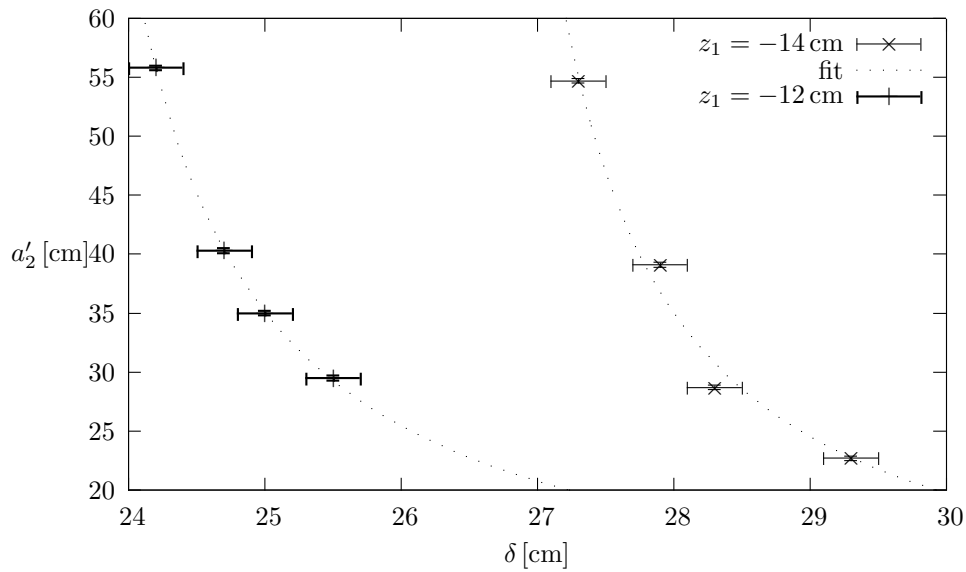
Měřil jsem také zvětšení kombinace čoček. Měl jsem pevně danu velikost předmětu $y = 1,0$ mm. Na stínítku jsem pak pomocí záměrného kříže odečítal velikost obrazu. Velikost obrazu jsem

odečítal s přesností $\sigma = \pm 0,05$ mm. Dosazením určených ohniskových vzdáleností do vztahu (12) jsem určil β_{teor}

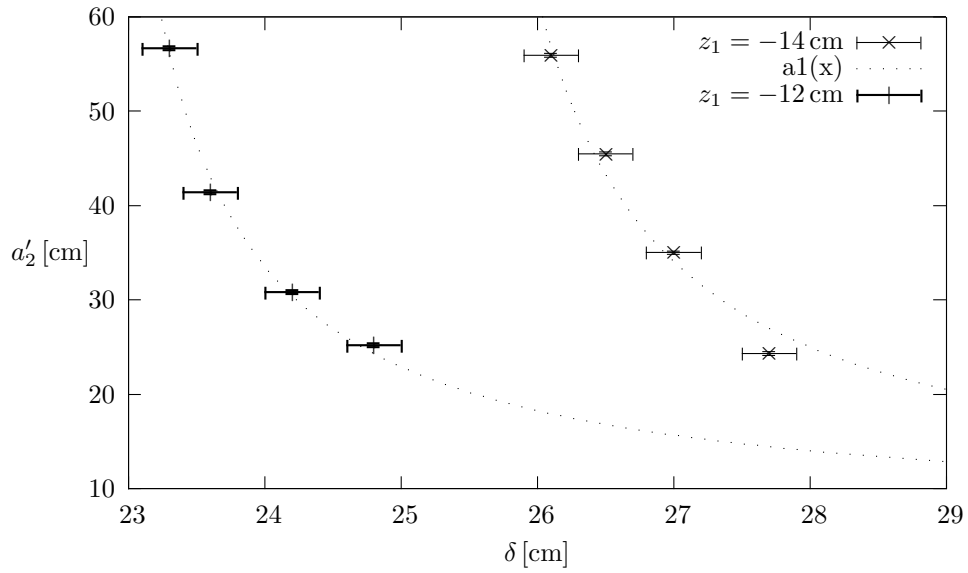
Dále jsem prováděl měření pro tři čočky. Postupoval jsem tak, že jsem nastavil pevně vzdálenost obrazu (resp. stínítka) od předmětu na velikost $l = (94,0 \pm 1)$ mm.

