

# 1 Pracovní úkoly

1. Seříd'te goniometr.
2. Změřte lámavý úhly skleněného hranolu a proměřte indexy lomu čar spektra rtuťové výbojky.
3. naměřené hodnoty zpracujte graficky do disperzní křivky. Graf vytvořte v praktiku, je povinnou součástí zápisu z měření.
4. Vypočtete střední disperzi, relativní disperzi Abbeovo číslo pro měřený materiál, proveďte srovnání s tabelovanými hodnotami optických skel.
5. Odvod'te výraz pro chybu nepřímého měření indexu lomu. Spočtete její velikost a diskutujte, kolik desetinných míst indexu lomu tato metoda zaručuje.

## 2 Teoretický úvod

### 2.1 Disperze

Při průchodu světla mezi prostředími s různými indexy lomu se zachovává jeho frekvence. Pokud vyjádříme frekvenci pomocí indexu lomu  $n$  látky, kterou světlo prochází a vlnové délky  $\lambda$  zkoumané části spektra světla, dostáváme, že index lomu je závislý na vlnové délce procházejícího světla  $n(\lambda)$ . Tento jev se nazývá *disperze* a typicky ho lze popsat pomocí aproximačního vzorce

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda_0 + \lambda}, \quad (1)$$

kde vystupuje index lomu  $n$  příslušný monochromatickému světlu o vlnové délce  $\lambda$  a tři konstanty  $a$ ,  $\lambda_0$  a  $n_0$ . [3, 1]

Pro charakterizaci vlastností zkoumaných prostředí se zavádí tři důležité veličiny - *střední disperze*, *relativní disperze* a *Abbeovo číslo*. Střední disperze  $\Delta$  je definována jako

$$\Delta = n_F - n_C. \quad (2)$$

Relativní disperze  $\delta$  se zavádí vztahem

$$\delta = \frac{\Delta}{n_D - 1} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (3)$$

a Abbeovo číslo, obvykle značené  $\gamma$ , jako

$$\gamma = \frac{1}{\delta} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}. \quad (4)$$

Ve všech třech vztazích (2), (3) a (4) vystupují hodnoty indexů lomu  $n_C, n_D$  a  $n_F$  které představují indexy lomu měřeného materiálu pro vlnové délky popořadě 656,3 nm, 589,3 nm a 486,1 nm. [1]

### 2.2 Fraunhoferova metoda měření indexu lomu

Fraunhoferova metoda je jedna z metod, které umožňují změření disperzní křivky (závislosti  $n$  na  $\lambda$ ) pro zkoumaný materiál. Metoda pracuje s lomem světla v hranolu, který je vyroben z měřeného materiálu (či v případě kapaliny je jí naplněn, přičemž samotný hranol musí být vyroben z vhodného materiálu). Chod paprsku takovýmto hranolem je znázorněn na schématu Fig 1. Aby bylo možné použít Fraunhoferovu metodu, je potřebné dosáhnout nejmenší možné deviace  $\delta_{min}$  (ve schématu úhel  $\delta$ ). Pokud jsou zdroj světelného paprsku a detektor vycházejícího paprsku umístěny právě tak, aby byla deviace nejmenší možná, platí pro index lomu materiálu  $n_i$  z něhož je hranol vyroben vztah

$$n_i = \frac{\sin [(\delta_{min} + \varphi) / 2]}{\sin (\varphi / 2)}, \quad (5)$$

kde kromě hodnoty deviačního úhlu  $\delta_{min}$  vystupuje už pouze *lámavý úhel*  $\varphi$ , ležící ve vrcholu hranolu - viz Fig 1. [1]

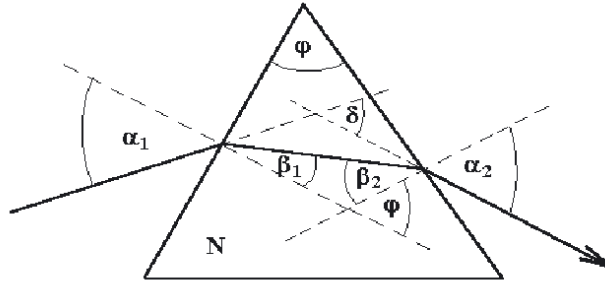


Figure 1: Schéma chodu paprsku optickým hranolem. Převzato z [1].

