Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM III – Optika

Úloha č. XVI.

Název: Měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou

Pracoval: Radim Pechal stud. skup. F–11 dne 27. února 2009

Odevzdal dne: ....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

Pracovní úkol

1. Seřiďte goniometr.
2. Změřte lámavý úhel skleněného hranolu a proměřte indexy lomu čar spektra rtuťové výbojky.
3. Změřte lámavý úhel kyvety a proměřte pro přiloženou kapalinu indexy lomu čar spektra rtuťové výbojky.
4. Naměřené hodnoty zpracujte graficky do disperzních křivek. Vypočtěte střední disperzi, relativní disperzi a Abbeovo číslo pro změřené materiály.
5. Odvoďte výraz pro chybu nepřímého měření indexu lomu. Spočtěte její velikost a diskutujte, kolik desetinných míst indexu lomu tato metoda zaručuje.

Teoretický úvod

Pro měření indexu lomu Fraunhoferovou metodou se používá trojboký hranol z měřeného materiálu. Skrz tento hranol necháme procházet světlo z např. rtuťové výbojky. Najdeme nejmenší odchylku vstupního a výstupního paprsku δ_{min}. Index lomu materiálu N pro danou vlnovou délku λ je dle [1] dán vztahem

$$N = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,, \tag{1}$$

kde φ je lámavý úhel používaného hranolu.

Lámavý úhel φ se určí ze dvou měření úhlů α_1, α_2 při kolmém nastavení dalekohledu k lámavým stěnám hranolu pomocí vztahu

$$\varphi = \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2}\,. \tag{2}$$

Deviační úhel δ_{min} se určí obdobně jako lámavý úhel. Provedou se dvě měření úhlů β_1, β_2 v dvou polohách, kdy při otáčení hranolem dojde k extrému při pohybu paprsku. Deviační úhel je pak dán vztahem

$$\delta_{min} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{2}\,. \tag{3}$$

Disperze popisuje jak závisí index lomu N na vlnové délce λ. Obvykle se používá přibližný vztah

$$N = N_0 + \frac{a}{\lambda + \lambda_0}\,, \tag{4}$$

kde N_0, a, λ_0 jsou konstanty, které popisují danou závislost. Pro určení se využívá index lomu pro tři dané vlnové délky. Určují se indexy lomu N_C, N_D a N_F pro $\lambda_C = 656,3\,\mathrm{nm}$, $\lambda_D = 589,3\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_F = 486,1\,\mathrm{nm}$. Určuje se pak střední disperse Δ vztahem

$$\Delta = N_F - N_C\,, \tag{5}$$

relativní disperse δ

$$\delta = \frac{\Delta}{N_D - 1}\,, \tag{6}$$

a Abbeovo číslo γ

$$\gamma = \frac{1}{\delta}\,. \tag{7}$$

K určovaní chyby nepřímých měření se používá dle [2] kvadratický zákon přenosu chyb. Ten je dán vztahem

$$\sigma y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right)^2 \sigma x_i^2}\,. \tag{8}$$

y je hledaná veličina, která je dána vztahem $y = f(\vec{x})$, kde $\vec{x}$ charakterizuje jednotlivé veličiny na kterých závisí výsledná veličina. σx_i je chyba měření příslušné veličiny. Pokud tento vzorec aplikuji na vztah (1), tak po použití vztahu $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$ dostanu vzorec

$$\sigma N = \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)}{4\cdot\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot(\sigma\delta_{min})^2 + \frac{\sin^2\left(\frac{\delta_{min}}{2}\right)}{4\cdot\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot(\sigma\varphi)^2}\,, \tag{9}$$

kde $\sigma\varphi$ je chyba měření lámavého úhlu a $\sigma\delta_{min}$ je chyba měření deviačního úhlu.

Obdobně mohu pomocí vztahu (8) určit chybu měření $\sigma\Delta$ střední disperse Δ

$$\sigma\Delta = \sqrt{(\sigma N_F)^2 + (\sigma N_C)^2}\,, \tag{10}$$

chybu $\sigma\delta$ relativní disperse δ

$$\sigma\delta = \delta\sqrt{\left(\frac{\sigma\Delta}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma N_D}{N_D - 1}\right)^2}\,, \tag{11}$$

a chybu $\sigma\gamma$ Abbeova číslo γ

$$\sigma\gamma = \frac{\sigma\delta}{\delta^2}\,. \tag{12}$$

Výsledky měření

Měření jsem prováděl pro hranol č. 3 a kapalinu č. 4.

Před samotným měřením bylo nutné seřídit goniometr. Bylo třeba nastavit sklon dalekohledu a vyrovnat stoleček, na kterém byl umístěn měřený objekt. Následně jsem nastavil šířku štěrbiny a začal měřit.