a_1 [cm]	δ_1 [cm]	δ_2 [cm]	a'_3 [cm]
-12,0	7,0	12,6	62,4
-12,0	9,5	12,2	60,3
-12,0	12,0	11,5	58,5
-12,0	14,5	10,8	56,7
-12,0	17,0	9,6	55,4
-14,0	10,0	11,2	58,8
-14,0	12,5	10,4	57,1
-14,0	15,0	8,7	56,3
-14,0	17,5	6,3	56,2

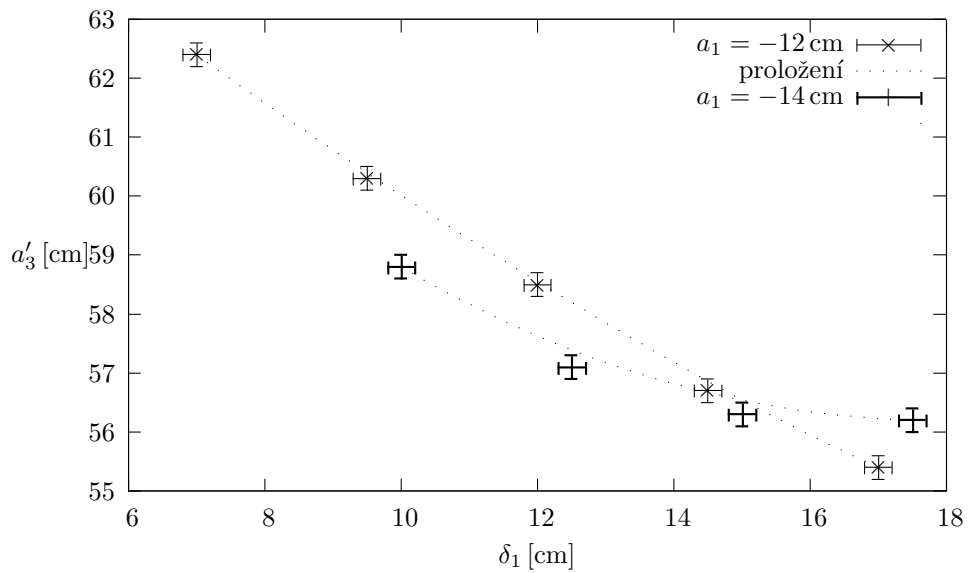
Tabulka 3: Měření ohniskových vzdáleností a zvětšení pro tři čočky.



Graf 1: Závislost vzdálenosti obrazu od čočky na vzdálenosti čoček pro čočku č. 1 a čočku č. 2.



Graf 2: Závislost vzdálenosti obrazu od čočky na vzdálenosti čoček pro čočku č. 1 a čočku č. 3.



Graf 3: Závislost vzdálenosti obrazu od čočky na vzdálenosti 1. a 2. čočky pro zobrazení třemi čočkami.

Diskuse výsledků

Při měření ohniskových vzdáleností jednotlivých čoček jsem se dopouštěl největší chyby při nastavování stínítka tak, aby bylo v místě obrazu. Proto jsem vždy provedl celkově deset měření a naměřená data jsem zpracoval statisticky.

Měření ohniskové vzdálenosti mohlo být také ovlivněno nevhodným upevněním čočky. Čočky byly upevněny v rámečku, který byl uchycen ve stojanu. Stojan měl vyznačenu rysku, ze které jsem odečítal údaje. Ovšem nemohl jsem zaručit, že ryska odpovídala přesně rozhraní. Proto jsem předpokládal, že hodnoty vzdáleností odečítám s přesností $\sigma = \pm 0,2$ cm. (Ohniskové vzdálenosti je možné také měřit pomocí Besselovy metody popsané v [2], ale chtěl jsem, aby mé měření nekopírovalo zadání úlohy č. 2 v praxi.)

