

Zadání

Pracovní úkol

1. Na optickém stole je sestaven Koherentní optický procesor. Na obr. v „Pokynech měření“ (nebo skripta str. 188) je vyznačeno schematické uspořádání a vyznačeny ohniskové délky čoček, které jsou v úloze k dispozici. Ověřte, zda čočky \check{C}_1 a \check{C}_2 zachovávají rovnoběžnost paprsků. Spočítejte a ověřte rozšíření paprsku použitým teleskopem. Změřte zvětšení obrazu předmětu v rovině P_3 a zvětšení obrazu Fourierova spektra v rovině P_4 .
2. Pozorujte Fourierovský obraz následujících tří předmětů umístěných v rovině P_1 :
 - a. čtvercového otvoru
 - b. soustavy rovnoběžných pruhů
 - c. sítky
3. Proměřte Fourierova spektra těchto předmětů v rovině P_2 nebo P_4 a z naměřených údajů vypočítejte rozměry předmětů, tj. velikost stran čtvercového otvoru, šířku a periodu soustavy rovnoběžných pruhů a periodu a šířku pruhů sítky.
4. Parametry předmětů z úkolu 2 změřte mikroskopem, který je v úloze č. 6, č. 30 nebo č. 14. Porovnejte hodnoty vypočtené z Fourierova spektra s přímým měřením mikroskopem.
5. Po dohodě s vyučujícím vyberte a kvalitativně ověřte některou z vlastností Fourierovy transformace, které jsou uvedeny v odd. 4.10.2 části I skript nebo na www.
6. V rovině P_1 umístěte vybraný předmět. Do roviny P_2 vkládejte různé filtry a zkoumejte jejich vliv na geometrický obraz v rovině P_3 . Pozorované jevy vysvětlete.

Pomůcky

optický stůl, He-Ne laser, zrcadla, čočky, stínítka, milimetrový papír, filtry, předměty: čtvercový otvor, soustava rovnoběžných pruhů, sítka, trojúhelníkový otvor, trojúhelníkový otvor s kruhovým otvorem, Český lev v kleci

Teoretický úvod¹

Základy fourierovské optiky

Základem fourierovské optiky je to, že čočka vytváří v obrazové ohniskové rovině rozložení amplitudy světla, které je úměrné Fourierově transformaci amplitudy nacházející se v předmětové rovině téže čočky.

Jednorozměrnou Fourierovu transformaci komplexní funkce $g(x)$ lze matematicky vyjádřit jako:

$$F\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp[-i2\pi xf] dx \quad (1)$$

Inverzní Fourierova transformace funkce $G(f)$ je pak definována jako:

$$F^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp[i2\pi xf] df \quad (2)$$

Obdobně vyjádříme dvourozměrnou Fourierovu transformaci funkce $g(x,y)$:

$$F\{g(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \quad (3)$$

$$\text{a inverzní funkce } G(f_x, f_y): F^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y \quad (4)$$

Uvedeme některé vlastnosti Fourierovy transformace:

➤ Linearita: $F\{\alpha g + \beta h\} = \alpha F\{g\} + \beta F\{h\}$ (5)

➤ Fourierův integrální teorém: $FF^{-1}\{g(x,y)\} = F^{-1}F\{g(x,y)\} = g(x,y)$ (6)

➤ Dvojitá Fourierova transformace: $FF\{g(x,y)\} = g(-x,-y)$ (7)

➤ Transformace konvoluce: $F\{g(x,y) * h(x,y)\} = F\{g(x,y)\} * F\{h(x,y)\}$ (8)

α, β jsou komplexní konstanty a $g(x,y)$ a $h(x,y)$ komplexní funkce.

