

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM ...

Úloha č. ....

Název: .....

Pracoval: ..... stud. skup. .... dne .....

Odevzdal dne: .....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval: ..... dne .....

## Pracovní úkoly

1. Sestavte obvod podle obr. 1 a změřte pro obvod v periodickém stavu závislost doby kmitu  $T$  na velikosti zařazené kapacity ( $C = 0.5 - 10 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \Omega$ ). Výsledky měření zpracujte graficky a vyhodnoťte velikost indukčnosti  $L$  zařazené v obvodu.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačních odporů pro několik hodnot kapacit zařazeného kondenzátoru ( $1 - 10 \mu\text{F}$ ). I v tomto případě stanovte velikost indukčnosti  $L$ .
3. Změřte závislost relaxační doby RC obvodu na velikosti odporu a na velikosti kapacity v obvodu. Výsledky měření zpracujte graficky a porovnejte s teoretickými.

## 1 Teoretická část

### 1.1 Tlumené kmity

V sériovém RLC obvodu na obr. 1 je podle II. Kirchhofova zákona součet napětí na jednotlivých prvcích obvodu

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = \varepsilon, \quad (1)$$

kde  $L$  je indukčnost cívky obvodu,  $R$  odpor rezistoru,  $C$  kapacita kondenzátoru,  $I$  okamžitý procházející proud,  $t$  čas,  $Q$  náboj na kondenzátoru a  $\varepsilon$  napětí zdroje. V případě, že na počátku ( $t = 0$ ) nabijeme kondenzátor zdrojem stejnosměrného napětí  $\varepsilon$ , který vzápětí odpojíme přes přepínač a kondenzátor necháme vybíjet (vše je patrné z obr. 1), pak derivací (1) podle času dostáváme

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \quad (2)$$

což je standartní diferenciální rovnice tlumených kmitů, konkrétně tlumených kmitů  $I(t)$ . Řešení (2) dostáváme pro náš obvod a označení  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$  následující, viz. [1]:

1. Je-li  $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ , tzv. periodický stav, proud kmitá s periodou  $T$ , jeho amplituda se ale postupně zmenšuje:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin t\omega. \quad (3)$$

2. Je-li  $\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ , tzv. mezní aperiodický stav při kterém  $I(t)$  dosáhne maximální hodnoty a poté klesá k nule, ale právě se už nezmění jeho směr (na  $-I$ ), doba kmitu je teoreticky nekonečná:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}. \quad (4)$$

3. Je-li  $\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ , tzv. aperiodický stav kdy proud rychle dosáhne maxima a pak pomaleji klesá k nule:

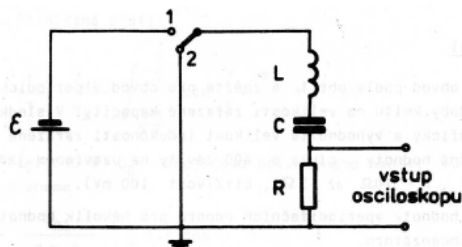
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh t\omega. \quad (5)$$

Veličina  $\omega$  v periodickém stavu odpovídá kruhové frekvenci kmitů. Pro periodu  $T$  tak platí

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}, \quad (6)$$

která je pro  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$  prakticky konstantní a přibližně rovna periodě netlumených kmitů

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (7)$$



Obr. 1: Schéma měřeného RLC obvodu.

## 1.2 Aperiodizační odpor

V mezně aperiodickém stavu je tlumení v obvodu právě tak velké, že proud  $I(t)$  (viz. výše) po dosažení svého maxima rychle klesá k nule, ale nikdy nepřekmitne v opačný směr. Hodnotu odporu  $R$ , při které k tomuto meznímu jevu dochází, nazýváme *aperiodizační odpor*  $R_{ap}$ :

$$R_{ap} = 2\sqrt{L/C}. \quad (8)$$

## 1.3 RC obvod

Při odstranění cívky (indukčnosti  $L$ ) z obvodu (obr. 1) se proud mění úměrně funkci  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ , kde o  $\tau$  mluvíme jako o *relaxační době* obvodu a platí

$$\tau = RC. \quad (9)$$

Celý pozorovaný jev je vlastně jen vybíjení kondenzátoru.

