

## Zadání

### Pracovní úkol

1. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé (plankonvexní) čočky jednak Besselovou metodou, jednak metodou dvojího zvětšení.
2. Z následujících možností vyberte jednu:
  - a. Změřte kulovou vadu vyšetřované ploskovypuklé čočky v obou směrech pro dvě vzdálenosti předmětu  $a = 30$  cm,  $a = 60$  cm. Získané výsledky zpracujte do jednoho grafu a diskutujte velikost kulové vady v jednotlivých případech.
  - b. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé (plankonvexní) čočky Besselovou metodou s modrým a červeným filtrem. Vyhodnoťte barevnou vadu vyšetřované čočky, použijte i výsledku z *úkolů 1*.
3. Užitím goniometru určete vzdálenost hlavních rovin čočky měřené v *bodě 1* a tlusté ploskovypuklé čočky.
4. Na fokometru změřte optickou mohutnost čočky měřené v *bodě 1* a výsledek srovnajte s výsledky měření ohniskové vzdálenosti.
5. Na základě výsledků získaných v *bodech 1. a 3.* diskutujte, která z uvedených metod měření ohniskové vzdálenosti dle *bodu 1.* je v uvedeném uspořádání přesnější. Porovnejte relativní chyby měření. Odhadněte systematickou chybu, které se dopouštíme při měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou.
6. Ze známé tloušťky tlusté ploskovypuklé čočky a změřené vzdálenosti hlavních rovin určete index lomu skla.

### Pomůcky

stožan s měřítkem, sodíková výbojka, stínítko s mikrometrickými šrouby, clony, tenká ploskovypuklá čočka, tlustá ploskovypuklá čočka, goniometr, fokometr

# Teoretický úvod<sup>1</sup>

## Určování ohniskové vzdálenosti čočky

Pro určení ohniskové vzdálenosti čočky lze využít například Besselovu metodu. Ta využívá toho, že při dané vzdálenosti  $D$  předmětu od obrazu existují dvě symetrické polohy čočky, při kterých je obraz ostrý. Najdeme-li tyto polohy a označíme-li jejich rozdíl  $\Delta$ , můžeme určit ohniskovou vzdálenost  $f_B$  ze vztahu

$$f_B = \frac{D^2 - \Delta^2}{4D}, \quad (1)$$

Pro tlustou čočku lze tento vztah upravit na

$$f_B = \frac{(D - \delta)^2 - \Delta^2}{4(D - \delta)}, \quad (2)$$

kde  $\delta$  je vzdálenost hlavních rovin tlusté čočky.

Další metodou je například metoda dvojího zvětšení, kdy měříme změnu příčného zvětšení při změně vzdálenosti předmětu od čočky. Je-li při vzdálenosti  $a_1$  předmětu od čočky příčné zvětšení  $Z_1$  a při vzdálenosti  $a_2$  zvětšení  $Z_2$ , vypočteme ohniskovou vzdálenost  $f_{Z_1}$  ze vztahu:

$$f_{Z_1} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot |a_1 - a_2|}{|Z_2 - Z_1|} \quad (3)$$

Budeme-li místo vzdáleností  $a_1, a_2$  předmětu od čočky měřit vzdálenosti  $a'_1, a'_2$  obrazu od čočky, určíme ohniskovou vzdálenost  $f_{Z_2}$  podle vzorce:

$$f_{Z_2} = \frac{|a'_1 - a'_2|}{|Z_2 - Z_1|} \quad (4)$$

## Vady zobrazení čoček

Rozlišujeme kulovou a barevnou vadu čoček.

