

1 Pracovní úkoly

1. Změřte závislost magnetometru na proudu protékajícím cívkou. Měření proveďte pro obě cívky a různé počty závitů (5 a 10).
2. Výsledky měření znázorněte graficky.
3. Diskutujte výsledky měření z hlediska platnosti Biot-Savartova zákona.
4. Změřte direkční moment vlákna metodou torzních kmitů.
5. Určete magnetický moment magnetu užívaného při měření (v Coulombových i Ampérových jednotkách).

2 Teoretická část

Vložíme-li magnetický dipól s magnetickým dipólovým momentem \mathbf{p} (v Coulombových jednotkách) do vnějšího magnetického pole o intenzitě \mathbf{H} , začne na dipól působit moment sil, jehož velikost je rovna [1]

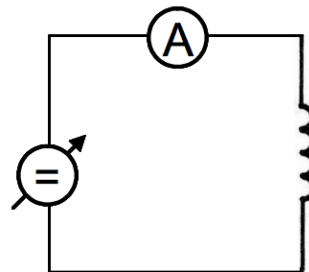
$$M = pH \sin \delta \quad (1)$$

kde δ značí úhel mezi vektory \mathbf{p} a \mathbf{H} .

Během měření použijeme malý permanentní magnet a umístíme ho do středu cívky kolmo na její osu. Podle Biot-Savartova zákona by velikost intenzity pole ve středu cívky s N závitů a poloměrem r měla být rovna

$$H = \frac{NI}{2r} \quad (2)$$

kde I značí proud protékající cívkou a vektor \mathbf{H} pole cívky míří ve směru její osy. V takovém uspořádání δ bude přibližně rovna $\pi/2$ během celého měření a můžeme tak položit $\sin \delta \approx 1$. Obvod cívky bude zapojen podle obrázku 1.



Obrázek 1: Zapojení obvodu cívky

Magnet bude zavěšen na napjatém vlákně s direkčním momentem D , který bude při zkroucení působit momentem sil $M_d = D\alpha$, kde α značí úhel, o který bylo vlákno zkrouceno. V rovnováze pak bude platit

$$\alpha = \frac{Np}{2rD} I \quad (3)$$

Pro měření α použijeme metodu zrcátka a škály. Pokud známe vzdálenost škály od zrcátka upevněného na vlákně magnetometru l a změříme vzdálenost Δx , o který se světelný signál na škále posune, můžeme pro malé úhly psát

$$\alpha \approx \frac{\Delta x}{2l} \quad (4)$$

Direkční moment vlákna D můžeme určit, pokud změříme periodu torzních kmitů T tělesa o známém momentu setrvačnosti J podle vzorce

$$D = 4\pi^2 \frac{J}{T^2} \quad (5)$$

Změříme-li závislost $\Delta x(I)$, která je podle (3) a (4) lineární $\Delta x = K \cdot I$, můžeme vypočítat velikost magnetického dipólového momentu dle výrazu

$$p = \frac{rDK}{Nl} \quad (6)$$

Označíme-li \mathbf{m} magnetický moment v Ampérových jednotkách, tak pro jeho velikost bude platit [2]

$$m = \frac{p}{\mu_0} \quad (7)$$

kde μ_0 značí permeabilitu vakua.

3 Výsledky měření

Pro určení direkčního momentu vlákna D jsem měřil periodu torzních kmitů T mosazné tyče s kruhovým průřezem, která na vlákno byla upevněna tak, že její osa procházející středem jejích podstav byla kolmá k napjatému vláknu.