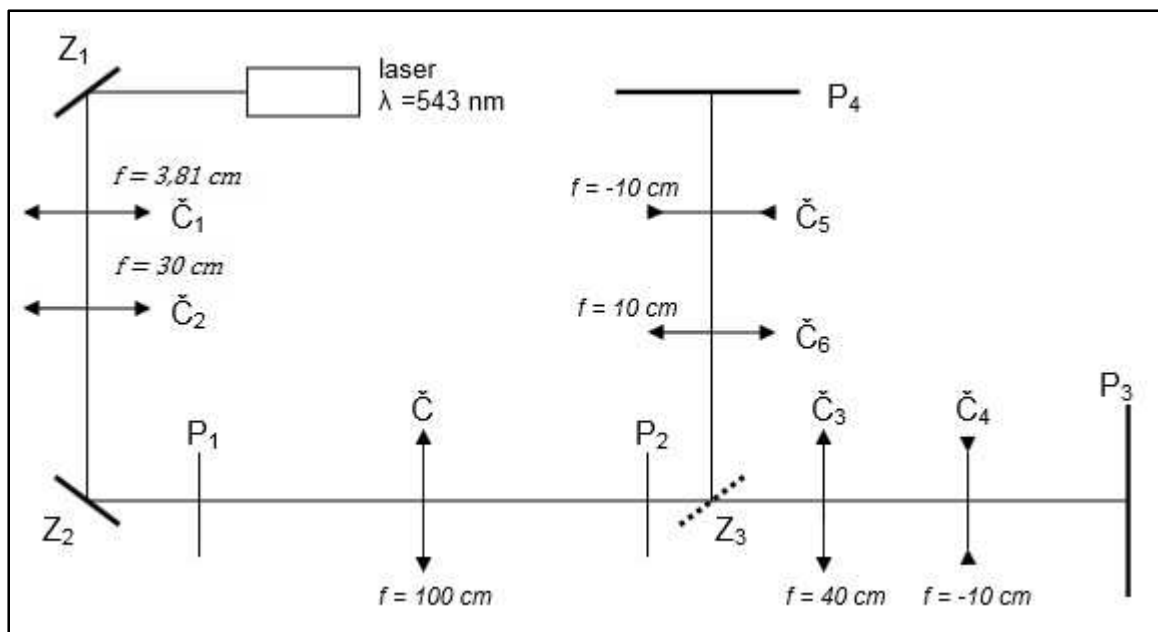
Experimentální uspořádání

Měření provádíme s uspořádáním součástek schematicky znázorněném na *Obr. 1*. Čočky \check{C}_1 a \check{C}_2 slouží k rozšíření laserového svazku a minimalizaci jeho divergence. Do roviny P_1 umístíme předmět, který chceme zobrazit Fourierovou transformací. Tato rovina odpovídá předmětové ohniskové rovině čočky \check{C} , která provádí transformaci. Fourierův obraz se objevuje v její obrazové ohniskové rovině P_2 .

Pro lepší pozorování umístíme za rovinu P_2 zrcadlo Z_3 , které odkloní svazek a pomocí čoček \check{C}_5 a \check{C}_6 pozorujeme na stínítku v rovině P_4 zvětšený obraz Fourierova spektra.

Další Fourierovu transformaci provádí čočka \check{C}_3 . V její obrazové ohniskové rovině vzniká zmenšený obraz předmětu. Pro jeho zvětšení umístíme do této roviny čočku \check{C}_4 a zvětšený obraz dvojitě Fourierovy transformace pozorujeme v rovině P_3 . Obraz můžeme modifikovat umístěním filtrů do roviny P_2 , které selektivně potlačí či zcela eliminují některé rysy geometrického obrazu.

¹ Napsáno na základě [1]



Obr. 1: Experimentální uspořádání koherentního optického procesoru

Při rozkladu ve Fourierově transformaci se vyšší frekvence (detaily a ostré okraje předmětu) zobrazují dále od optické osy. Platí vztah:

$$x = \lambda f, \quad (9)$$

kde x je vzdálenost od optické osy, λ vlnová délka použitého světla a f ohnisková vzdálenost čočky, kterou provádíme Fourierovu transformaci.