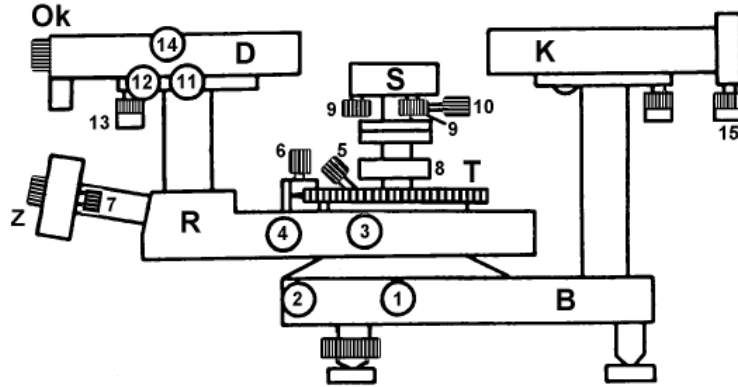


Figure 2: Schéma použitého gonimetru SGO 1.1. Převzato z [2].

## 2.3 Použitá aparatura a rozvržení experimentu

Experimentální měření byla prováděna na skleněném hranolu, přičemž jako lámavý úhel byl vybrán úhel označen číslem 2. Měření probíhala pomocí gonimetru SGO 1.1 (viz Fig 2), na jehož stolek  $S$  byl umístěn měřený hranol, na který dopadalo světlo ze rtuťové výbojky, jež procházelo přes kolimátor  $K$ , který zajišťoval rozšíření paprsku do rovinné vlny. Použitý goniometr umožňoval nezávislý otočný pohyb stolku  $S$  a ramena  $R$ . Okulárem  $Ok$  byly pozorovány a zaměřovány spektrální čáry a úhel natočení ramena  $R$  vůči ose zdroje, respektive kolimátoru  $K$ , byl odečítán na stupnici  $Z$  s přesností  $\pm 2''$ , tedy dvě úhlové vteřiny.

## 3 Výsledky měření

### 3.1 Lámavý úhel a minimální deviace

Na počátku experimentu byl goniometr seřízen. Nejprve byla seřízena poloha dalekohledu  $D$  vůči kolmé rovině stolku  $S$ , následně byl na stolek umístěn měřený hranol a proběhlo seřízení stolku s hranolem (bližší popis postupu viz [2]).

Po seřízení bylo přikročeno k měření lámavého úhlu. Dalekohled byl nastaven tak, aby jeho osa byla kolmá na jednu ze stěn, které svírají lámavý úhel, a následně byl odečten úhel  $\xi_1$ , tedy úhel, jež svíralo rameno  $R$  a osa kolimátoru. Poté byl stejný postup aplikován na druhou stěnu a změřen úhel  $\xi_2$ . Následně byl lámavý úhel  $\varphi$  spočten jako

$$\varphi = |180^\circ - |\xi_1 - \xi_2||. \quad (6)$$

Chyba jeho určení  $\delta\varphi$  jako

$$\delta\varphi = \sqrt{2}\delta\xi, \quad (7)$$

Úhel	Hodnota
$\xi_1$	$(106,7539 \pm 0,0017)^\circ$
$\xi_2$	$(226,7622 \pm 0,0017)^\circ$
$\varphi$	$(59,9917 \pm 0,0024)^\circ$

Tabulka 1: Hodnoty získané při měření lámavého úhlu a výsledná velikost lámavého úhlu  $\varphi$  získaná dle vztahu (6).

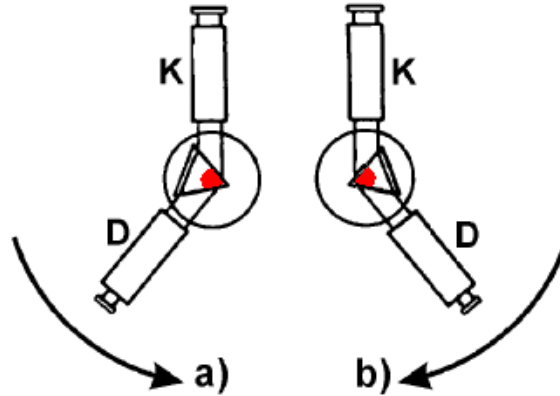


Figure 3: Dvě polohy nastavení hranolu vůči dalekohledu a kolimátoru pro měření spektrálních čar rtuťové výbojky. Lámavý úhle je vyznačen červeně. Převzato z [2] a upraveno.

s přihlédnutím k tomu, že chyba odečtu obou úhlů  $\delta\varphi$  byla shodná, protože byla dána pouze možnostmi odečtu ze stupnice, které byly pochopitelně pro libovolný úhel shodné.