## 1.4 Měření

Měření probíhá v zapojení podle obr. 1, kde osciloskop je nahrazen napět. převodníkem spojeným s počítačem, který měřené hodnoty napětí na odporu  $U = RI$  zpracovává programem *ISES*. Ten s vybranou vzorkovací frekvencí vůči vlastní časové základně a po zvolenou dobu zaznamenává hodnoty  $U$  a vykresluje jejich časovou závislost do grafu. Z něj pak (a z konkrétních hodnot) získáváme potřebné informace.

Nejprve nabijeme kondenzátor v obvodu napětím připojeného zdroje  $\varepsilon$ , jenž posléze pomocí přepínače odpojíme a kondenzátor za současného snímání napětí programem *ISES* necháme přes odpor vybíjet.

## 1.5 Použité přístroje a pomůcky

*ISES* Chyby samotného programu a snímání jsou prakticky zanedbatelné, a to hlavně vůči chybě odečítání hodnot z mřížky zobrazeného grafu samotného experimentátora, která je dána pouze rozlišením, tedy rozlišením převodníku a nastavenou dobou měření.

odporová dekáda ( $\pm 0.5\%$  z nastavení), kapacitní dekáda, cívka, zdroj stejnosměrného napětí, přepínač

# 2 Výsledky měření

## 2.1 Zpracování

Není-li uvedeno jinak, chyby nepřímým měřených veličin ( $f$ ) počítám podle:

$$\sigma_{f(x_i)} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (10)$$

## 2.2 Doba $T$ kmitů obvodu v periodickém stavu

V obvodu podle obr. 1 zapojíme  $R = 20 \Omega$  a kapacitu  $C$  měníme v intervalu  $0.10-5.00 \mu\text{F}$ . Periodu  $T$  kmitu odečítáme přímo z grafu sestaveného programem *ISES*, např. pomocí fce `rozdíl`. Kvůli minimalizaci chyby určíme vždy dobu  $T_n$   $n$  kmitů, podle zvoleného časového rozlišení (délka měření programem) a charakteru zobrazené závislosti. Odchylku experimentátora odhaduji na max. 1 % z rozsahu konkrétní časové osy (0.01-0.08 s). Pro

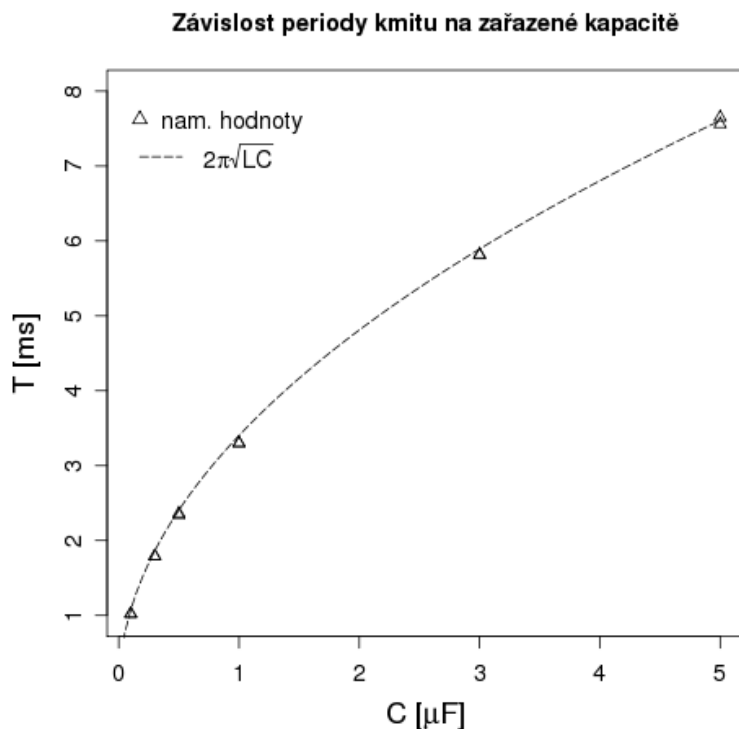
větší jistotu a kontrolu replikovatelnosti při identickém nastavení jsem pro všechny parametry provedl dvě měření. Výsledky najdete v tabulce 1 a průběh závislosti na obr. 2.