Měřením parametrů Fourierovy transformace můžeme určit rozměry zobrazovaných předmětů. Pro obdélníkový otvor o stranách a , b sledujeme na stínítku v rovině P_2 rozložení intenzity světla popsané vztahem:

$$I(x, y) = \left[\frac{\lambda f \sin(\frac{\pi a x}{\lambda f})}{\pi x} \right]^2 \left[\frac{\lambda f \sin(\frac{\pi b y}{\lambda f})}{\pi y} \right]^2 \quad (10)$$

Minima intenzity tedy zaznamenáme pro

$$x_k = \pm \frac{\lambda f}{a} k, \quad y_k = \pm \frac{\lambda f}{b} k; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

kde x_k , y_k jsou souřadnice na stínítku, f je ohnisková vzdálenost čočky \check{C} .

Pro předmět tvořený rovnoběžnými pruhy o šířce a a vzájemné vzdálenosti b můžeme analogicky odvodit vztah pro maxima intenzity:

$$x_k = \pm \frac{\lambda f}{b} k; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Tato maxima jsou navíc modulována funkcí sinc, jejíž maxima leží v bodech:

$$x_l = \pm \frac{\lambda f}{a} l; \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Pro čtvercovou síť s parametry a , b dostaneme obdobné vztahy jako je vztah pro sadu rovnoběžných pruhů. Vztah pro maxima na ose x bude stejný jako vztah (12) a vztah pro maxima na ose y získáme záměnou $x_k \rightarrow y_k$, $a \rightarrow b$ ve vztahu (12).

Výsledky měření

Sestavení koherentního optického procesoru

Před měřením jsme ověřili, že je koherentní optický procesor sestaven správně podle schématu na Obr. 1. Pomocí stínítka s milimetrovým papírem jsme zkoumali, zda čočky \check{C}_1 a \check{C}_2 zachovávají rovnoběžnost paprsků. Zjistili jsme, že průměr svazku za čočkou \check{C}_2 měřený v různých vzdálenostech od ní byl přibližně konstantní – jeho hodnota byla přibližně 13 mm (s odchylkou 1 mm). Dále jsme proměřili vzdálenosti $|P_1\check{C}_1|$, $|\check{C}_1P_2|$, $|\check{C}_3\check{C}_4|$. Zjistili jsme, že vzdálenosti přibližně odpovídají požadavkům experimentálního uspořádání pro ohniskové vzdálenosti čoček uvedené v Obr. 1. Tedy $|P_1\check{C}_1| \doteq 100\text{ cm}$, $|\check{C}_1P_2| \doteq 100\text{ cm}$, $|\check{C}_3\check{C}_4| \doteq 40\text{ cm}$. Odchytky od těchto hodnot byly dostatečně malé na to, aby nebránily správnému průběhu experimentu.

Pro určení zvětšení teleskopu tvořeného čočkami \check{C}_1 a \check{C}_2 jsme změřili průměr d laserového svazku před soustavou a průměr d' za soustavou:

$$d = (2,0 \pm 0,5)\text{mm}, d' = (13 \pm 1)\text{mm}$$

Chyby odhadnuty podle možností přesného rozpoznání okraje laserové stopy na milimetrovém papíře. Zvětšení Z_1 teleskopu nyní vypočteme ze vzorce $Z_1 = \frac{d'}{d}$ a chybu určíme metodou přenosu chyb dle [2]:

$$Z_1 = 7 \pm 2$$

Teoretickou hodnotu zvětšení získáme z poměru ohniskových vzdáleností čoček:

$$Z_1 = \frac{f_{\check{C}_2}}{f_{\check{C}_1}} = 8$$

Obdobným způsobem jsme změřili zvětšení Z_2 obrazu předmětu v rovině P_3 (d je průměr svazku v rovině P_1 , d' průměr svazku v rovině P_3):

$$d = (13 \pm 1)\text{mm}, d' = (34 \pm 1)\text{mm} \Rightarrow Z_2 = \frac{d'}{d} = 2,6 \pm 0,2$$