Nejdříve jsem provedl měření pro hranol. $\alpha_{1H} = 103°30'40'' \pm 2''$, $\alpha_{2H} = 223°30'29'' \pm 2''$. Pomocí vztahu (2) jsem určil lámavý úhel

$$\varphi_H = 59°59'55'' \pm 2''\,.$$

Deviační úhel $\delta_{min\,H}$ jsem určil z měření úhlů β_{1H} a β_{2H} pomocí vztahu (3). Pomocí vztahu (1) jsem určil index lomu N pro danou vlnovou délku a pomocí vztahu (9) jsem určil příslušnou chybu.

λ [nm]	β_{1H}	β_{2H}	δ_{min} [°]	N
	$\pm 2''$	$\pm 2''$	$\pm 2''$	
$404,7$	$123°40'2''$	$203°18'24''$	$39,8197$	$1,5301 \pm 0,0005$
$407,8$	$123°42'18''$	$203°15'12''$	$39,7742$	$1,5296 \pm 0,0005$
$435,8$	$123°59'46''$	$202°58'46''$	$39,4917$	$1,5264 \pm 0,0005$
$491,6$	$124°24'50''$	$202°33'30''$	$39,0722$	$1,5216 \pm 0,0005$
$546,1$	$124°42'2''$	$202°16'18''$	$38,7856$	$1,5184 \pm 0,0005$
$577,0$	$124°50'0''$	$202°8'14''$	$38,6519$	$1,5169 \pm 0,0005$
$579,1$	$124°50'22''$	$202°7'38''$	$38,6439$	$1,5168 \pm 0,0005$
$607,3$	$124°52'32''$	$202°5'32''$	$38,6083$	$1,5164 \pm 0,0005$
$623,4$	$124°56'30''$	$202°1'26''$	$38,5411$	$1,5156 \pm 0,0005$
$671,6$	$124°57'24''$	$202°0'30''$	$38,5258$	$1,5154 \pm 0,0005$
$690,7$	$124°59'40''$	$201°58'46''$	$38,4925$	$1,5151 \pm 0,0005$

Tabulka 1: Závislost indexu lomu N_H hranolu na vlnové délce světla.

Dále jsem měřil lámavý úhel kapaliny, kterou jsem měl nalitu v kyvetě. Naměřil jsem $\alpha_{1K} = 131°57'44'' \pm 2''$, $\alpha_{2K} = 251°34'24'' \pm 2''$. Pomocí vztahu (2) jsem určil lámavý úhel kyvety

$$\varphi_K = 59°48'20'' \pm 2'' .$$

Stějně jako při měření hranolu jsem určil závislost indexu lomu pro dané spektrální čáry rtuťové výbojky u předložené kapaliny.

λ [nm]	β_{1H}	β_{2H}	δ_{min} [°]	N
	$\pm 4''$	$\pm 4''$	$\pm 4''$	
404,7	139°10'0''	187°46'26''	24,3036	$1,3436 \pm 0,0009$
407,8	139°11'4''	187°44'48''	24,2811	$1,3433 \pm 0,0007$
435,8	139°21'18''	187°34'30''	24,1100	$1,3411 \pm 0,0007$
491,6	139°37'18''	187°19'18''	23,8500	$1,3377 \pm 0,0007$
546,1	139°48'32''	187°8'32''	23,6667	$1,3353 \pm 0,0007$
577,0	139°53'14''	187°1'2''	23,5650	$1,3340 \pm 0,0007$
579,1	139°53'40''	187°0'58''	23,5608	$1,3339 \pm 0,0007$
690,7	139°59'50''	186°56'56''	23,4758	$1,3328 \pm 0,0007$

Tabulka 2: Závislost indexu lomu N_K kapaliny na vlnové délce světla.

Naměřená data jsem fitoval pomocí programu GNUplot vztahem (4). Pro hranol jsem dostal konstanty

$$\begin{aligned} a &= (3.1 \pm 0.6)\,\mathrm{nm}\,, \\ \lambda_0 &= (-269 \pm 20)\,\mathrm{nm}\,, \\ N_0 &= 1,5072 \pm 0,0013\,. \end{aligned}$$

A pro kapalinu jsem dostal konstanty

$$\begin{aligned} a &= (2,7 \pm 0,9)\,\mathrm{nm}\,, \\ \lambda_0 &= (-251 \pm 36)\,\mathrm{nm}\,, \\ N_0 &= 1,3262 \pm 0,0018\,. \end{aligned}$$