Předpokládám indukčnost použité reálné cívky v řádu jednotek či spíše desetin henry, její odpor  $r$  pak max. v jednotkách ohmů (to by mohlo odpovídat běžným cívкам vyskytujícím se v praxi). Vzhledem k zapojenému odporu  $R = 20 \Omega$  vychází člen  $(R/2L)^2$  v řádu  $1 - 10^4 \text{ s}^{-2}$ . Při zvolených kapacitách v jednotkách  $\mu\text{F}$  a méně se člen  $1/LC$  pohybuje v řádech  $10^6 \text{ s}^{-2}$  či vyšších (přičemž oba členy nemohou být zároveň první maximálního a druhý minimálního řádu při předpokládaném  $L$  a  $r$ , neboť v nich obou vystupuje  $L$ ). Mohu tedy uvažovat  $(R/2L)^2 \ll 1/LC$  a použít vztah (7). Samotnou přibližnou indukčnost cívky získám z koeficientu úměrnosti lineární regrese pro  $T^2 \sim C$ , vzhledem k předchozímu odchylku raději nadhodnocuji:

$$L = (0.29 \pm 0.01) \text{ H.}$$

$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	$R$ [ $\Omega$ ]	$T_n$ [ms]	$n$	$T$ [ms]
0.10	20	6.1	6	$1.02 \pm 0.02$
0.10	20	6.1	6	$1.02 \pm 0.02$
0.30	20	9.0	5	$1.79 \pm 0.02$
0.30	20	9.0	5	$1.79 \pm 0.02$
0.50	20	18.7	8	$2.34 \pm 0.03$
0.50	20	18.9	8	$2.36 \pm 0.03$
1.00	20	36.3	11	$3.30 \pm 0.05$
1.00	20	36.3	11	$3.30 \pm 0.05$
3.00	20	64.1	11	$5.82 \pm 0.07$
3.00	20	63.9	11	$5.81 \pm 0.07$
5.00	20	76.5	10	$7.65 \pm 0.08$
5.00	20	75.6	10	$7.56 \pm 0.08$

Tabulka 1: Závislost periody  $T_n$   $n$  kmitů RLC obvodu při zapojení odporu  $R$  a kapacity  $C$ , dopočtená perioda kmitu  $T$ . Rozsah časové osy (doba měření) v prg. ISES byl volen postupně 10,10,10,10,20,20,50,50,80,80,80,80 ms.



Obr. 2: Graf závislosti doby kmitu  $T$  na zařazené kapacitě při  $R = 20 \Omega$ . Proloženo teoretickou závislostí netlumených kmitů při dopočtené přibl. indukčnosti  $L$ .