Stejně jsme změřili také zvětšení Z_3 obrazu Fourierova spektra v rovině P_4 (d je průměr svazku v rovině P_2 , d' průměr svazku v rovině P_4):

$$d = (2,0 \pm 0,5)\text{mm}, d' = (10 \pm 1)\text{mm} \Rightarrow Z_3 = \frac{d'}{d} = 5 \pm 1$$

Pozorování Fourierovského obrazu předmětů a určení jejich rozměrů

Soustava rovnoběžných pruhů

Fourierův obraz soustavy rovnoběžných pruhů jsme napřed pozorovali v rovině P_2 . Podle rysky na stínítku a posunů pomocí mikrometrických šroubů jsme určovali polohy maxim obrazu.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v Tab. 1 (jednotlivá maxima jsou číslována od hlavního maxima s číslem 0 : maxima vlevo od hlavního mají záporná čísla, maxima vpravo kladná) Chybu určení každé polohy stanovujeme na $0,2\text{ mm}$ na základě možnosti přesného určení středu maxim. Polohu prvního maxima x_1 určíme lineární regresí závislosti polohy maxima na jeho čísle, neboť předpokládáme konstantní vzdálenosti maxim. Tato závislost včetně lineární regrese je znázorněna v Grafu 1.

$$Z\text{ regrese: } x_1 = (5,9 \pm 0,4)\text{mm}$$

Chyba je dána součtem relativní chyby regrese a největší relativní chyby vzniklé při měření poloh maxim.

Dosažením hodnot x_1 , $\lambda = 543\text{ nm}$ (vlnová délka světla z laseru dle [1]), $f = 100\text{ cm}$ a $k = 1$ do rovnice (12) vypočteme vzdálenost mezi jednotlivými pruhy. Chybu určíme metodou přenosu chyb dle [2]:

$$b = (91 \pm 6)\mu\text{m}$$

Skutečnou vzdálenost b_{skut} mezi proužky jsme pro porovnání změřili pomocí mikroskopu s kamerou připojenou k počítači. Měřili jsme 5x hodnotu $10 b_{skut}$. Hodnota b_{skut} je pak vypočtena vydělením deseti. Chyba je dána směrodatnou odchylkou naměřených hodnot:

$$b_{skut} = (95,9 \pm 0,3)\mu m$$

Maximum funkce sinc nebylo pozorováno a nebylo tedy možné určit šířku proužků.

Na stínítku s milimetrovým papírem v rovině P_4 jsme změřili vzdálenost prvního maxima vpravo od hlavního maxima $s_{1p} = (58 \pm 1)mm$ a vzdálenost prvního maxima vlevo od hlavního maxima $s_{1l} = (57 \pm 1)mm$. Hodnotu s_1 stanovíme jejich aritmetickým průměrem: $s_1 = (57,5 \pm 1)mm$.

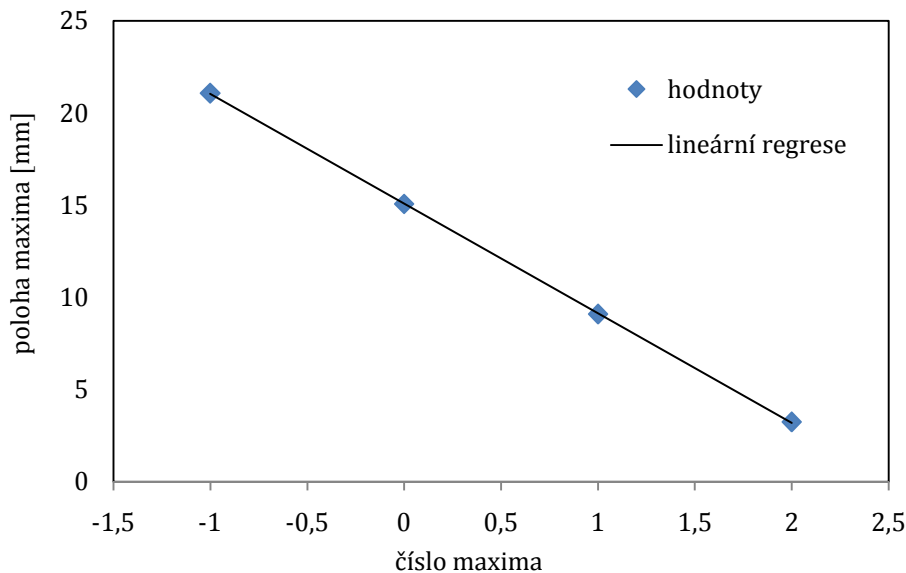
Odsud můžeme přesněji vypočíst zvětšení obrazu Fourierova spektra: $Z_3 = \frac{s_1}{x_1} = 9,7 \pm 0,7$.

Chyba je stanovena metodou přenosu chyb.

Číslo maxima	-1	0	1	2
Poloha maxima [mm]	21,1	15,1	9,1	3,3

Tab. 1: Maxima Fourierova spektra soustavy rovnoběžných pruhů

Graf 1: Určení vzdálenosti maxim pro soustavu rovnoběžných pruhů



Sítka

Fourierův obraz sítky byl pozorován podobně jako pro soustavu pruhů. Problém byl však nyní dvojrozměrný. Naměřené polohy jednotlivých maxim na ose x (resp. y) jsou uvedeny v Tab. 2 (resp. 3) a příslušná závislost je znázorněna v Grafu 2 (resp. 3).

Z lineární regrese: $x_1 = (5,5 \pm 0,6) mm$, $y_1 = (6,2 \pm 0,5)mm$

Odsud podle vztahu (12) a jeho modifikace $x_k \rightarrow y_k$, $a \rightarrow b$ získáváme parametry mřížky:

$$a = (100 \pm 10)\mu m, b = (87 \pm 6)\mu m$$

Skutečnou vzdálenosti a_{skut} a b_{skut} mezi proužky sítky jsme měřili stejně jako skutečnou vzdálenost mezi proužky u soustavy proužků:

$$a_{skut} = (95,9 \pm 0,7)\mu m, b_{skut} = (98,7 \pm 0,3)\mu m$$

Na stínítku s milimetrovým papírem v rovině P_4 jsme určovali vzdálenosti maxim a počítali zvětšení Z_3 podobně jako u soustavy pruhů. Osa x : $s_{1p} = (59 \pm 1)mm$, $s_{1l} = (60 \pm 1)mm$, průměr: $s_1 = (59,5 \pm 1,0)mm$, zvětšení: $Z_3 = 11 \pm 1$. Osa y : $s_{1p} = (55 \pm 1)mm$, $s_{1l} = (57 \pm 1)mm$, průměr: $s_1 = (56 \pm 1)mm$, zvětšení: $Z_3 = 9,0 \pm 0,7$.

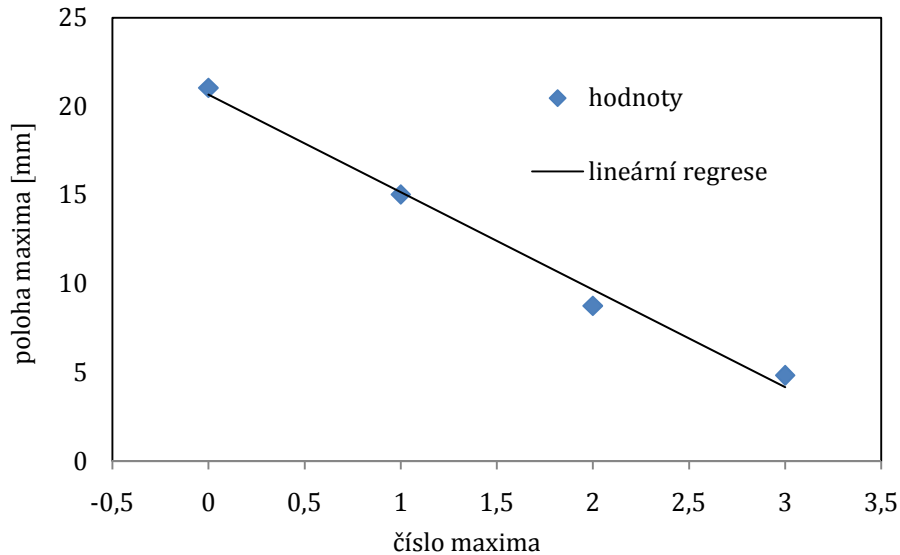
Číslo maxima	0	1	2	3
Poloha maxima [mm]	21,1	15,0	8,8	4,8

Tab. 2: Maxima na ose x Fourierova spektra síťky

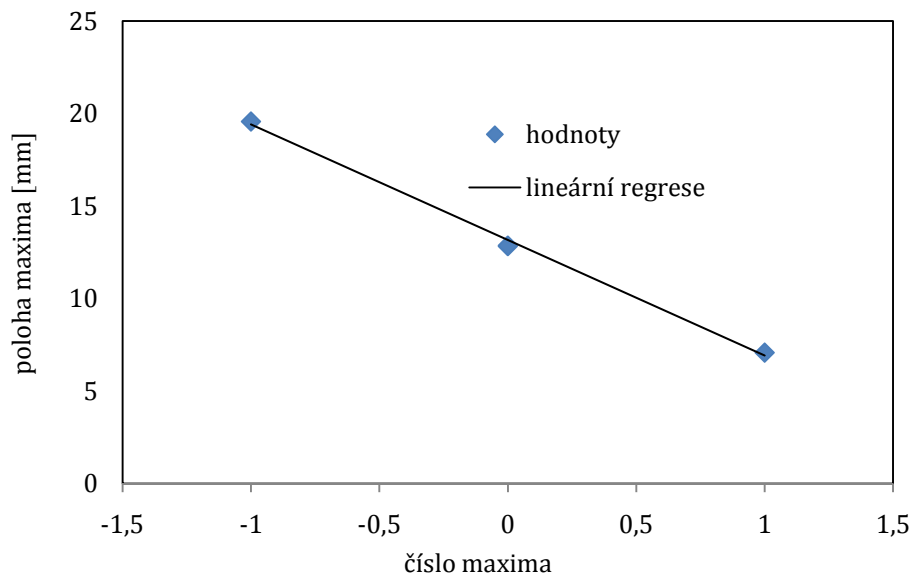
Číslo maxima	-1	0	1
Poloha maxima [mm]	19,6	12,9	7,1

Tab. 3: Maxima na ose y Fourierova spektra síťky

Graf 2: Určení vzdálenosti maxim na ose x pro síťku



Graf 3: Určení vzdálenosti maxim na ose y pro síťku



Čtvercový otvor

Fourierův obraz čtvercového otvoru jsme pozorovali v rovině P_4 , neboť v rovině P_2 nebylo možné rozeznat detaily. Pomocí milimetrového papíru jsme naměřili vzdálenost sedmého maxima od hlavního maxima: $s_7 = (15 \pm 1) \text{ mm}$. Jelikož předpokládáme konstantní vzdálenost jednotlivých maxim, získáme vzdálenost prvního maxima od hlavního vydělením sedmi:

$$s_1 = (2,1 \pm 0,1) \text{ mm}$$

Pro výpočet polohy maxima v rovině P_2 potřebujeme znát zvětšení Z_3 . Vypočteme ho aritmetickým průměrem jeho hodnot změřených v částech *Soustava rovnoběžných pruhů a Sítka* (2 hodnoty – osa x, osa y). Hodnotu uvedenou v odstavci *Sestavení koherentního optického procesoru* neuvažujeme, neboť při jejím měření pravděpodobně nastala chyba.

