

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM III.

úloha č. 16.....

Název: Měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou.....

Pracoval: Jakub Michálek..... stud. skup. 12..... dne: 16. března 2010.....

Odevzdal dne: 31. března 2010.....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
	max. 20	

Posuzoval:..... dne.....

Pracovní úkol

1. Seřídte goniometr.
2. Změřte lámavý úhel skleněného hranolu a proměřte indexy lomu čar spektra rtuťové výbojky.
3. Změřte lámavý úhel kyvety a proměřte pro přiloženou kapalinu indexy lomu čar spektra rtuťové výbojky.
4. Naměřené hodnoty zpracujte graficky do disperzních křivek. Vypočtete střední disperzi, relativní disperzi a Abbeovo číslo pro změřené materiály.
5. Odvoďte výraz pro chybu nepřímého měření indexu lomu. Spočtete její velikost a diskutujte, kolik desetinných míst indexu lomu tato metoda zaručuje.

1 Teorie

K měření indexu lomu Franhoferovou metodou se používá trojboký hranol. Vycházíme z toho, že index lomu obecně závisí na frekvenci, a proto se každá barva láme pod různým úhlem. V této úloze se za zdroj světla používá rtuťová výbojka, která má ve spektru několik výrazných barevných čar, jejichž frekvenci známe a uvádí ji texty [1, 2].

Nejprve určíme lámavý úhel hranolu podle [1]

$$\varphi = |180^\circ - |\alpha_2 - \alpha_1||, \quad (1)$$

kde α_1 a α_2 jsou různé úhly naměřené na goniometru při kolmém odrazu paprsku. V případě hranolu s rovnostrannou podstavou bychom měli mít $\varphi = 60^\circ$.

U světla, které projde hranolem, změříme úhel δ_{\min} , což je nejmenší úhel odklonu světla, který dostaneme během natáčení hranolu. Podle [1] ho získáme

$$\delta_{\min} = \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{2}, \quad (2)$$

kde β_1 značí úhel naměřený goniometrem pro nejmenší odchylku a β_2 úhel při symetrické situaci.

Pro index lomu potom [2] odvozuje vztah

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (3)$$

Naměřené hodnoty indexu lomu pak závisejí na vlnové délce závislostí, kterou lze přibližně vystihnout rozvojem do Laurentovy řady prvního řádu

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda + \lambda_0}, \quad (4)$$

ve které N_0 , a a λ_0 označují konstanty, u nichž určíme chybu. Pak pro přesně zadanou vlnovou délku λ chybu indexu lomu určíme podle vztahu

$$\Delta n = \sqrt{\Delta^2 n_0 + \left(\frac{\Delta a}{\lambda + \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{a \Delta \lambda_0}{(\lambda + \lambda_0)^2}\right)^2} \quad (5)$$

Nechť dolní indexy u indexu lomu označují veličiny příslušné vlnové délce podle [2]

$$\begin{aligned} \lambda_C &= 656,3 \text{ nm} \\ \lambda_D &= 589,3 \text{ nm} \\ \lambda_F &= 486,1 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Pak zavedeme¹ střední disperzi $D = n_F - n_C$, relativní disperzi $d = \frac{D}{n_D - 1}$ a Abbeovo číslo $\gamma = \frac{1}{d}$.

Nakonec zbývá odvodit vztah pro chybu (3). Vyjdeme z toho, že jsme změřili veličiny s absolutními chybami, které označuji písmenem Δ , a relativními chybami, které označuji písmenem δ . Dosazením do Gaussova přenosu chyb, který platí pro nekorelované veličiny,

$$\Delta f(x_i) = \sqrt{\sum_i \left(\Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} \quad (6)$$

dostanu

$$\Delta n = \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\left(\Delta \varphi \frac{\sin \frac{\delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2 + \left(\Delta \delta_{\min} \cos \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}\right)^2} \quad (7)$$

k čemuž poznamenávám, že musíme dosazovat úhly v radiánech a chyby $\Delta \varphi$ a $\Delta \delta_{\min}$ vypočteme např.

$$\Delta \varphi = \sqrt{\Delta^2 \alpha_1 + \Delta^2 \alpha_2}. \quad (8)$$

¹Abych mohl použít výhodnou notaci pro výpočet chyb, odchyluji se zde od značení v textu [2].

Analogicky dostáváme pro střední disperzi chybu

$$\Delta D = \sqrt{\Delta^2 n_F + \Delta^2 n_C},$$

pro relativní disperzi

$$\delta d = \sqrt{\delta^2 D + \left(\frac{\Delta n_D}{n_D - 1}\right)^2}$$

a pro Abbeovo číslo $\delta\gamma = \delta d$.