Získané hodnoty úhlů a vypočtený lámavý úhel jsou zaneseny v tabulce č.1. Při měření bylo zjištěno, že odchylka měření  $\pm 2''$  daná konstrukcí přístroje není dosažitelná. Po několikanásobném přeměření stejné pozice hranolu byla reálná chyba odečtu úhlu  $\delta\xi$  (ale i ostatních dále měřených), zahrnující chybovost pozorovatele, stanovena na  $6''$ , čili šest úhlových vteřin.

### 3.2 Měření spektra rtuťové výbojky

Měření spektra rtuťové výbojky probíhalo ve dvou nastaveních aparatury, označených *a)* a *b)*, znázorněných na schématu Fig 3, v němž je červenou barvou vyznačen lámavý úhel hranolu. Po umístění hranolu na stůl dle schématu byla otáčením stolku nalezena poloha s nejmenší deviací - opět byl sledován pohyb spektrálních čar směrem k ose kolimátoru, kdy minimální deviaci vykazuje poloha, ve které se pohyb čar zastaví.

Po nastavení minimální deviace byly proměřeny všechny viditelné spektrální čáry rtuti patřící do prvního maxima. Následně bylo uspořádání experimentu změněno z konformace *a)* na *b)* a následně byl celý postup nastavení minimální deviace a proměrování spektrálních čar opakován. Z naměřených hodnot úhlů  $\alpha_a$  a  $\alpha_b$  pro jednotlivé spektrální čáry byla vypočtena hodnota minimální deviace  $\delta_{min}$  příslušející dané spektrální čáře vztahem

$$\delta_{min} = \frac{\alpha_a - \alpha_b}{2}. \quad (8)$$

Chyba určení minimální deviace  $\delta\delta_{min}$  byla stanovena dle Gaussova zákona o hromadění chyb, zde jako

$$\delta\delta_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta\alpha, \quad (9)$$

opět s přihlédnutím k faktu, že chyba odečtu úhlu  $\delta\alpha$  je pro obě možné nastavení aparatury *a)* i *b)* stejná. Ze získané hodnoty  $\delta_{min}$  a dříve zjištěné velikosti lámavého úhlu  $\varphi$  byl pro každou spektrální

čáru vypočten index lomu dle (5) a chyba jeho určení  $\delta n$  jako

$$\delta n = \sqrt{\left(\frac{\cos[(\delta_{min} + \varphi)/2]}{2 \sin(\varphi/2)}\right)^2 (\delta\delta_{min})^2 + \left(\frac{\sin(\delta_{min}/2)}{2 \sin^2(\varphi/2)}\right)^2 (\delta\varphi)^2}, \quad (10)$$

kde vystupuje chyba určení minimální deviace  $\delta\delta_{min}$  a chyby zjištění lámavého úhlu  $\delta\varphi$ . Změřené hodnoty úhlů odklonu a vypočtené hodnoty minimální deviace i indexu lomu  $n$ , včetně chyb, byly zaneseny do tabulky č.2. V pravém sloupci tabulky jsou pak zaneseny tabelované hodnoty vlnových délek. [2]

Barva	$\alpha_a$ [°]	$\alpha_a$ [°]	$\delta_{min}$ [10 <sup>-5</sup> rad]	$\delta\delta_{min}$ [10 <sup>-5</sup> rad]	$n$ [10 <sup>-5</sup> ]	$\delta n$ [10 <sup>-5</sup> ]	$\lambda$ [nm]
fialová 1	205,9383	126,0728	69695,8	2,1	153143,4	1,2	404,7
fialová 2	205,8972	126,1017	69634,8	2,1	153104,1	1,2	407,8
modrá 1	205,6383	126,3717	69173,2	2,1	152806,6	1,2	433,9
modrá 2	205,6233	126,3894	69144,6	2,1	152788,2	1,2	434,8
modrá 3	205,6189	126,3906	69139,8	2,1	152785,0	1,2	435,8
tyrkysová	205,2028	126,8061	68414,0	2,1	152315,5	1,2	491,6
zelená	204,9150	127,1011	67905,4	2,1	151985,4	1,2	546,1
žlutá 1	204,7861	127,2261	67683,9	2,1	151841,2	1,2	577
žlutá 2	204,7761	127,2344	67667,9	2,1	151830,8	1,2	579,1
červená 1	204,6356	127,5194	67296,5	2,1	151588,7	1,2	607,3
červená 2	204,6189	127,5406	67263,5	2,1	151567,2	1,2	612,3
červená 3	204,5678	127,5372	67221,8	2,1	151540,0	1,2	623,4
červená 4	204,4317	127,5444	67096,8	2,1	151458,3	1,2	671,6
červená 5	204,4383	127,5828	67069,1	2,1	151440,3	1,2	690,7