Kulová vada nastává, když se neomezujeme pouze na paraxiální paprsky. U spojné čočky se paraxiální paprsky protínají dále od čočky než paprsky, které svírají s optickou osou větší úhly. Tuto vadu definujeme vztahem

$$\Delta a' = a' - a'_p, \quad (5)$$

kde  $a'$  je vzdálenost obrazu od čočky pro paprsek procházející čočkou ve vzdálenosti  $s$  od optické osy a  $a'_p$  vzdálenost obrazu od čočky pro paraxiální paprsky. Kulová vada je tedy závislá na vzdálenosti  $s$ . Tuto závislost lze vyjádřit vztahem

$$\Delta a' = K s^2, \quad (6)$$

kde  $K$  je koeficient. Pro spojku by měl vycházet záporně.

Barevná vada vzniká v důsledku toho, že při průchodu bílého světla čočkou dochází k jeho rozkladu na barevné složky. Díky různým indexům lomu se fialové paprsky lámou více než červené. Velikost barevné vady charakterizujeme rozdílem obrazových vzdáleností pro krajní složky viditelného spektra.

## Goniometr

Goniometrem lze určit vzdálenosti hlavních rovin čočky. Najdeme-li body, pro něž se nebude při malém natáčení čočky posouvat světelná šterbina pozorovaná v dalekohledu, je vzdálenost  $\delta$  hlavních rovin dána jejich rozdílem.

Odsud lze vypočíst index lomu skla  $n$ , známe-li ještě tloušťku čočky  $d$ :

$$n = \frac{d}{d - \delta} \quad (7)$$

---

<sup>1</sup> Napsáno na základě [1]

## Výsledky měření

### Měření ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou a metodou dvojího zvětšení

Jako zdroj světla jsme použili sodíkovou výbojku. Všechny součástky jsme umisťovali do stojanu s měřítkem. Jako předmět jsme použili kruhový otvor o průměru  $Y = 10 \text{ mm}$  známého dle [2] a umístili jej na držák do polohy  $x_p = (6,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ . Obraz předmětu jsme pozorovali na stínítku s mikrometrickými šrouby ve vzdálenostech  $x_{p'} = (66,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ ,  $x_{p'} = (76,0 \pm 0,1) \text{ cm}$  a  $x_{p'} = (86,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ . Chyby jsou shodné s velikostí nejmenšího dílku stupnice.

Pro každou vzdálenost  $D = x_{p'} - x_p$  (chybu stanovujeme jako maximální dle [3]) jsme hledali polohy čočky  $x_1$  a  $x_2$ , při kterých vznikl na stínítku ostrý obraz. Změřili jsme vždy dvě krajní polohy čočky, kdy se zdál obraz ještě ostrý a výslednou polohu  $x_1$  (respektive  $x_2$ ) určili jejich aritmetickým průměrem. Chyba je dána rozdílem tohoto průměru a jedné z krajních poloh. Ohnisková vzdálenost  $f_B$  tenké ploskovypuklé čočky je vypočtena ze vztahu (1), kde  $\Delta = x_2 - x_1$ . Chyby jsou stanoveny jako maximální dle [3]. Naměřené hodnoty pro určení ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou a příslušné výpočty jsou uvedeny v Tab. 1.

Výslednou ohniskovou vzdálenost  $f_B$  vypočteme aritmetickým průměrem hodnot získaných měřeními při různých vzdálenostech  $D$  a chybu určíme jako maximální dle [3]:

$$f_B = (12,5 \pm 0,3) \text{ cm}$$

D [cm]	$x_1$ [cm]	$x_2$ [cm]	$\Delta$ [cm]	$f_B$ [cm]
$60,0 \pm 0,2$	$23,7 \pm 0,2$	$47,9 \pm 0,2$	$24,2 \pm 0,4$	$12,6 \pm 0,2$
$70,0 \pm 0,2$	$22,3 \pm 0,2$	$59,6 \pm 0,2$	$37,3 \pm 0,4$	$12,5 \pm 0,2$
$80,0 \pm 0,2$	$21,5 \pm 0,4$	$70,3 \pm 0,2$	$48,8 \pm 0,6$	$12,6 \pm 0,3$