2 Výsledky měření

Nejprve jsem podle vztahů (1) a (8) spočítal lámavý úhel. Z naměřených úhlů jsem pro různé barvy spočítal podle vztahu (2) a (8) úhel nejmenšího odklonu. Nakonec jsem takto vypočítané hodnoty dosadil do (3) a (7), abych získal index lomu pro danou barvu. Z těchto indexů již odvodíme všechny parametry disperzní relace (viz teorie).

Dále budu uvádět všechny úhly ve stupních (dosazoval jsem do vztahů v radiánech). Hodnoty v tabulkách jsou sdružené podle barev: červená, žlutá, zelená, modrá a fialová.

2.1 Skleněný hranol

Měřil jsem skleněný hranol u úlohy (byl tam pouze jeden). U skla uvažuji systematickou chybu měření úhlů 20". Pro lámavý úhel vychází

$$\varphi_{\text{hr}} = (60,018 \pm 0,004)^\circ.$$

Výsledky měření úhlů shrnuje tab. 1; neviděl jsem pouze jednu spektrální (červenou) čáru, kterou jsem měl najít. Naměřená data jsem proložil fitem (obr. 1) podle programu gnuplot, z něhož jsem získal hodnoty:

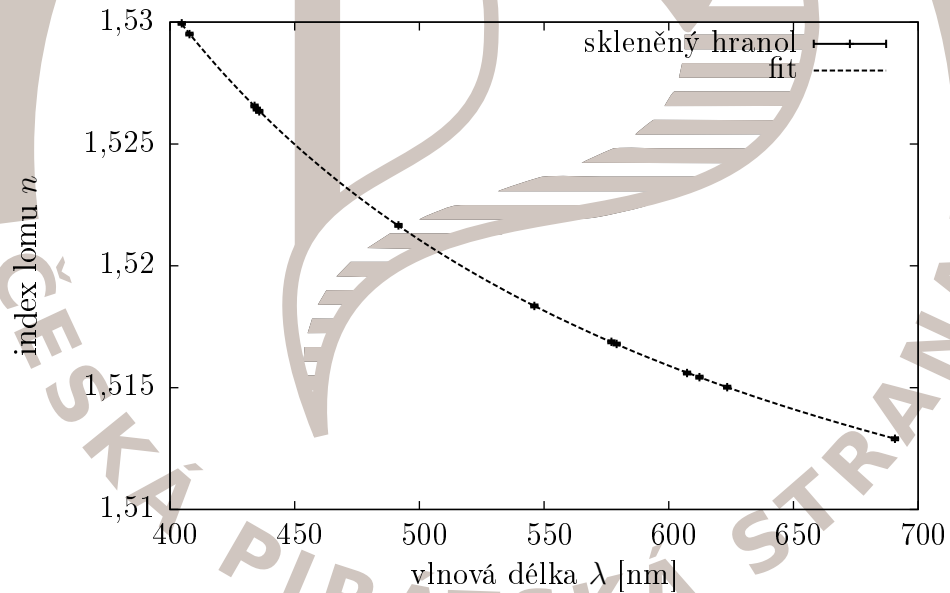
$$\begin{aligned} a &= (7,70 \pm 0,08) \text{ nm} \\ l_0 &= (-161 \pm 2) \text{ nm} \\ n_0 &= (1,4983 \pm 0,0001). \end{aligned}$$

Tyto hodnoty jsem využil k určení indexu lomu při určitých významných hodnotách

$$\begin{aligned} n_C &= 1,5138 \pm 0,0002 \\ n_D &= 1,5163 \pm 0,0002 \\ n_F &= 1,5220 \pm 0,0003, \end{aligned} \tag{9}$$

λ [nm]	β_1 [°]	β_2 [°]	δ_{\min} [°]	n
690,7	201,814	125,169	38,323	1,51290
623,4	201,999	124,982	38,509	1,51502
612,3	202,036	124,946	38,545	1,51543
607,3	202,053	124,933	38,560	1,51560
579,1	202,158	124,830	38,664	1,51679
577,0	202,165	124,820	38,672	1,51688
546,1	202,295	124,692	38,802	1,51835
491,6	202,586	124,399	39,093	1,52166
435,8	203,001	123,985	39,508	1,52634
434,8	203,007	123,976	39,516	1,52643
433,9	203,022	123,967	39,527	1,52656
407,8	203,285	123,706	39,790	1,52951
404,7	203,323	123,667	39,828	1,52995

Tabulka 1: Naměřené úhly pro vlnové délky a příslušné indexy lomu u skleněného hranolu. U všech měření shodně $\Delta\delta_{\min} = 0,004^\circ$ a $\Delta n = 6 \cdot 10^{-5}$.