$Z_3 = (9,8 \pm 0,8)$ (chyba je stanovena jako maximální dle [2])

Vzdálenosti maxim (které předpokládáme, že jsou stejné jako vzdálenosti minim) v rovině P_2 jsou tedy:

$$x_1 = \frac{s_1}{Z_3} = (0,22 \pm 0,02) \text{ mm}$$

Dosažením do vztahu (11) vypočteme rozměr a čtverce. Chybu stanovíme metodou přenosu chyb dle [2].

$$a = (2500 \pm 300) \mu\text{m}$$

Skutečnou velikost strany čtverce a_{skut} jsme měřili podobně jako skutečnou vzdálenost mezi proužky u soustavy proužků. Měření jsme však provedli vícekrát vzhledem k nepravidelnostem čtverce.

$$a_{skut} = (2300 \pm 200) \mu\text{m}$$

Pozorování vlastností Fourierovy transformace a používání filtrů

Z optického stolu jsme odstranili zrcátko Z_3 (viz *Obr. 1*) a porovnáváním obrazů předmětu (umístěného v rovině P_1) v rovinách P_2 a P_3 jsme ověřovali některé vlastnosti Fourierovy transformace:

Dvojitou Fourierovou transformací (viz vztah (7)) pomocí čoček \check{C} a \check{C}_3 jsme na stínítku F_3 pozorovali invertovaný obraz předmětu v rovině F_1 . Jako předmět jsme použili soustavu trojúhelníkového a kruhového otvoru. V rovině P_1 jsme měli trojúhelník „postavený“ na základně a kruh vpravo pod ním. V rovině P_3 „stál“ trojúhelník na špičce a kruh byl vlevo nad ním. To skutečně odpovídá vlastnosti, kterou popisuje vztah (7).

Dále jsme ověřovali transformaci konvoluce (viz vztah (8)). Napřed jsme zjistili, že Fourierovou transformací trojúhelníkového otvoru je hvězda a transformací mřížky soustava bodů uspořádaných do čtverce (pro použitou mřížku byl pozorován čtverec 3x3 bodů). Pakliže jsme do roviny P_1 umístili za sebe trojúhelníkový otvor a mřížku, pozorovali jsme v rovině P_2 součin obou transformací, tedy čtverec 3x3 hvězdiček. Dále jsme v rovině P_1 ponechali pouze trojúhelníkový otvor a mřížku umístili do roviny P_2 . Čočka \check{C}_3 tedy prováděla Fourierovu transformaci součinu mřížky a transformace trojúhelníku. Na stínítku P_3 se tedy dle vztahů (7) a (8) vytvořil obraz daný součinem invertovaného trojúhelníku a transformace mřížky. Pozorovali jsme čtverec 3x3 invertovaných trojúhelníků.

Na závěr jsme zkoumali vliv filtrů umístěvaných do roviny P_2 na obraz v rovině P_3 . Napřed jsme do roviny P_1 umístili trojúhelníkový otvor a v rovině P_2 odclonili kraje Fourierova spektra. Tím jsme odstínili vysoké frekvence (viz vztah (9)) a v rovině P_3 se zobrazil (invertovaný) trojúhelník bez ostrých krajů (rozmazaně). Když jsme v rovině P_2 naopak odclonili střed spektra, eliminovali jsme nízké frekvence a v rovině P_3 jsme pozorovali pouze obrys trojúhelníku. Na základě stejných principů jsme „pustili lva z klece“. V rovině P_1 jsme měli obrázek Českého lva v kleci. Jeho spektrem v rovině P_2 byla řada maxim. My jsme clonami nechali procházet pouze hlavní maximum (největší intenzita), čímž jsme potlačili ostré okraje a detaily a v rovině P_3 se klec nezobrazila a lev byl rozmazanější. Dále jsme pomocí filtrace ponecháním pouze maxim na jedné ose Fourierova spektra sítky v rovině P_2 získali v rovině P_3 proužky sítky jen jednoho směru (ponecháním *osy x* svislé).