Tabulka 2: V prvních třech sloupcích jsou změřené hodnoty úhlů  $\alpha$ , pod kterými byly vidět jednotlivé spektrální čáry a jejich zaznamenaná barva. V dalších čtyřech sloupcích jsou zaneseny vypočtené hodnoty minimální deviace  $\delta_{min}$ , indexu lomu  $n$  a jejich chyby. V posledním, odděleném sloupci, jsou tabelované vlnové délky pro jednotlivé spektrální čáry. [2]

Ze zjištěných hodnot zanesených v tabulce č.2 byl sestaven graf závislost indexu lomu  $n$  na vlnové délce  $\lambda$  zkoumaného světla, neboli disperzní křivka - viz Fig 4. Data v grafu byla nafitována závislostí (1) a zjištěné koeficienty fitu, společně s chybami fitu, byly zaneseny do tabulky č.3.

Konstanta	Hodnota	Jednotky
$n_0$	$1,4881 \pm 0,0068$	—
$\lambda_0$	$0,0000004 \pm 102,4$	nm
$a$	$17,4 \pm 7,0$	nm

Tabulka 3: Hodnoty konstant ze vztahu, získané fitováním změřených dat z tabulky č.2 vztahem (1).

### 3.3 Střední disperze, relativní disperze a Abbeovo číslo

Dosazením konstanta získaných fitem disperzní křivky do vztahu (1) byla získána formule pro výpočet indexu lomu pro libovolnou vlnovou délku. Touto formulí byly vypočteny významné indexy lomu  $n_D$ ,  $n_D$  a  $n_F$ , kdy za vlnové délky byly dosazeny hodnoty zmíněné na konci kapitoly 2.1 Disperze. Chyby výpočtu jednotlivých indexů lomu  $\delta n_i$  byly spočteny dle vztahu

$$\delta n_i = \sqrt{(\delta n_0)^2 + \left(\frac{a}{(\lambda_i + \lambda_0)^2} \delta \lambda_0\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_0} \delta a\right)^2}, \quad (11)$$

kde vystupuje příslušná vlnová délka  $\lambda_i$ , a chyby určení parametrů získaných fitem (viz tabulka č.3).