Obrázek 1: Graf závislosti indexu lomu na vlnové délce u skleněného hranolu proložený fitem závislosti (4).

λ [nm]	β_1 [°]	β_2 [°]	δ_{\min} [°]	n
579,1	186,955	139,512	23,722	1,3363
546,1	187,032	139,558	23,737	1,3365
491,6	187,219	139,367	23,926	1,3390
435,8	187,470	139,089	24,190	1,3425
404,7	187,667	138,887	24,390	1,3451

Tabulka 2: Naměřené úhly pro vlnové délky a příslušné indexy lomu u kyvety naplněné kapalinou. U všech měření shodně $\Delta\delta_{\min} = 0,008^\circ$ a $\Delta n = 1 \cdot 10^{-4}$.

ze kterých jsem konečně určil disperzní parametry

$$\begin{aligned}
 D_{\text{hr}} &= (8,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} & (10) \\
 d_{\text{hr}} &= 0,016 \pm 0,001 \\
 \gamma_{\text{hr}} &= 63 \pm 3.
 \end{aligned}$$

2.2 Voda

Měřil jsem kyvetu s kapalinou č. 4. U kyvety uvažuji systematickou chybu měření úhlů $40''$. Pro lámavý úhel vychází

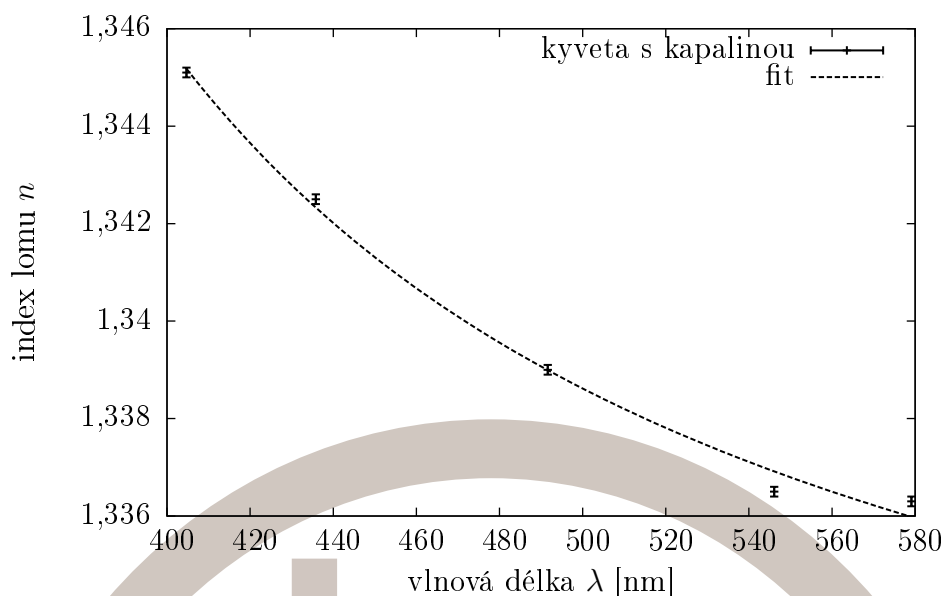
$$\varphi_{\text{kv}} = (59,763 \pm 0,008)^\circ.$$

Výsledky měření úhlů shrnuje tab. 2. Jak vyplývá z tabulky, měřil jsem pouze několik spektrálních čar. Pokud bylo totiž více čar stejné barvy blízko sebe, nepodařilo se mi je rozeznat. Červené spektrální čáry jsem dokonce vůbec neviděl. Naměřená data jsem proložil fitem (obr. 2) podle programu gnuplot, z něhož jsem získal hodnoty:

$$\begin{aligned}
 a &= (3 \pm 2) \text{ nm} & (11) \\
 l_0 &= (-241 \pm 61) \text{ nm} \\
 n_0 &= (1,327 \pm 0,003).
 \end{aligned}$$

Tyto hodnoty jsem využil k určení indexu lomu při určitých významných hodnotách

$$\begin{aligned}
 n_{\text{C}} &= 1,334 \pm 0,006 & (12) \\
 n_{\text{D}} &= 1,336 \pm 0,007 \\
 n_{\text{F}} &= 1,339 \pm 0,009,
 \end{aligned}$$



Obrázek 2: Graf závislosti indexu lomu na vlnové délce u kyvety naplněné kapalinou proložený fitem závislosti (4).

ze kterých jsem konečně určil disperzní parametry

$$\begin{aligned}
 D_{kv} &= (5 \pm 9) \cdot 10^{-3} \\
 d_{kv} &= 0,014 \pm 0,028 \\
 \gamma_{kv} &= 70 \pm 130.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

3 Diskuse

3.1 Systematická chyba goniometru

Chybu jsem stanovil s ohledem na postup, kterým se na goniometru odečítá úhel; vzhledem k tomu, že čára má nějakou tloušťku, vzniká chyba odečítáním úhlu, ačkoliv tuto chybu zmenšuje střelka, která se musí vycentrovat.

U vody jsem nepozoroval obrazovou rovinu v pravém smyslu, protože vznikalo víc obrazů. Ten správný obraz jsem stanovil podle toho, že byl nejjasnější a při zakrývání ze stran byl uprostřed. Spektrální čáry byly po průchodu vodou rozmazané, a proto jsem stanovil chybu měření úhlu dvakrát vyšší než u vody. Jak je patrné z fitu na obr. 2, stanovená chyba byla ještě podhodnocena, protože křivka neprochází chybovými úsečkami.

Největší chybu určení relativní disperze a Abbeova čísla způsobuje rozdíl

dvou blízkých veličin (indexů lomu), jejichž chyby se ovšem sčítají.

3.2 Rozmazané čáry u kyvety

Přenesené chyby jsem počítal podle vzorce (6). Největší problém představoval malý počet měření u kyvety, kde jsem některé spektrální čáry vůbec neviděl (pouze rozmazané červené světlo). Z pěti měření jsem tedy určoval 3 parametry, a proto mají hodnoty (11) tak vysokou chybu, která se přenesla i do střední disperze a dalších veličin.

Při odečítání ostatních barev jsem vycházel z tabulky v [1], která uvádí relativní intenzitu; pro měřenou vlnovou délku blízkých čar, které jsem nerozeznal, jsem vždy uvažoval tu s větší relativní intenzitou. Problém rozmazaných čar se projevuje jednak kvůli tomu, že kyveta má stěny, které jsem nezapočítal, a jednak kapalina neumožňuje tak přesné měření jako průhledná pevná látka.

3.3 Porovnání s tabulkami

Porovnáním výsledků (10) s diagramem v [3, s. 243] jsem podle Abbeova čísla a indexu lomu zjistil, že hranol je vyrobený ze skla značky BK7, což borokřemičité korunové sklo.² Porovnáním s [3, s. 242] jsem zjistil podle indexu lomu, že se jedná o vodu. Podle hodnot vychází teplota mezi 0 °C a 20 °C, což odpovídá očekávání. [4] uvádí pro Abbeovo číslo vody při pokojové teplotě $\gamma \sim 55$; v našem případě ovšem díky vysoké chybě nemůžeme hodnoty porovnat (v rámci vysoké chyby se shodují). Kapalina nevykazovala zvláštní zápach, i proto si myslím, že šlo o vodu.

4 Závěr

Naměřil jsem index lomu a relativní disperzi u skla typu BK7 a vody v kyvetě. Měření indexu lomu u obou, tj. (9) a (12), a disperze u skla (10) vychází poměrně přesně. U vody se mi nepodařilo naměřit přesnou hodnotu disperze (chyba (13) je větší než hodnota). Disperzní křivky jsem vynesl na obr. 1 a 2. Fraunhoferova metoda měření indexu lomu zaručuje tři desetinná místa; vztah pro chybu indexu lomu jsem odvodil (5).

²Podrobnější údaje jsou k dispozici na [4].

Reference

- [1] Pokyny k měření: *1.3 Měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou*. http://physics.mff.cuni.cz/to/vyuka/zfp/mereni_316.pdf (Přístup 30. března 2010)
- [2] Studijní text: *Refraktometry založené na odchylce paprsku při průchodu hranolem (vychylovací metody)*. http://physics.mff.cuni.cz/to/vyuka/zfp/txt_316.pdf (Přístup 30. března 2010)
- [3] Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy. Prometheus: Praha, 2003.
- [4] RefractiveIndex.INFO. *Refractive index database*. <http://refractiveindex.info/> (Přístup 30. března 2010)