Tab. 1: Určení ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou

Měření ohniskové vzdálenosti čočky metodou dvojího zvětšení jsme prováděli zároveň s Besselovou metodou. Pro každou vzdálenost  $D$  a polohu čočky  $x_1$  (respektive  $x_2$ ) jsme měřili průměr obrazu. Pomocí posuvů mikrometrickými šrouby na ose  $x$  jsme získali průměr  $Y_{1x}$  (respektive  $Y_{2x}$ ) a pomocí posuvů na ose  $y$  průměr  $Y_{1y}$  (respektive  $Y_{2y}$ ). Chybu odhadujeme na  $0,5 \text{ mm}$  na základě možnosti přesného nastavení rysky na okraj obrazu. Výsledný průměr obrazu  $Y_1$  (respektive  $Y_2$ ) je pak stanoven aritmetickým průměrem hodnot  $Y_{1x}$  a  $Y_{1y}$  (respektive  $Y_{2x}$  a  $Y_{2y}$ ) a jeho chyba spočtena jako maximální dle [3]. Ohniskové vzdálenosti  $f_{Z1}$  a  $f_{Z2}$  čočky jsou vypočteny ze vztahů (3) a (4), kam jsme dosadili  $|a_1 - a_2| = |a'_1 - a'_2| = x_2 - x_1$ ,  $Z_1 = \frac{Y_1}{Y}$ ,  $Z_2 = \frac{Y_2}{Y}$ . Chyby jsou stanoveny jako maximální dle [3]. Naměřené hodnoty pro určení ohniskové vzdálenosti metodou dvojího zvětšení a příslušné výpočty jsou uvedeny v Tab. 2.

Výsledné ohniskové vzdálenosti  $f_{Z1}$  a  $f_{Z2}$  vypočteme aritmetickým průměrem hodnot získaných měřeními při různých vzdálenostech  $D$  a chybu určíme jako maximální dle [3]:

$$f_{Z1} = (14 \pm 3) \text{ cm}$$

$$f_{Z2} = (13,9 \pm 0,8) \text{ cm}$$

$x_1$ [cm]	$x_2$ [cm]	$Y_{1x}$ [mm]	$Y_{1y}$ [mm]	$Y_1$ [mm]	$Y_{2x}$ [mm]	$Y_{2y}$ [mm]	$Y_2$ [mm]	$f_{Z1}$ [cm]	$f_{Z2}$ [cm]
$23,7 \pm 0,2$	$47,9 \pm 0,2$	$22,1 \pm 0,5$	$18,9 \pm 0,5$	$20,5 \pm 0,5$	$4,2 \pm 0,5$	$5,0 \pm 0,5$	$4,6 \pm 0,5$	$14 \pm 3$	$15 \pm 1$
$22,3 \pm 0,2$	$59,6 \pm 0,2$	$31,0 \pm 0,5$		$31,0 \pm 0,5$	$3,0 \pm 0,5$	$3,9 \pm 0,5$	$3,5 \pm 0,5$	$14 \pm 3$	$13,5 \pm 0,6$
$21,5 \pm 0,4$	$70,3 \pm 0,2$	$40,0 \pm 0,5$		$40,0 \pm 0,5$	$2,3 \pm 0,5$	$2,6 \pm 0,5$	$2,5 \pm 0,5$	$13 \pm 3$	$13,0 \pm 0,5$

Tab. 2: Určení ohniskové vzdálenosti čočky metodou dvojího zvětšení

## Měření kulové vady tenké čočky

Zdroj světla, předmět i čočka jsme použili stejné jako v předchozím úkolu. Předmět byl umístěn ve vzdálenosti  $x_p = (6,0 \pm 0,1)\text{cm}$ . Kulovou vadu jsme měřili ve čtyřech uspořádáních: čočka umístěná na stojanu v poloze  $x_\zeta = (36,0 \pm 0,1)\text{cm}$  s clonami za čočkou (*směr 1*) a před čočkou (*směr 2*) a čočka umístěná v poloze  $x_\zeta = (66,0 \pm 0,1)\text{cm}$  ve *směrech 1 i 2*. Jednotlivým polohám čočky odpovídají vzdálenosti  $a = x_\zeta - x_p$  předmětu od čočky s chybou  $0,2\text{ cm}$  (maximální chyba dle [3]). Pro výběr paprsků různě vzdálených od optické osy jsme používali clony  $10/0$ ,  $20/10$ ,  $30/20$ ,  $40/30$  a  $50/40$ , kde první číslo udává vnější průměr clony  $d_1$  a druhé číslo její vnitřní průměr  $d_2$  [2]. Vzdálenosti  $s$  paprsku od optické osy vypočteme dle [1] jako  $s = \frac{d_1+d_2}{4}$ . Pro každé uspořádání a každou clonu jsme hledali polohu  $x'$  stínítka na stojanu, kdy byl obraz nejostřejší. Použili jsme stejný postup jako u hledání poloh  $x_1$  a  $x_2$  čočky v předchozím úkolu. Kulovou vadu  $\Delta a'$  pro jednotlivé vzdálenosti  $s$  vypočteme ze vztahu (5), kam za  $a'_p$  dosadíme hodnotu  $x'$  naměřenou pro clonu  $1/10$  ( $s = 2,5\text{mm}$ ) a za  $a'$  hodnotu  $x'$  příslušnou danému  $s$ .

Naměřené hodnoty a příslušné výpočty jsou uvedeny v *Tab. 3*. V *Grafu 1* jsou vyneseny závislosti kulové vady na kvadrátu vzdálenosti  $s$  paprsku od optické osy pro všechna uspořádání. Lineární regresi hodnot z *Grafu 2* získáme závislost ve tvaru odpovídajícím vztahu (6):

$$a = 30\text{ cm, směr 1: } K = (-2,6 \pm 0,3)\text{dm}^{-1}$$

$$a = 30\text{ cm, směr 2: } K = (-2,1 \pm 0,3)\text{dm}^{-1}$$

$$a = 60\text{ cm, směr 1: } K = (-1,8 \pm 0,3)\text{dm}^{-1}$$

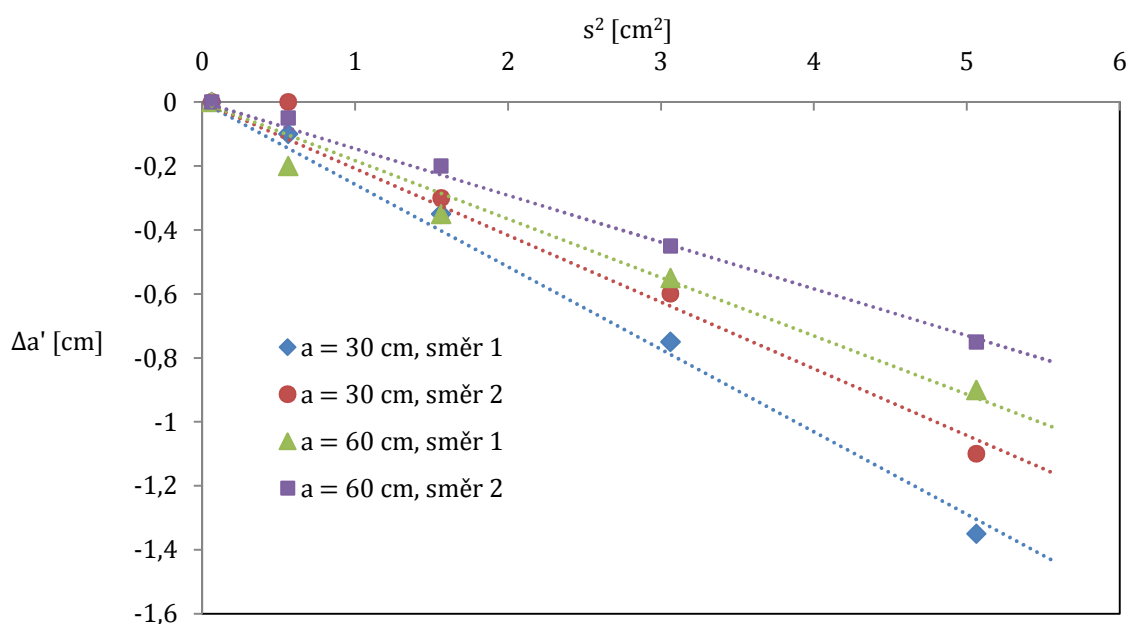
$$a = 60\text{ cm, směr 2: } K = (-1,5 \pm 0,2)\text{dm}^{-1}$$

Chyby jsou dány chybou lineární regrese a chybou určení kulové vady  $\Delta a'$ , kterou pro tento výpočet uvažujeme 10%.

		a = 30 cm, směr 1		a = 30 cm, směr 2		a = 60 cm, směr 1		a = 60 cm, směr 2	
s [mm]	s <sup>2</sup> [cm <sup>2</sup> ]	x' [cm]	$\Delta a'$ [cm]	x' [cm]	$\Delta a'$ [cm]	x' [cm]	$\Delta a'$ [cm]	x' [cm]	$\Delta a'$ [cm]
2,5	0,0625	57,6 $\pm 0,4$	0,0 $\pm 0,4$	57,3 $\pm 0,4$	0,0 $\pm 0,4$	82,1 $\pm 0,3$	0,0 $\pm 0,3$	81,8 $\pm 0,3$	0,0 $\pm 0,3$
7,5	0,5625	57,5 $\pm 0,1$	-0,1 $\pm 0,1$	57,3 $\pm 0,2$	0,0 $\pm 0,2$	81,9 $\pm 0,2$	-0,2 $\pm 0,2$	81,7 $\pm 0,1$	-0,1 $\pm 0,1$
12,5	1,5625	57,3 $\pm 0,2$	-0,4 $\pm 0,2$	57,0 $\pm 0,2$	-0,3 $\pm 0,2$	81,7 $\pm 0,2$	-0,4 $\pm 0,2$	81,55 $\pm 0,05$	-0,20 $\pm 0,05$
17,5	3,0625	56,85 $\pm 0,05$	-0,75 $\pm 0,05$	56,65 $\pm 0,05$	-0,60 $\pm 0,05$	81,50 $\pm 0,05$	-0,55 $\pm 0,05$	81,30 $\pm 0,05$	-0,45 $\pm 0,05$
22,5	5,0625	56,25 $\pm 0,05$	-1,35 $\pm 0,05$	56,15 $\pm 0,05$	-1,10 $\pm 0,05$	81,15 $\pm 0,05$	-0,90 $\pm 0,05$	81,00 $\pm 0,05$	-0,75 $\pm 0,05$

Tab. 3: Měření kulové vady čočky

Graf 1: Závislost kulové vady na kvadrátu vzdálenosti paprsků procházejících čočkou od osy



### Goniometr, fokometr a výpočet indexu lomu

Pomocí goniometru jsme měřili vzdálenost  $\delta_1$  hlavních rovin tenké ploské vypuklé čočky používané v *úkolech 1 a 2* a vzdálenost  $\delta_2$  hlavních rovin tlusté ploskovypuklé čočky. Pro tenkou čočku jsme našli nerozmazávající se obraz v poloze  $x_1 = (23,5 \pm 0,3)mm$  a po otočení goniometru v poloze  $x'_1 = (19,9 \pm 0,3)mm$ . Pro tlustou čočku jsme analogicky naměřili  $x_2 = (29,8 \pm 0,3)mm$  a  $x'_2 = (18,3 \pm 0,3)mm$ . Chyby jsou odhadnuty na základě toho, při jakých posunech se ještě zdála být světelná štěrbinu nehybná. Vzdálenost hlavních rovin nyní vypočteme ze vztahu  $\delta_i = x_i - x'_i$ , kde  $i = 1, 2$ , a chybu stanovíme jako maximální dle [3]:

Tenká čočka:  $\delta_1 = (3,6 \pm 0,6)mm$

Tlustá čočka:  $\delta_2 = (11,5 \pm 0,6)mm$

Nyní můžeme ze vztahu (2) vypočíst korigovanou hodnotu ohniskové vzdálenosti:

$f_B = (12,4 \pm 0,2)cm$

Pro výpočet jsme využili hodnoty  $D$  a  $\Delta z$  Tab. 1,  $f_B$  vypočetli pro každé  $D$  zvlášť a chybu stanovili jako maximální dle [3]. Výsledné  $f_B$  je potom dáno aritmetickým průměrem jednotlivých hodnot. Pomocí fokometru jsme měřili optickou mohutnost  $\varphi$  tenké ploskovypuklé čočky. Měření jsme provedli pro obě otočení čočky a v obou případech získali  $\varphi = (8 \pm 1)D$ . **(Tady je chyba v chybě. Fokometr měl jeden dílek 0,25 D, akorát jsem to při zpracování protokolu zapoměla. Tím pádem jsou i některé další závěry chybné. Nicméně body mi za to nebyly strženy.)** Ohniskovou vzdálenost čočky vypočteme jako  $f = \frac{1}{\varphi}$  a chybu stanovíme metodou přenosu chyb dle [3]:

$f = (13 \pm 2)cm$

Ze vztahu (2) vypočteme index lomu skla  $n$  tlusté ploskovypuklé čočky. Dosazujeme  $\delta = \delta_1$  a  $d = 38 mm$  [2]:

$n = 1,43 \pm 0,07$

Chyba je stanovena jako maximální dle [3].

## Diskuse výsledků

### Měření ohniskové vzdálenosti tenké ploskovypuklé čočky

U měření ohniskové vzdálenosti tenké čočky Besselovou metodou a metodou dvojího zvětšení závisela chyba měření na přesnosti určení polohy, ve které byl obraz na stínítku nejostřejší. Chyba vznikala také samotným odečítáním poloh ze stupnice na stojanu, neboť nevíme, jestli byly jednotlivé optické prvky umístěny přesně uprostřed svých držáků. U metody dvojího zvětšení přispívala k celkové chybě také nepřesnost určení velikosti obrazu vzniklá převážně díky křivosti měřicích rysek na stínítku.

Relativní chyba měření Besselovou metodou byla asi 2%, relativní chyba měření metodou dvojího zvětšení a výpočtem pomocí vzorce (3) byla 22% a pomocí vzorce (4) 6%. Chyba výpočtu pomocí vzorce (3) je větší než u výpočtu ze vzorce (4), neboť vztah (3) obsahuje více veličin s chybou, která se dále přenáší. Jako výsledek měření metodou dvojího zvětšení bereme proto ohniskovou vzdálenost  $f_{Z_2}$  vypočtenou ze vztahu (4).

U Besselovy metody jsme se napřed dopustili systematické chyby, jelikož jsme zanedbali tloušťku čočky. Změřením vzdálenosti ohniskových rovin pomocí goniometru jsme však naměřené hodnoty přepočítali a zjistili jsme, že systematická chyba je pouze 0,8 %.

Chyba určení ohniskové vzdálenosti tenké čočky pomocí fokometru vznikla díky nedokonalosti stupnice fokometru (který měřil optickou mohutnost), kde jsme byli odečítat pouze celé dioptrie (**chyba**). Relativní chyba vypočtené ohniskové vzdálenosti potom byla asi 16%.

Můžeme tedy říct, že nejpřesnější metodou pro určení ohniskové vzdálenosti použité čočky byla Besselova metoda (**to je ten chybný závěr**). V rámci chyb se hodnoty ohniskových vzdáleností všemi metodami přibližně shodují.

### Měření kulové vady tenké ploskovypuklé čočky

U měření kulové vady vznikala chyba díky nepřesnostem určení polohy stínítka, kdy byl obraz nejostřejší. Největší chyba nastávala pro paprsky nejméně vzdálené od optické osy.

Z koeficientů  $K$  závislosti kulové vady na kvadrátu vzdálenosti paprsků od optické osy vidíme, že kulová vada narůstala rychleji pro menší vzdálenosti předmětu od čočky. U *směru 1* otočení čočky (clony za čočkou) rostla pro danou vzdálenost  $a$  předmětu od čočky rychleji než u *směru 2*. Koeficienty  $K$  vyšly pro všechna uspořádání záporné, což odpovídá očekávání.

### Měření vzdálenosti hlavních rovin čoček a výpočet indexu lomu skla

Určování vzdálenosti hlavních rovin čoček pomocí goniometru bylo zatíženo chybou vzniklou při určování místa, kdy se světelná štěrbinová pozorovaná dalekohledem nerozmazávala. Tuto chybu jsme stanovili na 0,3 mm nezávisle na tloušťce měřené čočky. Relativní chyba vzdálenosti hlavních rovin tenké čočky (17%) je tedy větší než pro tlustou čočku (5%).

Vypočtený index lomu skla  $n$  se v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou [4], která je  $n = 1,5$  až  $1,9$ .

## Závěr

Změřili jsme ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé čočky Besselovou metodou:  $f_B = (12,5 \pm 0,2) \text{ cm}$ , a metodou dvojího zvětšení:  $f_{Z_2} = (13,9 \pm 0,8) \text{ cm}$ . Měření Besselovou metodou považujeme za přesnější.

Změřili jsme kulovou vadu tenké ploskovypuklé čočky v obou směrech pro dvě vzdálenosti předmětu. Závislosti kulové vady na kvadrátu vzdálenosti paprsků procházejících čočkou od osy jsou vyneseny v *Grafu 1*. Pro jednotlivé případy jsme určili koeficienty  $K$  této závislosti:

$$a = 30 \text{ cm, směr 1: } K = (-2,6 \pm 0,3) \text{ dm}^{-1}$$

$$a = 30 \text{ cm, směr 2: } K = (-2,1 \pm 0,3) \text{ dm}^{-1}$$

$$a = 60 \text{ cm, směr 1: } K = (-1,8 \pm 0,3) \text{ dm}^{-1}$$

$$a = 60 \text{ cm, směr 2: } K = (-1,5 \pm 0,2) \text{ dm}^{-1}$$

Užitím goniometru jsme určili vzdálenost hlavních rovin tenké ploskovypuklé čočky:

$$\delta_1 = (3,6 \pm 0,6) \text{ mm, a tlusté ploskovypuklé čočky: } \delta_2 = (11,5 \pm 0,6) \text{ mm.}$$

Na fokometru jsme změřili optickou mohutnost tenké ploskovypuklé čočky:  $\varphi = (8 \pm 1) \text{ D}$ , a z ní vypočetli její ohniskovou vzdálenost:  $f = (13 \pm 2) \text{ cm}$ .

Ze známé tloušťky tlusté ploskovypuklé čočky a změřené vzdálenosti hlavních rovin jsme určili index lomu skla:  $n = 1,43 \pm 0,07$

## Seznam použité literatury

- [1] I. Pelant a kol.: Fyzikální praktikum III – Optika, MATFYZPRESS, Praha 2005
- [2] Údaje o optických součástkách umístěné v laboratoři Fyzikálního praktika III, 24. 4. 2013
- [3] J. English: Základy zpracování fyzikálních měření, MATFYZPRESS, Praha 2006
- [4] <http://www.converter.cz/tabulky/index-lomu.htm> (2. 5. 2013)

**20 bodů**