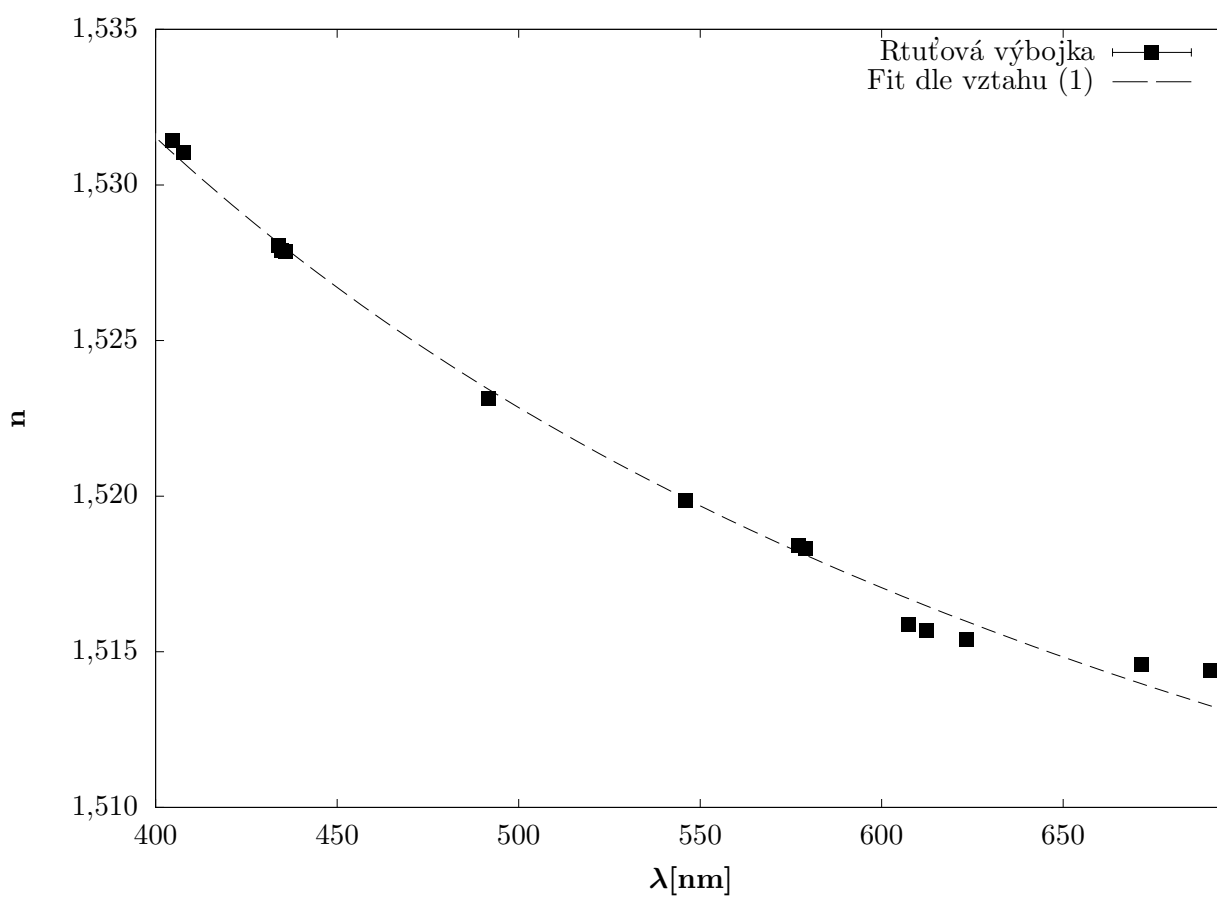


Figure 4: Disperzní křivka, tedy závislost indexu lomu  $n$  na vlnové délce  $\lambda$  světla. Na grafu jsou znázorněna změřená data (viz tabulka č.2), která jsou proložena fitem teoretické závislosti (1). Získané koeficienty fitu jsou zaneseny v tabulce č.3.

Veličina	Značka	Hodnota
střední disperze	$\Delta$	$0,009 \pm 0,022$
relativní disperze	$\delta$	$0,018 \pm 0,043$
Abbeovo číslo	$\gamma$	$55,8 \pm 132,7$

Tabulka 4: Zjištěné hodnoty střední disperze, relativní disperze a Abbeova čísla měřeného hranolu.

S využitím získaných význačných indexů lomu bylo poté možné vypočítat střední disperzi, relativní disperzi a Abbeovo číslo dle (2), (3) a (4). Všechny chyby byly určeny použitím Gaussova zákona o hromadění chyb, jež pro chybu střední disperze  $\delta\Delta$  dal vztah

$$\delta\Delta = \sqrt{(\delta n_F)^2 + (\delta n_C)^2}, \quad (12)$$

pro chybu relativní disperze  $\delta\delta$  (zde je nutné důsledně rozlišovat  $\delta$  stojící na počátku výrazu a značící chybu a  $\delta$  jakožto značení relativní disperze)

$$\delta\delta = \sqrt{\left(\frac{1}{n_D - 1}\delta\Delta\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{(n_D - 1)^2}\delta n_D\right)^2} \quad (13)$$

a pro chybu Abbeova čísla  $\delta\gamma$  vztah

$$\delta\gamma = \frac{\delta\delta}{\delta^2}, \quad (14)$$

kde v čitateli vystupuje chyba relativní disperze a ve jmenovateli její hodnota. Vypočtené hodnoty disperzí a Abbeova čísla, včetně chyb, jsou uvedeny v tabulce č.4.

## 4 Diskuze

Při měření lámavého úhlu bylo zjištěno, že přesto, že chyba odečtu ze stupnice činí pouze  $\pm 2''$ , tak reálná dosažitelná přesnost je zhruba  $\pm 6''$ . Tato hodnota byla odhadnuta pomocí opakovaného měření jedné spektrální čáry, při kterém se ukázalo, že nastavení dalekohledu na spektrální čáru závisí i na drobných výchylkách v poloze oka pozorovatel na dalekohledu a je velice obtížné naměřit vícekrát pro jednu spektrální čáru úhel přesněji, než na  $6''$ . Samotné měření lámavého úhlu tedy vykazuje pouze chybu danou touto nepřesností odečtu u obou úhlů potřebných pro výpočet, která je spojena dle vztahu (7).

Výpočet indexu lomu ze změřených dat trpěl pouze malou chybou (vztah pro výpočet chyby (10)) a sice v řádu  $10^{-5}$ , což je velmi dobrá přesnost. Je tedy možné brát ohled na 4 desetinná místa v hodnotě indexu lomu a až na pátém místě se objevuje chyba.

Při fitování získané disperzní křivky bylo zjištěno, že koeficient  $a$  vykazuje relativní chybu 40,0% a koeficient  $\lambda_0$  relativní chybu v řádu  $10^{11}$  %, tedy enormně vysokou. Poslední koeficient -  $n_0$  vykazoval relativní chybu pouze 0,46 %, což je velmi dobrá hodnota. Důvodem vysoké chybovosti fitu jsou pravděpodobně hodnoty změřené pro spektrální čáry v tabulce č.2 označené jako *červená 1*, *červená 2* a *červená 3*. U těchto tří hodnot je při pohledu na graf disperzní křivky (viz Fig 4) patrné, že jejich poloha je oproti všem ostatním změřeným bodům značně odchylena od fitované závislosti. Důvodem špatného změření těchto tří spektrálních čar byla pravděpodobně chyba při odčítání úhlů ze stupnice, nebo chybné nastavení polohy dalekohledu, ve smyslu zaměření každé ze tří čar.

Protože dva ze tří koeficientů, získaných fitem disperzní křivky, vykazují obrovskou chybu, tak výpočet hodnot střední disperze, relativní disperze a Abbeova čísla byl zatížen extrémní relativní chybou přesahující 200%. Pokud odhlédneme od chyby určení Abbeova čísla, tak by dle [4] spadal měřený vzorek mezi skla EK-110 a EK210 nebo KF6 a K3. Bohužel zjištěná chyba je obrovská a tak se jedná vlastně jen o odhad zařazení, nikoliv určení.

## 5 Závěr

V první části experimentu byl seřízen goniometr, na který byl následně umístěn zkoumaný optický hranol a proběhlo i seřízení jeho polohy. Následovalo měření lámavého úhlu  $\varphi$  zkoumaného hranolu - viz tabulka č.1.

V druhé části experimentu byly proměřeny úhly, pod kterými byly vidět jednotlivé spektrální čáry. Ze získaných dat byla vypočtena minimální deviace  $\delta_{min}$  pro jednotlivé spektrální čáry a také index lomu  $n$  příslušející dané čáře dle (5). Změřená a vypočtená data byla zapsána do tabulky č.2 a použity k sestrojení disperzní křivky - viz Fig 4. Disperzní křivka byla proložena fitem dle (1). Díky fitu byly získány koeficienty této rovnice a ta byla následně využita k výpočtu střední disperze  $\Delta$ , relativní disperze  $\delta$  a Abbeova čísla  $\gamma$ . Koeficienty zjištěné fitem ovšem trpěli velmi vysokými chybami a proto i vypočtené hodnoty disperzí a Abbeova čísla trpěly relativními chybami přesahujícími 200%. Měření tedy nebylo provedeno správně a výsledky nelze dále použít.

## 6 Literatura

1. Studijní text k úloze č.16 *Měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou*:  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_316.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_316.pdf) (24.3.2018)
2. Pokyny k měření k úloze č.16 *Měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou*:  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/pokyny/mereni\\_316.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/pokyny/mereni_316.pdf) (24.3.2018)
3. Petr Malý; Optika; Karolinum; Praha 2008
4. J. Brož, V. Roskovec a M. Valouch; Fyzikální a matematické tabulky; SNTL; Praha 1980