

1 Pracovní úkol

1. Ze zadané hustoty krystalu fluoridu lithného určete vzdálenost d hlavních atomových rovin.
2. Proměřte úhlovou závislost intenzity difraktovaného rentgenového záření při pevné orientaci krystalu.
3. Proměřte spektrum rentgenového záření při konstantním anodovém napětí rentgenky $U_a=20$ kV.
4. Z mezní hodnoty energie spojitého spektra určete Planckovu konstantu, porovnejte s tabelovanou hodnotou. Určete vlnové délky čar K_α , K_β (porovnejte s tabelovanými hodnotami), spočítejte jejich vlnočty a odpovídající energetické rozdíly vyjádřete v keV. Určete konstanty stínění.

2 Teorie

Zdrojem rentgenového záření bude rentgenová trubice. Ta je tvořena anodou a katodou umístěnými ve skleněné baňce, z níž je vyčerpán vzduch. Budeme-li katodu žhavit, budou z ní vylétávat elektrony. Elektrony se po dopadu na anodu mohou zbrzdit o elektrická pole jader materiálu anody. Takto vzniká tzv. brzdné záření, jehož spektrum je spojité. Jeho možné vlnové délky jsou zleva ohraničené hodnotou λ_m . Předá-li elektron svou veškerou energii fotonu rentgenového záření, který právě vznikne, má potom foton právě vlnovou délku λ_m . Pro odpovídající energii fotonu E_m platí:

$$E_m = hf_m = \frac{hc}{\lambda_m} = eU_a, \quad (1)$$

kde h je Planckova konstanta, f_m je frekvence příslušného fotonu, c je rychlost světla, e značí náboj elektronu a U_a je napětí mezi anodou a katodou, tj. napětí, kterým jsou elektrony urychlovány.

Oproti tomu spektrum tzv. charakteristického záření je diskrétní. Pokud dopadající elektron má dost velkou energii, může vyrazit jiný elektron z nižších hladin elektronového obalu atomu anody. Na prázdné místo poté spadne elektron z vyšších hladin. Ten nadbytečnou energii vyzáří ve formě charakteristického záření. Čára K_α odpovídá přeskoku elektronu z hladiny s hlavním kvantovým číslem $n=2$ na hladinu s hlavním kvantovým číslem $n=1$, čára K_β odpovídá přeskoku z $n=3$ na $n=1$ apod.

Pro vlnočty (převrácená hodnota vlnové délky) ν_{ij} odpovídající přeskoku mezi hladinami s hlavními kvantovými čísly n_i a n_j platí dle Borhovy teorie vztah:

$$\nu_{ij} = R(Z-s)^2 \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (2)$$

kde R je Rydbergova konstanta, Z je atomové číslo prvku anody (v našem případě měď, tj. $Z=29$) a s je tzv. stínící konstanta, která zahrnuje vliv ostatních elektronů.

Energetický rozdíl dvou hladin spočítáme jako:

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3)$$

přičemž λ je vlnová délka fotonu vyzářená v důsledku přeskoku elektronu mezi hladinami.

Difrakce na krystalech je podle Braggů způsobena odrazem na rovnoběžných plochách v krystalu (viz obr 1). Tato interpretace sice není zcela správná, nicméně dává správnou podmínku pro vznik interferenčních maxim:

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad (4)$$

kde d je vzdálenost rovin, k je řád interference, λ je vlnová délka dopadajícího světla a θ je úhel dopadu (jak je ostatně patrné z obrázku 1).

V našem případě budeme studovat difrakci rentgenového záření na krystalu LiF. Ten tvoří kubickou plošně centrovanou mřížku. Na jednu elementární buňku tedy připadají 4 atomy lithia a 4 atomy fluoru. Buňka má objem $(2d)^3$. Díky známé hustotě LiF ρ můžeme vyjádřit d jako:

$$d = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4M_{LiF}}{\rho}}, \quad (5)$$

kde M_{LiF} je hmotnost jedné molekuly LiF.

3 Výsledky měření

Zadané hodnoty a konstanty

$c = 299\,792\,458\,\text{ms}^{-1}$
 $h = 6,626\,176 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$
 $e = 1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
 $R = 10\,973\,731,77\,\text{m}^{-1}$
 $\rho = 2\,601\,\text{kgm}^{-3}$

V tabulkách [4] nacházíme, že $M_{\text{LiF}} = 43,07 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$. Vzdálenost atomových rovin podle (5) je:
 $d = 0,2023\,\text{nm}$

Měření probíhalo na školním přístroji Phywe. Nejprve jsme měřili při natočení krystalu LiF o pevný úhel 14° (tj. $\theta = 14^\circ$). Intenzitu záření jsme detekovali Geiger-Müllerovým počítačem. Maximální chybu určení úhlu jsme odhadli jako polovina dílku stupnice, tj. $0,5^\circ$. Směrodatná odchylka potom bude třetina maximální chyby, tj. po zaokrouhlení $0,2^\circ$.

Výsledky měření jsou v tabulce 1. N značí počet částic zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem za dobu 40 s, je-li natočen pod úhlem ϕ . Tento počet je přímo úměrný intenzitě difraktovaného záření. Graficky znázorněná závislost N na natočení Geiger-Müllerova počítače je v grafu 1. Data jsme proložili gaussovskou funkcí. Střed je v $\phi_c = (27,9 \pm 0,2)^\circ$

Při měření v bodu 3 jsme měnili úhel natočení θ kryslatu. Geiger-Müllerův počítač jsme museli natáčet o dvojnásobek úhlu θ , aby byl stále zachována podmínka rovnosti úhlu dopadu a odrazu. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 2. Graficky zpracované výsledky měření jsou v grafu 2. Hodnoty jsme proložili součtem dvou gaussovských funkcí a jednoho pulzu. Pozorujeme pouze první řády difrakce, tj. $k = 1$ v (4). Z proložených funkcí zjistíme λ_m a vlnové délky λ_α , λ_β příslušející spektrálním čarám K_α , K_β . Čára K_β odpovídá většímu energetickému rozdílu hladin, proto bude mít podle (3) kratší vlnovou délku. Z proložené funkce vidíme, že:

$$\lambda_m = (57 \pm 2)\,\text{pm}$$

$$\lambda_\alpha = (156 \pm 1)\,\text{pm}$$

$$\lambda_\beta = (141 \pm 1)\,\text{pm}$$

Anodové napětí rentgenky bylo:

$$U_a = (20,5 \pm 0,9)\,\text{kV}$$

Z rovnice (1) můžeme vyjádřit Planckovu konstantu:

$$h = \frac{eU_a\lambda_m}{c} \quad (6)$$

Po dosazení experimentálních hodnot dostáváme hodnotu Planckovy konstanty:

$$h = (6,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$$

Vlnočty pro spektrální čáry K_α , K_β jsou:

$$\nu_\alpha = (6,42 \pm 0,04) \cdot 10^9\,\text{m}^{-1}$$

$$\nu_\beta = (7,11 \pm 0,05) \cdot 10^9\,\text{m}^{-1}$$

Energetické rozdíly spočítáme podle (3):

$$E_\alpha = (1,28 \pm 0,01) \cdot 10^{-15}\,\text{J} = (7,96 \pm 0,05)\,\text{keV}$$

$$E_\beta = (1,41 \pm 0,01) \cdot 10^{-15}\,\text{J} = (8,81 \pm 0,06)\,\text{keV}$$

Konstanty stínění vypočteme z (2):

$$s_\alpha = (1,1 \pm 0,2)$$

$$s_\beta = (2,0 \pm 0,2)$$

4 Diskuse

V tabulkách [4] je uvedena hodnota $d_{\text{tab}} = 0,200865\,\text{nm}$. Náš výpočet se tedy od tabulkové hodnoty liší jen o 0,7%.

Největší chybu do měření vnášela příliš hrubá stupnice na odečítání úhlů. Maximum difraktovaného záření jsme dostali pro hodnotu $\phi_c = (27,9 \pm 0,2)^\circ$. Vidíme, že je to v rámci chyby polovina úhlu ϕ_c . Platí tedy rovnost mezi úhlem dopadu a úhlem odrazu.

Při pohledu na graf 2 jasně vidíme omezenost zleva spektra brzdného záření. Hodnoty vlnových délek λ_α , λ_β příslušející spektrálním čarám K_α , K_β , zjištěných díky proložení naměřených hodnot, se blíží tabulkovým hodnotám $\lambda_{\alpha,\text{tab}} = 154,0562\,\text{pm}$ a $\lambda_{\beta,\text{tab}} = 139,2218\,\text{pm}$.

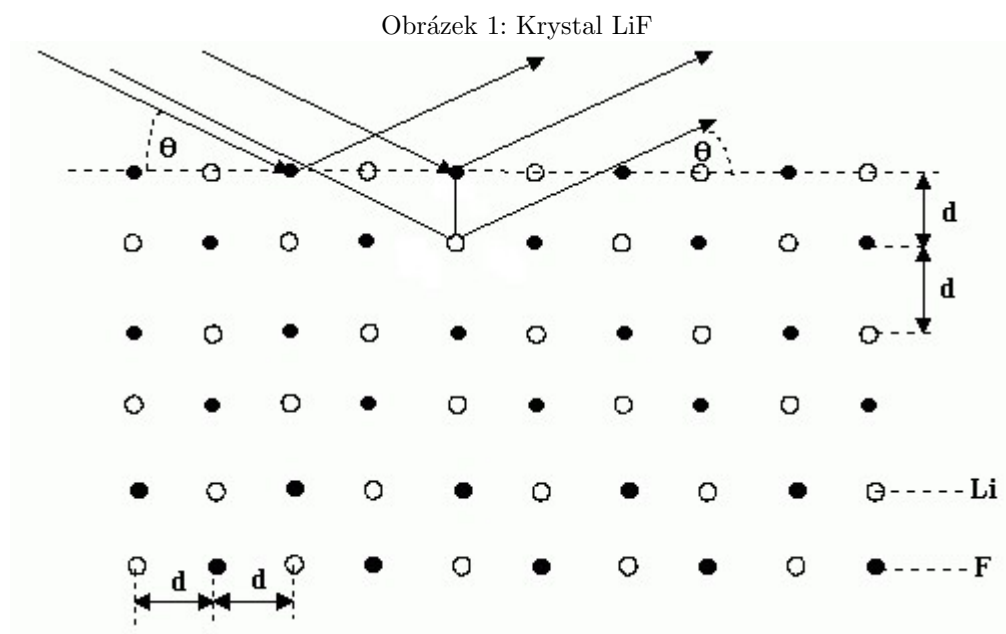
Námi spočtená Planckova konstanta se v rámci chyby shoduje s tabulkovou hodnotou.

5 Závěr

1. Vzdálenost hlavních atomových rovin je:
 $d = 0,2023 \text{ nm}$
2. Úhlová závislost difraktovaného záření ze vynesena v grafu 1. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 1
3. Proměřili jsme spektrum při konstantním napětí rentgenky $U_a = (20,5 \pm 0,9) \text{ kV}$. Naměřená data jsou v tabulce 2. Graficky znázorněné spektrum je v grafu 2.
4. Planckova konstanta h byla určena jako:
 $h = (6,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Vlnové délky příslušejícím čarům K_α , K_β jsou:
 $\lambda_\alpha = (156 \pm 1) \text{ pm}$
 $\lambda_\beta = (141 \pm 1) \text{ pm}$
Jejich vlnočty jsou potom:
 $\nu_\alpha = (6,42 \pm 0,04) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$
 $\nu_\beta = (7,11 \pm 0,05) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$
Odpovídající energetické rozdíly jsme spočetli jako:
 $E_\alpha = (7,96 \pm 0,05) \text{ keV}$
 $E_\beta = (8,81 \pm 0,06) \text{ keV}$
Konstanty stínění jsme určili jakožto:
 $s_\alpha = (1,1 \pm 0,2)$
 $s_\beta = (2,0 \pm 0,2)$

6 Literatura

- [1] I. Pelant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fährnich: Fyzikální praktikum III - Optika, Karolinum, Praha, 1993
- [2] J. English: Zpracování výsledků fyzikálních měření, Praha, 2000
- [3] studijní text (<http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp>)
- [4] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha, 1980



Tabulka 1: Závislost intenzity na natočení Geiger-Müllerova počítače

ϕ [°]	10±0,2	12±0,2	14±0,2	16±0,2	18±0,2	20±0,2	22±0,2	24±0,2	24,5±0,2
N	134	124	110	100	102	116	116	120	130
ϕ [°]	25±0,2	25,5±0,2	26±0,2	26,5±0,2	27±0,2	27,5±0,2	28±0,2	28,5±0,2	29±0,2
N	126	224	838	1754	4917	5002	4886	4030	3101
ϕ [°]	29,5±0,2	30±0,2	30,5±0,2	31±0,2	31,5±0,2	32±0,2	34±0,2	36±0,2	38±0,2
N	1900	929	434	186	108	116	96	76	80
ϕ [°]	40±0,2	42±0,2	44±0,2	46±0,2	48±0,2	50±0,2			
N	78	90	60	68	86	52			

Tabulka 2: Spektrum rentgenového záření

θ [°]	5±0,2	5,5±0,2	6±0,2	6,5±0,2	7±0,2	7,5±0,2	8±0,2	8,25±0,2	8,5±0,2
N	164	164	130	136	170	150	150	312	712
θ [°]	9±0,2	9,5±0,2	10±0,2	10,5±0,2	11±0,2	11,5±0,2	12±0,2	12,5±0,2	13±0,2
N	2628	4147	5251	5484	5780	6331	6249	6375	6190
θ [°]	13,5±0,2	14±0,2	14,5±0,2	15±0,2	15,5±0,2	16±0,2	16,5±0,2	17±0,2	17,5±0,2
N	5680	5169	4672	4205	3964	3667	3234	3066	2847
θ [°]	18±0,2	18,5±0,2	19±0,2	19,5±0,2	20±0,2	20,25±0,2	20,5±0,2	20,75±0,2	21±0,2
N	2691	2488	2682	2311	4791	16372	13345	4972	2282
θ [°]	21,5±0,2	22±0,2	22,25±0,2	22,5±0,2	22,75±0,2	23±0,2	23,25±0,2	23,5±0,2	24±0,2
N	2034	3126	12069	39395	41019	12355	2153	1410	1106
θ [°]	24,5±0,2	25±0,2	25,5±0,2	26±0,2	26,5±0,2	27±0,2	27,5±0,2	28±0,2	28,5±0,2
N	982	890	852	690	680	598	590	566	470
θ [°]	29±0,2	29,5±0,2	30±0,2						
N	430	432	416						