## 2.3 Aperiodizační odpor $R_{ap}$

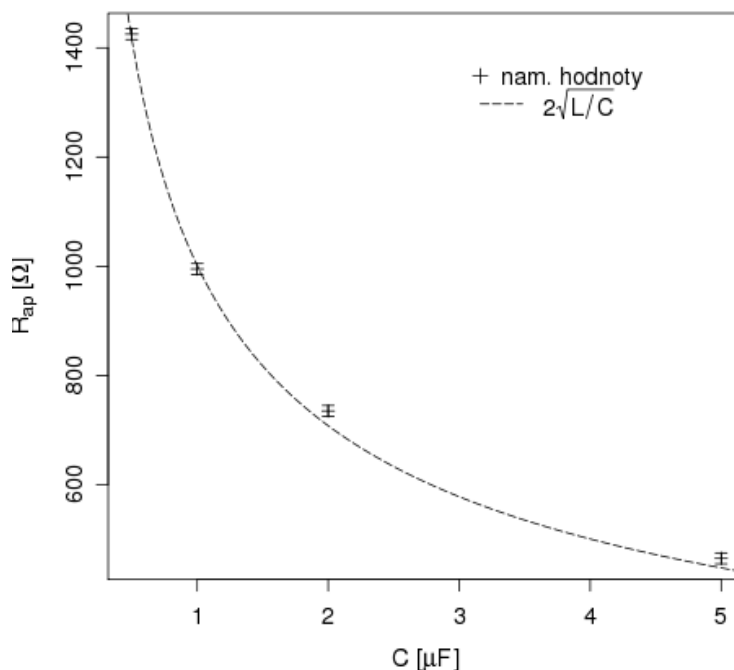
Velikost aperiodizačních odporů pro dané kapacity v RLC obvodu jsem hledal metodou půlení intervalů. Našel jsem velikost odporu, při které zobrazená křivka v programu *ISES* (tedy i proud resp. napětí v obvodu) projde nulovou hladinou ( $I$  resp.  $U$  je nulové) právě jednou, a další, při které naopak nepřekmitne ani jednou. Poté jsem zkoumal hodnotu odporu uprostřed tohoto intervalu a podle pozorování jsem interval zúžil o jednu nebo o druhou část. Přitom zjemňuji rozlišení, abych rozeznal i nepatrné překmity od šumu signálu z obvodu. Takto jsem byl schopen (vcelku naprosto jistě, s rezervou) určit aper. odpor v rozmezí  $10 \Omega$ . Výslednou hodnotu jsem tedy vzal ze středu intervalu s chybou půlka intervalu ( $5 \Omega$ ). Nicméně jelikož zapojený odpor  $R$  z odporové dekády je ještě doplněn o odpor reálné cívky  $r$  (odhadnutý jednotkami  $\Omega$ ), zvýšil jsem konečnou odchylku na právě velikost int.  $10 \Omega$ . Výsledky v tabulce 2 nebo v grafu na obr. 3 jsem pak použil k zjištění indukčnosti (tentokrát označím jako  $L_{ap}$ ) z lineární regrese závislosti  $R_{ap}^2$  na  $1/C$  podle (8), opět s lehce nadhodnocenou chybou. Tuto pak používám k proložení grafu na obr. 3 teoretickou závislostí:

$$L_{ap} = (0.25 \pm 0.01) \text{ H.}$$

$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	0.50	1.00	2.00	5.00
$R_{ap}$ [ $\Omega$ ]	$1425 \pm 10$	$995 \pm 10$	$735 \pm 10$	$465 \pm 10$

Tabulka 2: Nalezené velikosti aperiodizačních odporů  $R_{ap}$  obvodu pro dané kapacity  $C$ .

**Závislost velikosti aperiodizačních odporů na zařazené kapacitě**



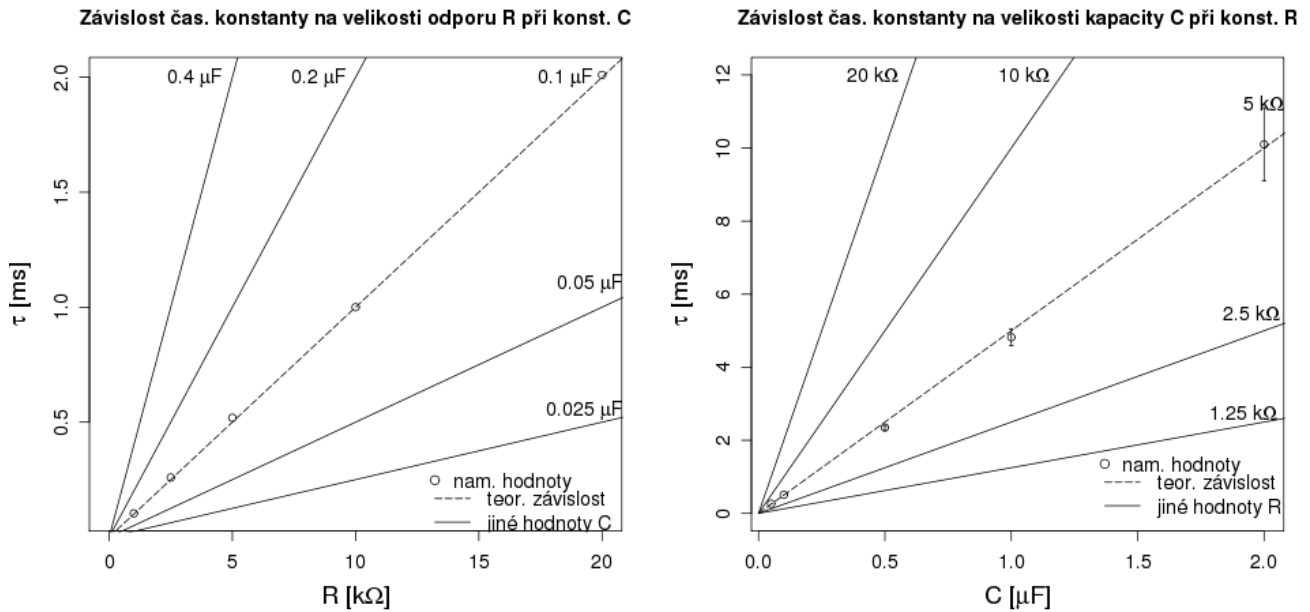
Obr. 3: Graf závislosti velikosti aperiodizačního odporu na kapacitě RLC obvodu.