Diskuse výsledků

Při určování zvětšení pomocí průměrů laserového svazku vznikala chyba díky obtížnosti stanovení okrajů laserového svazku na milimetrovém papíře. Zvětšení Z_1 teleskopu dobře odpovídá hodnotě dané výpočtem z ohniskových vzdáleností čoček. Zvětšení Z_3 obrazu Fourierova spektra v rovině P_4 jsme vypočetli také na základě porovnávání vzdáleností maxim Fourierových spekter v rovinách P_2 a P_4 . Tyto hodnoty jsou však zcela odlišné. Na základě toho, že jsme druhou metodu použili třikrát a pokaždé vycházel přibližně stejný výsledek pro zvětšení Z_3 , usuzujeme, že při měření první metodou nastala hrubá chyba. Tuto hodnotu proto považujeme za chybnou a dále počítáme pouze s hodnotou získanou druhým způsobem. Přesnost určování parametrů předmětů na základě Fourierova spektra závisela na odečítání poloh maxim spektra. Používali jsme sice mikrometrické šrouby, ale nemohli jsme plně využít jejich přesnosti, neboť nastavování středů maxim na rysku bylo třeba dělat ručně. Relativní chyba takto naměřených rozměrů předmětů dosahovala přibližně 10%. Naproti tomu určení těchto parametrů pomocí mikroskopu bylo daleko přesnější. Tam byla relativní chyba s výjimkou čtvercového otvoru do 1%. U čtvercového otvoru byla chyba větší kvůli jeho nepravidelnostem. Rozměry předmětů stanovené z naměřených údajů ze spekter se v rámci chyb dobře shodují s hodnotami naměřenými mikroskopem. Vybrané vlastnosti Fourierovy transformace (dvojitá Fourierova transformace a transformace konvoluce) byly dobře experimentálně pozorovatelné. Ověřili jsme tedy platnost těchto vlastností. Použitím filtrů jsme získali výsledný obraz odpovídající teorii.

Závěr

U sestaveného koherentního optického procesoru jsme ověřili, že čočky \check{C}_1 a \check{C}_2 zachovávají rovnoběžnost paprsků. Změřili jsme rozšíření paprsku teleskopem: $Z_1 = 7 \pm 2$
Toto zvětšení jsme také vypočetli ze známých ohniskových vzdáleností čoček: $Z_1 = 8$
Změřili jsme zvětšení obrazu předmětu v rovině P_3 : $Z_2 = 2,6 \pm 0,2$
Změřili jsme zvětšení obrazu Fourierova spektra v rovině P_4 : $Z_3 = (9,8 \pm 0,8)$
Pozorovali jsme Fourierovský obraz čtvercového otvoru, soustavy rovnoběžných pruhů a sítky. Z naměřených údajů ze spekter jsme vypočetli rozměry předmětů:
Velikost strany čtvercového otvoru: $a = (2500 \pm 300) \mu m$
Perioda soustavy rovnoběžných pruhů: $b = (91 \pm 6) \mu m$
Periody sítky: $a = (100 \pm 10) \mu m$, $b = (87 \pm 6) \mu m$
Tytéž parametry jsme změřili mikroskopem:
Velikost strany čtvercového otvoru: $a_{skut} = (2300 \pm 200) \mu m$
Perioda soustavy rovnoběžných pruhů: $b_{skut} = (95,9 \pm 0,3) \mu m$
Periody sítky: $a_{skut} = (95,9 \pm 0,7) \mu m$, $b_{skut} = (98,7 \pm 0,3) \mu m$
Kvalitativně jsme ověřili dvojitou Fourierovu transformaci a transformaci konvoluce. Do roviny P_1 jsme umísťovali vybrané předměty, do roviny P_2 vkládali různé filtry a zkoumali jejich vliv na geometrický obraz v rovině P_3 . Pozorované jevy jsou popsány a vysvětleny v odstavci *Pozorování vlastností Fourierovy transformace a používání filtrů*.

Seznam použité literatury

- [1] I. Pelant a kol.: Fyzikální praktikum III – Optika, MATFYZPRESS, Praha 2005
- [2] J. English: Základy zpracování fyzikálních měření, Praha 2006