Podle přiložených materiálů byla délka tyče 24 cm, její hmotnost 56,6 g, průměr podstavy 6 mm a její moment setrvačnosti v daném uspořádání $J = 2,72 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Moment setrvačnosti ostatních částí magnetometru byl zanedbán. Jelikož chyba J nebyla udána, počítám s hodnotou $\sigma_J = 0,005 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Pro větší přesnost jsem vždy měřil 40 period kmitů. K měření času byly použity stopky s přesností 0,01 s. Naměřené hodnoty jsou uvedené v tabulce 1. Celkově jsem provedl $n = 5$ měření a chyba jednoho měření je tak rovna [3]

$$\sigma_{40T} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (40T_i - \overline{40T})^2 + \sigma_P^2} \quad (8)$$

kde σ_P zahrnuje jak chybu použitých stopek, tak mojí reakční dobu. Počítám s hodnotou $\sigma_P = 0,2 \text{ s}$. Pro výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru $\overline{40T}$ pak platí

$$\sigma_{\overline{40T}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_{40T} \quad (9)$$

Perioda jednoho kmitu je rovna $\overline{T} = \overline{40T}/40$ a její chyba $\sigma_{\overline{T}} = \sigma_{\overline{40T}}/40$. Určil jsem tak periodu torzních kmitů tyče na hodnotu $T = (4,031 \pm 0,003) \text{ s}$.

Tabulka 1: Periody torzních kmitů tyče

$\frac{40T}{s}$
161,09
161,32
161,22
161,28
161,37

Direkční moment vlákna byl vypočítán podle (5) a jeho chyba je podle zákona šíření chyb rovna

$$\sigma_D = D \sqrt{\left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_J}{J}\right)^2} \quad (10)$$

po dosazení vyšlo $D = (6,61 \pm 0,01) \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$.

Měřil jsem magnetický moment magnetu II.

Průměry dvou použitých cívek byly změřeny posuvným měřidlem s nejmenším dílkem $0,1 \text{ cm}$. Průměr byl pro každou cívku změřen pět krát, vždy na jiném místě. Výsledky měření ukazuje tabulka 2. Chyba jednoho měření je opět rovna

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 + \sigma_P^2} \quad (11)$$

a jelikož tloušťka drátu byla řádově $0,1 \text{ cm}$ a cívky nebyly perfektně kruhové, tak počítám s chybou $\sigma_P = 0,1 \text{ cm}$. Pro chybu aritmetického průměru opět platí

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_d \quad (12)$$

a pro poloměry $\bar{r} = \bar{d}/2$, chybu poloměru $\sigma_{\bar{r}} = \sigma_{\bar{d}}/2$. Určil jsem tak poloměr menší cívky na hodnotu $r_1 = (10,16 \pm 0,03) \text{ cm}$ a poloměr větší cívky na hodnotu $r_2 = (20,14 \pm 0,08) \text{ cm}$.

Tabulka 2: Průměry cívek

$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$
20,3	39,9
20,2	40,5
20,4	40,0
20,3	40,3
20,4	40,7

Vzdálenost škály od zrcátka jsem změřil také posuvným měřidlem s nejmenším dílkem $0,1 \text{ cm}$, ovšem vzhledem k tomu, že zrcátko a škála nebyly ve stejné vodorovné rovině a musel jsem tak měřit pod úhlem, předpokládám, že přesnost toho měření bude větší. Dostanu tedy $l = (130,6 \pm 0,5) \text{ cm}$.

Proud procházející cívkou byl měřen analogovým ampérmetrem s třídou přesnosti $\delta_{TP} = 0,2$ a rozsahy $R = 0,75 \text{ A}, 1,5 \text{ A}, 3 \text{ A}, 7,5 \text{ A}$. Vždy jsem měřil na nejmenším možném rozsahu. Pro chybu měření proudu platí [3]

$$\sigma_I = \frac{\delta_{TP} R}{100} \quad (13)$$

Pro měření výchyly magnetometru bylo použito laserové ukazovátka. Světelný paprsek z laseru se odrazil od zrcátka na magnetometru a odražený paprsek osvětloval stupnici s nejmenším dílkem $0,1 \text{ cm}$. Když neprocházel žádný proud, paprsek ukazoval na polohu x_0 . Po zapnutí proudu se na stupnici vychýlil a ukazoval na stupnici hodnotu x_i , vychýlil se tak o $\Delta x = x_0 - x_i$ (byl zvolen směr proudu cívkou tak, aby se při zapnutí proudu hodnota x_i snižovala a není tak zapotřebí počítat s absolutní hodnotou). Jelikož laserový svazek byl řádově několik milimetrů tlustý a při každé změně proudu docházelo k malým tlumeným oscilacím kolem rovnovážné polohy, počítám s chybou $\sigma_{x_i} = 0,1 \text{ cm}$. Pro chybu rozdílu $\Delta x = x_0 - x_i$ tak platí $\sigma_{\Delta x} = \sqrt{2} \sigma_{x_i}$ a je pro všechny měření stejná. Po zaokrouhlení vychází $\sigma_{\Delta x} = 0,1 \text{ cm}$.

Výchylce Δx odpovídá úhel α , který můžu určit podle (4) a jeho chybu

$$\sigma_\alpha = \alpha \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \quad (14)$$

Chyba určení α je tedy opět pro všechny měření stejná a rovna $\sigma_\alpha = 0,03^\circ$.

Změřené závislosti výchyly magnetometru na proudu procházejícím cívkou jsou vidět v tabulce 3. Celkově jsem změřil čtyři závislosti pro různé poloměry cívek a různý počet závitů.

Tabulka 3: Změřené závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou

$\frac{I}{A}$	$\frac{\sigma_I}{A}$	malá cívka				velká cívka			
		$N = 5$		$N = 10$		$N = 5$		$N = 10$	
		$\frac{\Delta x_1}{cm}$	$\frac{\alpha_1}{deg}$	$\frac{\Delta x_2}{cm}$	$\frac{\alpha_2}{deg}$	$\frac{\Delta x_3}{cm}$	$\frac{\alpha_3}{deg}$	$\frac{\Delta x_4}{cm}$	$\frac{\alpha_4}{deg}$
0,500	0,002	1,1	0,24	2,1	0,46	0,6	0,13	1,0	0,22
1,000	0,003	2,2	0,48	4,3	0,94	1,1	0,24	2,1	0,46
1,500	0,003	3,3	0,72	6,5	1,43	1,6	0,35	3,2	0,70
2,000	0,006	4,4	0,97	8,6	1,89	2,2	0,48	4,4	0,97
2,500	0,006	5,5	1,21	10,8	2,37	2,7	0,59	5,5	1,21
3,000	0,006	6,6	1,45	13,0	2,85	3,2	0,70	6,6	1,45
3,50	0,02	7,8	1,71	15,2	3,33	3,8	0,83	7,6	1,67
4,00	0,02	8,9	1,95	17,2	3,77	4,4	0,97	8,7	1,91

Naměřené hodnoty byly proloženy přímkou pomocí lineární regrese. Pro lineární regresi jsem použil závislost $\Delta x(I)$ a data jsem proložil přímkou ve tvaru $\Delta x = K \cdot I$, kde parametr K byl určen standardně podle vzorců lineární regrese [3].

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i I_i}{\sum_{i=1}^n I_i^2} \quad \sigma_K = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n I_i^2}} \sigma_{\Delta x_i} \quad (15)$$

Vypočítané parametry K jsou uvedeny v tabulce 4 a naměřené hodnoty společně s proloženými křivkami zobrazuje graf 1.

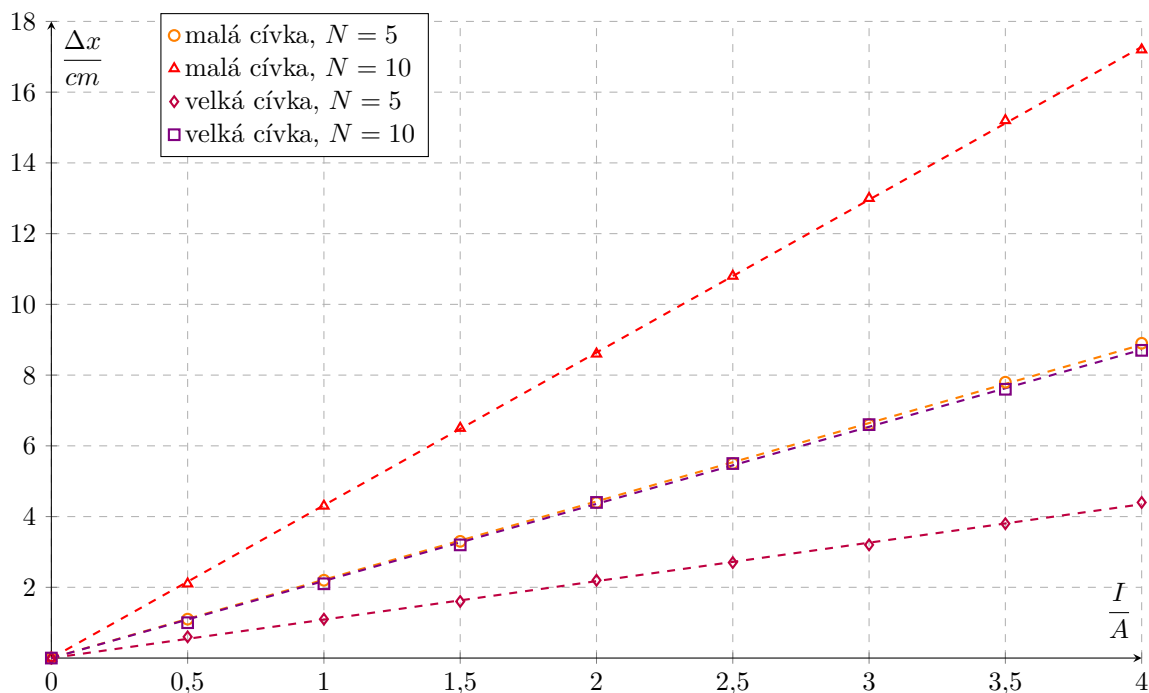
Z naměřených hodnot mohou vypočítat magnetický moment p použitého magnetu v Coulombových jednotkách podle vzorce (6) a chybu určit ze zákona šíření chyb

$$\sigma_p = p \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \quad (16)$$

Pro magnetický moment v Ampérových jednotkách m platí jednoduše vzorec (7) a pro jeho chybu $\sigma_m = \sigma_p / \mu_0$, kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$. [4] Vypočítané hodnoty magnetických momentů jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 4: Výsledky lineární regrese

	N	$\frac{K}{\text{cm} \cdot \text{A}^{-1}}$	$\frac{\sigma_K}{\text{cm} \cdot \text{A}^{-1}}$
malá cívka	5	2,21	0,02
	10	4,32	0,02
velká cívka	5	1,09	0,02
	10	2,18	0,02



Graf 1: Závislost výchylky magnetometru na proudu cívkou pro různé poloměry a počty závitů

Tabulka 5: Vypočítané magnetické momenty

	N	$\frac{p}{10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{m}}$	$\frac{\sigma_p}{10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{m}}$	$\frac{m}{\text{A} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{\sigma_m}{\text{A} \cdot \text{m}^2}$
malá cívka	5	2,28	0,02	0,181	0,002
	10	2,22	0,01	0,177	0,001
velká cívka	5	2,22	0,04	0,176	0,003
	10	2,18	0,02	0,177	0,002

Z takto vypočítaných hodnot p a m byl vypočítán průměr a chyba výsledku podle vzorce

$$\sigma_p = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{p_i}^2} \quad \sigma_m = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{m_i}^2} \quad (17)$$

Nakonec jsem takto určil magnetický moment magnetu v Coulombových jednotkách na hodnotu $p = (2,23 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{m}$ a v Ampérových jednotkách na hodnotu $m = (0,178 \pm 0,001) \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

4 Diskuse

Při výpočtu direkčního momentu vlákna byl zanedbán moment setrvačnosti všech částí magnetometru a počítal jsem výhradně s momentem setrvačnosti tyče. Předpokládám však, že moment setrvačnosti ostatních částí je minimálně sto krát menší a jejich zanedbání tak do měření nevnáší žádnou značnou systematickou chybu. Při měření period byla největší chyba způsobena mojí reakční dobou. Toto měření by tedy šlo zpřesnit, pokud bychom k měření period použili metodu, která nezávisí na experimentátorovi, tedy např. záznam obrazu počítačem.

Při měření bylo použito několik zjednodušujících předpokladů. Jednotlivé předpoklady by měření moc neovlivnily, ale je možné, že dohromady vnáší do měření nějakou systematickou chybu a pro zlepšení přesnosti by bylo třeba aspoň některé z nich odstranit.

Jedním z takových předpokladů byl tvar cívek. Jak je vidět z hodnot v tabulce 2, cívky nebyly perfektně kruhové, především větší cívka se v některých směrech značně liší v průměru.

Dalším zjednodušením bylo zanedbání změny úhlu δ v rovnici (1) a použití rovnice (4) pro určení α z hodnot odečítaných na stupnici. Jak je vidět z hodnot v tabulce 3, úhel α nabývá maximální hodnoty $3,7^\circ$ a o tento úhel se také maximálně liší δ od úhlu 90° . Použité zjednodušení bylo tedy oprávněné.

Další možný faktor, který mohl měření ovlivnit, bylo sestavení samotné aparatury. Magnet nemohl být umístěn přesně uprostřed cívky, neboť vlákno, na kterém byl připevněn nemohlo procházet skrze cívku. Magnet tak byl umístěn kousek od středu cívky. Samotná cívka měla konečnou délku, řádově tak 1 cm a to ve výrazu (2) nebylo zahrnuto. Dále jsem potřeboval, aby byla osa magnetu kolmá na osu cívky a stupnice přibližně kolmá na dopadající paprsek, a jelikož jsem cívku připevňoval ručně, je možné, že nebyla umístěna zcela přesně, stejně tak stupnice mohla svírat úhel trochu odlišný od 90° s dopadajícím paprskem.

Změřené závislosti výchylky magnetometru na proudu procházejícím cívku, zobrazené v grafu 1, jsou lineární a odpovídají tak teoretickým předpokladům. Z důsledku Biot-Savartova zákona (2) plyne, že závislost pro malou cívku s 5 závitů by měla být přibližně stejná jako pro velkou cívku s 10 závitů (velká cívka má přibližně dvojnásobný poloměr), což odpovídá změřeným závislostem. Jak je vidět z hodnot v tabulce 4, tak také v rámci chyby měření platí, že pokud zvětšíme počet závitů dvakrát, zvětší se i směrnice přímků $\Delta x = K \cdot I$ dvakrát. Stejně tak pokud zvětšíme poloměr cívky o dvojnásobek, směrnice klesne na polovinu. Ověřil jsem tak v rámci chyby měření a všech použitých předpokladů důsledek Biot-Savartova zákona vyjádřený rovnicí (2).

5 Závěr

Direkční moment vlákna magnetometru byl určen na hodnotu $D = (6,61 \pm 0,01) \cdot 10^{-4} Nm$. Pro čtyři různé cívky pak byla proměřena závislost výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívku a byla tak ověřena platnost Biot-Savartova zákona v daném uspořádání. Magnetický moment použitého magnetu v Coulombových jednotkách byl určen na hodnotu $p = (2,23 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} Wb \cdot m$ a v Ampérových jednotkách na hodnotu $m = (0,178 \pm 0,001) A \cdot m^2$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Měření s torzním magnetometrem. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 10-11-2018]. https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_219.pdf
- [2] Magnetický moment. Wikipedia [online]. [cit. 10-11-2018]. https://cs.wikipedia.org/wiki/Magnetick%C3%BD_moment
- [3] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYYPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.
- [4] Permeability (electromagnetism). Wikipedia [online]. [cit. 10-11-2018]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_\(electromagnetism\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_(electromagnetism))