Pomocí těchto konstant jsem určil použitím vztahu (4) indexy lomu N_C, N_D a N_F pro hranol

$$\begin{aligned} N_{C\,H} &= 1,515 \pm 0,002\,, \\ N_{D\,H} &= 1,517 \pm 0,002\,, \\ N_{F\,H} &= 1,521 \pm 0,002\,, \end{aligned}$$

a pro kapalinu

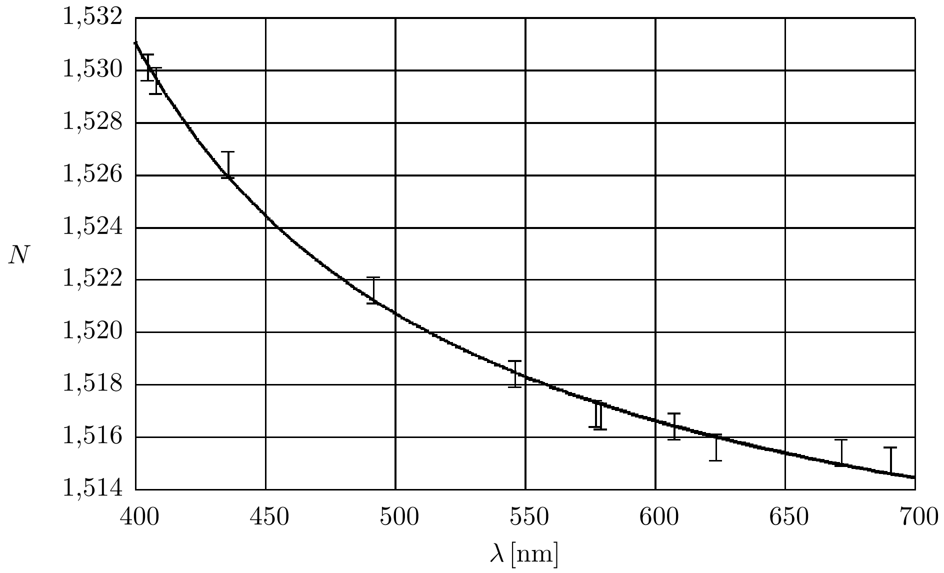
$$\begin{aligned} N_{C\,K} &= 1,333 \pm 0,003\,, \\ N_{D\,K} &= 1,334 \pm 0,003\,, \\ N_{F\,K} &= 1,338 \pm 0,004\,. \end{aligned}$$

Z těchto konstant jsem určil pomocí vztahů (5), (6) a (7) střední dispersi, relativní dispersi a Abbeovo číslo pro hranol

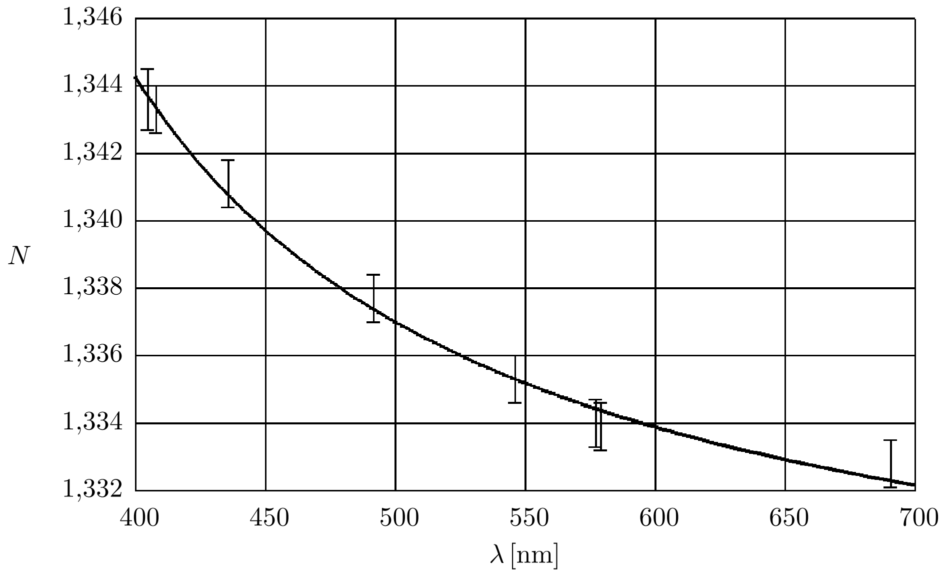
$$\begin{aligned} \Delta_H &= 0,006 \pm 0,004\,, \\ \delta_H &= 0,012 \pm 0,008\,, \\ \gamma_H &= 82 \pm 51\,, \end{aligned}$$

a pro kapalinu

$$
\begin{aligned}
\Delta_K &= 0,005 \pm 0,005\,, \\
\delta_K &= 0,014 \pm 0,015\,, \\
\gamma_K &= 69 \pm 74\,.
\end{aligned}
$$



Graf 1: Závislost indexu lomu hranolu na vlnové délce světla.