## 2.4 RC obvod, vybíjení kondenzátoru

Relaxační dobu  $\tau$  RC obvodu jsem opět zjišťoval přímo v programu *ISES*. Z vykreslené vybíjecí křivky kondenzátoru jsem vybral několik konkrétních bodů (10 – 20), které jsem nechal v souladu s teorií proložit exponenciální křivkou obecného tvaru  $ae^{bx+c}$ . V našem případě koeficient  $b$  reprezentuje výraz  $-1/\tau$ . Stačí tedy z výsledků získaných v *ISES* vyjádřit námi hledanou relaxační dobu  $\tau$ , kterou vzápětí porovnáme s teoreticky získanou  $\tau_{teor}$  podle (9). Abych otestoval přesnost, s jakou získávám koef.  $b$ , provedl jsem některá měření vícekrát, což mi podá informaci o chybě vzniklé zpracováním dat resp. replikovatelností postupu. Opětovně naměřené hodnoty  $b$  se lišily v řádu jednotek  $\text{s}^{-1}$  (konkrétně asi  $7 - 14 \text{ s}^{-1}$ ), rozhodl jsem se proto jako chybu  $b$  brát stálých  $10 \text{ s}^{-1}$  a nikoli nějakou procentuální část (relativní) ze získaných hodnot. Výsledky viz. tabulka 3 a grafy na obr. 4.

$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	$R$ [ $\text{k}\Omega$ ]	$(-b)$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$\tau$ [ms]	$\tau_{teor}$ [ms]
0.10	20.0	497	$2.01 \pm 0.04$	2.00
0.10	10.0	1002	$1.00 \pm 0.01$	1.00
0.10	5.0	1928	$0.519 \pm 0.003$	0.50
0.10	2.5	3864	$0.259 \pm 0.001$	0.25
0.10	1.0	9695	$0.1031 \pm 0.0001$	0.10
0.05	5	3778	$0.2647 \pm 0.0007$	0.25
0.10	5	1967	$0.508 \pm 0.002$	0.50
0.50	5	426	$2.35 \pm 0.06$	2.50
1.00	5	208	$4.82 \pm 0.23$	5.00
2.00	5	99	$10.1 \pm 1.0$	10.00

Tabulka 3: Tabulka získaných hodnot koeficientu  $b$  a dopočtené relax. doby  $\tau$  podle parametrů RC obvodu  $R$  a  $C$ , teoretická relax. doba  $\tau_{teor} = RC$ .



Obr. 4: Grafy závislostí relaxačních dob RC obvodu na jeho parametrech při stálé kapacitě (vlevo) resp. odporu (vpravo) a jejich porovnání se závislostmi při jiných parametrech.

### 3 Diskuse výsledků

V grafech, ve kterých nejsou vyznačeny odchylky nam. veličin, jsou tyto natolik malé, že jejich zobrazení by nebylo v grafech patrné.