Při měření závislosti a'_2 na δ jsem postupoval tak, že jsem zafixoval vzdálenost a_1 . Pak jsem volil různé polohy stínítka. Posunem druhé čočky jsem pak docílil toho, že se mi obraz zobrazil na stínítko. Tato metoda má výhodu v tom, že při pohybu druhou čočkou se poloha obrazu výrazněji mění, než při pevné poloze druhé čočky a pohybu stínítka. Při výraznější změně ostrosti je snazší nalézt maximum.

Při určování ohniskových vzdáleností z měření soustavy dvou čoček se ukázalo jako nevhodné malý počet měření. Malý počet měření byl způsoben malou změnou δ . Musel jsem tak výrazně měnit polohu stínítka, aby byla změna δ zřetelná. Tím jsem však mohl pouze na cca 5 místech odměřit a'_2 . V případě, že bych měl k dispozici delší optickou lavici, tak bych mohl naměřit více bodů charakteristiky.

Naměřená data jsem fitoval pomocí programu GNUplot vztahem (10). Pomocí vztahu (11) jsem pak určil f_1 . Určené hodnoty se shodují v rámci chyby měření s hodnotami naměřenými pro jednotlivé čočky v prvním bodu.

Při měření soustavy se třemi čočkami jsem postupoval tak, že jsem zafixoval polohu předmětu a obrazu. Pak jsem nastavil danou délku δ_1 . Měřil jsem závislost z'_3 na δ_2 . Tento postup se neukázal jako úplně vhodný, neboť výsledný teoretický vztah byl dost komplikovaný a vzhledem k počtu bodů charakteristiky fit nedopadl moc dobře. Proto jsem výslednou charakteristiku pouze proložil Beziérovou křivkou.

Při odvozování vztahů pro geometrickou optiku se předpokládá apaxiální aproximace. Tento předpoklad jsem se snažil dodržet tím, že jsem za zdroj světla umístil černou clonu, která vybírala pouze paprsky poblíž osy. Jako zdroj světla jsem používal sodíkovou výbojku, kterou mohu považovat za zdroj monochromatického světla. Předpokládám, že chyby, které mohla způsobit barevná vada, paraxiální aproximace atd., jsou zanedbatelné vůči zmiňovaným chybám.

Chyby měření u všech vypočtených hodnot jsem určil pomocí kvadratického zákona přenosu chyb, nebo pomocí vztahů pro statistické zpracování naměřených hodnot uvedených v [3].

Závěr

Pro jednotlivé čočky jsem změřil ohniskovou vzdálenost

$$f'_1 = -f_1 = (7,5 \pm 0,2) \text{ cm},$$

$$f'_2 = -f_2 = (7,4 \pm 0,2) \text{ cm},$$

$$f'_3 = -f_3 = (6,7 \pm 0,2) \text{ cm},$$

s využitím zobrazovací rovnice.

Pro soustavu dvou čoček jsem změřil závislost vzdálenosti obrazu a'_2 na vzdálenosti čoček. Tyto závislosti jsou znázorněny v grafu 1 a grafu 2. Pomocí fitování naměřených dat vztahem (10) jsem určil jednotlivé ohniskové vzdálenosti čoček

$$f'_1 = -f_1 = (7,4 \pm 1,0) \text{ cm},$$

$$f'_2 = -f_2 = (7,1 \pm 0,6) \text{ cm},$$

$$f'_3 = -f_3 = (6,9 \pm 0,5) \text{ cm} .$$

Tyto hodnoty se shodují v rámci chyby s hodnotami zmíněnými výše.

Pro soustavu tří čoček jsem změřil závislost vzdálenosti obrazu od poslední čočky na vzdálenosti čoček. Tato závislost je zobrazena v grafu 3.

Seznam použité literatury

- [1] P. Malý: *Optika*.
Karolinum, Praha 2008. ISBN 978-80-246-1342-0.
- [2] I. Pletant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fährnich: *Fyzikální praktikum III*. Optika.
Karolinum, Praha 1993. ISBN 80-7066-763-X.
- [3] J. English: *Zpracování výsledků fyzikálních měření*.
Praha 2000. <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.pdf>