Graf 2: Závislost indexu lomu kyvety na vlnové délce světla.

Diskuse výsledků

Nepřesnosti při měření vznikaly především vlivem nedokonalého seřízení goniometru. Při měření je potřeba, aby lámavé stěny byly kolmo k vodorovné podložce. Dále jsem se dopouštěl chyby při odečítání ze stupnice a při zaměřování jednotlivých spektrálních čar.

Chybu měření lámavého a deviačních úhlů jsem pro hranol odhadl jako dvě úhlové vteřiny. Při měření kapaliny v kyvetě jsem odhadl chybu měření lámavého úhlu jako $\sigma = \pm 2''$. Při měření deviačních úhlů jsem se dopouštěl větší chyby. Tato chyba je způsobená nenulovou tloušťkou stěn kyvety, které jsou vyrobeny z materiálu s jiným indexem lomu, než měla kapalina. Proto jsem chybu měření odhadl jako $\sigma = \pm 4''$. Odečet spektrálních čar byl také komplikovanější, neboť čáry byly méně ostré.

K určení indexu lomu jsem použil vztah (1). Chybu jsem určil, jak uvádím v teoretickém úvodu, pomocí kvadratického zákona přenosu chyb vztahem (9). Chyba měření indexu lomu mi vyšla $\sigma N \approx \pm 0,0005$. Tato metoda tedy zaručuje 3 desetinná místa.

Naměřená hodnoty indexů lomu čar spektra rtuťové výbojky jsem fitoval programem GNUplot pomocí vztahu (4). Tím jsem získal konstanty N_0, a a λ_0, které vystupují v tomto vztahu. Program GNUplot však nezohledňuje chyby měření fitovaných veličin. Ovšem statistická chyba těchto veličin vyšla řádově větší. Hodnoty chyb měření byly vzhledem k vypočtené chybě měření indexu lomu zanedbatelná.

Dosazením do veličin N_0, a a λ_0 do vztahu (4) jsem získal vztah, pomocí kterého jsem mohl určit indexy lomu N_C, N_D a N_F pro vlnové délky $\lambda_C = 656,3\,\mathrm{nm}$, $\lambda_D = 589,3\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_F = 486,1\,\mathrm{nm}$. K určení chyby měření indexů lomu jsem aplikací kvadratického zákona přenosu chyb získal vztah

$$\sigma N(\lambda) = \sqrt{(\sigma N_0)^2 + \left(\frac{\sigma a}{\lambda + \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot \sigma \lambda_0}{(\lambda + \lambda_0)^2}\right)}\,. \tag{13}$$

Následně jsem dosadil vypočtené hodnoty do vzorců (5), (6) a (7) a určil střední dispersi, relativní dispersi a Abbeovo číslo. Pomocí vztahů (10), (11) a (12) jsem určil příslušné chyby měření.

Závěr

Proměřil jsem lámavý úhel skleněného hranolu φ_H a kyvety φ_K, které mi vyšly

$$\varphi_H = 59^\circ 59' 55'' \pm 2''\,,$$

$$\varphi_K = 59^\circ 48' 20'' \pm 2''\,.$$

U skleněného hranolu a kapaliny jsem proměřil indexy lomu čar spektra rtyťové výbojky. Tyto hodnoty jsou zaneseny v tabulce 1 a tabulce 2. Pomocí těchto dat jsem určil dispersní křivky, které jsem zobrazil v grafu 1 a grafu 2. Použitá metoda zaručuje tři desetinná místa indexu lomu.

Dále jsem určil střední dispersi Δ, relativní dispersi δ a Abbeovo číslo γ pro hranol

$$\begin{aligned} \Delta_H &= 0,006 \pm 0,004\,, \\ \delta_H &= 0,012 \pm 0,008\,, \\ \gamma_H &= 82 \pm 51\,, \end{aligned}$$

a pro kapalinu

$$\begin{aligned} \Delta_K &= 0,005 \pm 0,005\,, \\ \delta_K &= 0,014 \pm 0,015\,, \\ \gamma_K &= 69 \pm 74\,. \end{aligned}$$

Seznam použité literatury

[1] I. Pletant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fähnrich: *Fyzikální praktikum III.* Optika. Karolinum, Praha 1993. ISBN 80–7066–763–X

[2] J. Englich: *Zpracování výsledků fyzikálních měření.* Praha 2000. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/mereni.pdf`