Jelikož proložení grafu na obr. 2 teoretickou závislostí danou nalezenou velikostí indukčnosti cívky  $L$  celkem dobře odpovídá naměřeným hodnotám, troufám si tvrdit, že na základě předpokladu  $(R/2L)^2 \ll 1/LC$  k vyjádření  $L$  použitý vztah (7) nijak zásadně získaný výsledek neovlivnil (to jistí i nadhodnocená chyba). Naopak hodnota  $L_{ap}$  z naměřených aperiodizačních odporů  $R_{ap}$  se vzhledem k malému počtu naměřených hodnot a větší odchylce způsobené např. tím, že odpor reálné cívky pro menší ap. odpory (ve stovkách ohmů) není vůči nim úplně zanedbatelný, skutečnosti přibližuje nejspíš méně. Konečně to je patrné i z rocházení teoretické závislosti (dané  $L_{ap}$ ) a naměřených hodnot  $R_{ap}$  pro menší odpory v grafu na obr. 3.

Zatímco na odpor cívky je během celého měření neustále brán zřetel (resp. je diskutován), reálné chování kondenzátoru do úvahy bráno není. To je dáno tím, že reálné kondenzátory se daleko více než právě cívky svými vlastnostmi blíží ideálním reprezentacím. Proto je reálné chování kondenzátoru opomíjeno, ačkoli by mohla být zanedbatelná velikost proudu procházející samotným kondenzátorem(y) testována např. miliampérmetrem. Odchylky tohoto typu ale s největší pravděpodobností (roz. pokud je kondenzátor relativně kvalitní a v dobrém stavu) nemají na výsledky valný dopad. Naopak rel. chyba odporové dekády 0.5 % se stává patrnější (hlavně při měření

ap. odporů), ovšem stále se pohybuje pod hranicí odhadované chyby, která je volena s dostatečnou rezervou, viz. tab. 2.

Přesnost s jakou jsem získal data z programu *ISES* byla pro měření periody  $T$  a ap. odporů dána přímo hlavně mou schopností navolit vhodné nastavení pro měření a odečítat ze sestrojených grafů (ať už dostatečný počet period, resp. (ne)překmitnutí křivky přes nulovou osu či odlišení od šumu signálu). To většinou souviselo s rozlišením časové osy. Naopak během proměření RC obvodu, jak je naznačeno ve výsledcích, chyba získaného koef.  $b$  (odhadnutá jako  $10 \text{ s}^{-1}$  tak, jak ukazovala kontrolní proměření identických parametrů) souvisí nejspíše s použitým rozlišením převodníku, tedy rozsahem napěťové osy. Případné změny v charakteristice obvodu, způsobené např. změnou teploty součástek, nejsou příliš pravděpodobné, zvláště když proud obvodem většinu času vůbec neprochází. Naměřené hodnoty relax. doby  $\tau$  se však velice dobře shodují s teoretickými s relativním rozdílem v řádu procent.

## 4 Závěr

Naměřena byla závislost periody tlumených kmitů  $T$  v sériovém RLC obvodu na zařazené kapacitě, viz. tab. 1 či graf na obr. 2, a zjištěna indukčnost zapojené cívky  $L$ :

$$L = (0.29 \pm 0.01) \text{ H.}$$

Stanoveny byly hodnoty aperiodizačních odporů  $R_{ap}$  v obvodu pro dané velikosti kapacit  $C$ , ilustruje tabulka 2 a graf na obr. 3, a ze získaných hodnot opět vyjádřena indukčnost cívky  $L_{ap}$ :

$$L_{ap} = (0.25 \pm 0.01) \text{ H.}$$

V sériovém RC obvodu byla proměřena závislost jeho relaxační doby  $\tau$  na parametrech  $R$ ,  $C$  a porovnána s teoretickými hodnotami podle vztahu (9). Výsledky k nalezení v tabulce 3 a v grafech na obr. 4.

Výsledky byly zpracovány a grafy sestrojeny pomocí programu *R 2.10.1*.

## Použitá literatura

- [1] Studijní text, PII - XVIII Přechodové jevy v sériovém RLC obvodu, <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>
- [2] English J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření, 1999, <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp>