

Pracovní úkoly

1. Pro sériový RLC obvod v periodickém stavu změřte závislost doby kmitu T na velikosti zařazené kapacity alespoň pro pět hodnot z intervalu ($C = 0,1 - 10 \mu\text{F}$, $R = 20 \Omega$). Výsledky měření zpracujte graficky a vyhodnoťte velikost indukčnosti L zařazené v obvodu.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačních odporů pro pět hodnot kapacit zařazeného kondenzátoru. I v tomto případě stanovte velikost indukčnosti L .
3. Změřte závislost relaxační doby sériového obvodu RC na velikosti odporu a na velikosti kapacity v obvodu. Výsledky měření zpracujte graficky a porovnejte s teoretickými.

Teoretická část

Průběh proudu v sériovém RLC obvodu (obrázek 1) je obecně popsán diferenciální rovnicí vycházející z II. Kirchhoffova zákona

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad , \quad (1)$$

kde L je indukčnost cívky, R odpor rezistoru a C kapacita kondenzátoru, I velikost proudu v obvodu a ε je připojené napětí.¹

Pokud obvod připojíme ke zdroji, dojde k nabití kondenzátoru a odporem R nebude protékat žádný proud. Zkratováním obvodu (přepnutím spínače do polohy -) v čase $t = 0$ (a tedy změnou ε z hodnoty napětí na zdroji na nulu) začne docházet k vybíjení kondenzátoru a řešení rovnice (1) můžeme v tomto případě klasifikovat podle vztahů mezi R , L a C následovně:

- a) Tlumené periodické řešení dostáváme za podmínky $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, závislost proudu na čase je pak $I(t) = (\varepsilon/BL) \exp(-At) \sin(Bt)$, kde $A = R/2L$ a $B^2 = 1/LC - R^2/4L^2$. Veličina B odpovídá kruhové frekvenci kmitů, pro periodu v tomto řešení tedy platí

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (2)$$

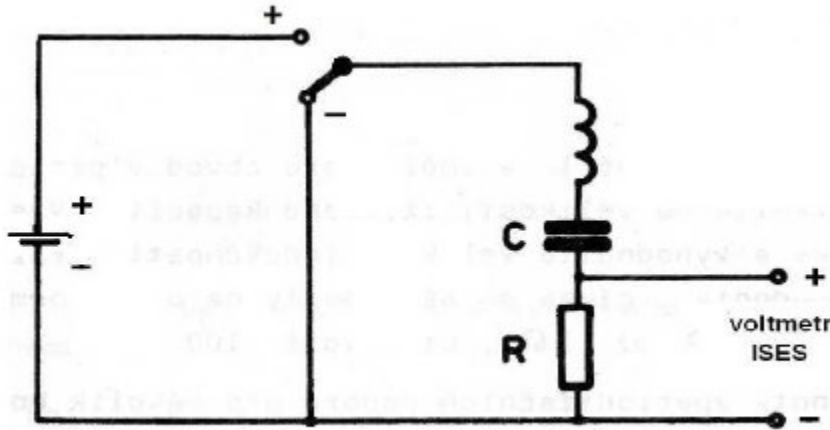
Pokud je $1/LC \gg R^2/L^2$, nemění se perioda vlivem tlumení a je přibližně rovna periodě netlumených kmitů.²

- b) Mezně aperiodické řešení dostáváme při podmínce $A^2 = R^2/4L^2 = 1/LC$. S časem nedochází ke změně směru proudu, mění se pouze jeho velikost a platí vztah $I(t) = (\varepsilon/L) t \exp(-At)$.¹
- c) Pro $A^2 = R^2/4L^2 > 1/LC$ mluvíme o aperiodickém řešení, proud dosahuje svého maxima rychleji a k nulové hodnotě klesá pomaleji. Časový průběh proudu popisuje vztah $I(t) = (\varepsilon/BL) \exp(-At) \sinh(Bt)$.¹

(18) Přechodové jevy v RLC obvodu

Při zvyšování tlumení v periodickém řešení se hodnota R blíží k mezní hodnotě aperiodizačního odporu R_{ap} , při kterém perioda kmitů roste nade všechny meze. Pro hodnotu R_{ap} platí

$$R_{ap} = 2\sqrt{L/C} .^1 \quad (3)$$



Obrázek 1. Zapojení RLC obvodu pro měření pomocí systému ISES^{1,3}.

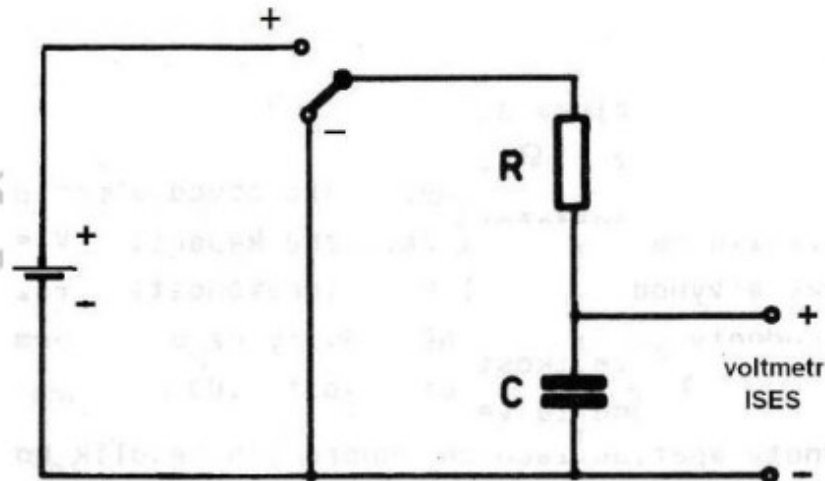
Pokud zapojíme do série pouze odpor a kondenzátor (podle schématu na obrázku 2), dojde stejně jako v případě RLC obvodu nejdříve k nabití kondenzátoru a při přepojení spínače do polohy – k jeho vybíjení. V tomto případě je časový průběh proudu dán vzorcem

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau) , \quad (4)$$

veličina τ se nazývá relaxační doba a pro RC obvod platí vztah

$$\tau = RC \quad (5)$$

V obvodu RL dostáváme podobné chování, způsobené indukční napětí na cívce.¹



Obrázek 2. Schéma zapojení RLC obvodu pro měření relaxační doby.¹

Výsledky měření

Pomocí měřicího přístroje a software ISES bylo měřeno napětí na odporu RLC obvodu podle schéma na obrázku 1 a napětí na kondenzátoru RC obvodu podle schéma na obrázku 2. Jako odpor byla zařazena odporová dekáda s přesností $\pm 0,5 \% \pm 5 \text{ m}\Omega$, jako kondenzátor byla zařazena dekáda bez udané přesnosti, její chybu tedy nebudeme uvažovat. Chyba měření pomocí systému ISIS byla určena experimentálně pouze pro měření periody kmitů a měření relaxační doby, budeme jí dále diskutovat.

Kmity v periodickém stavu

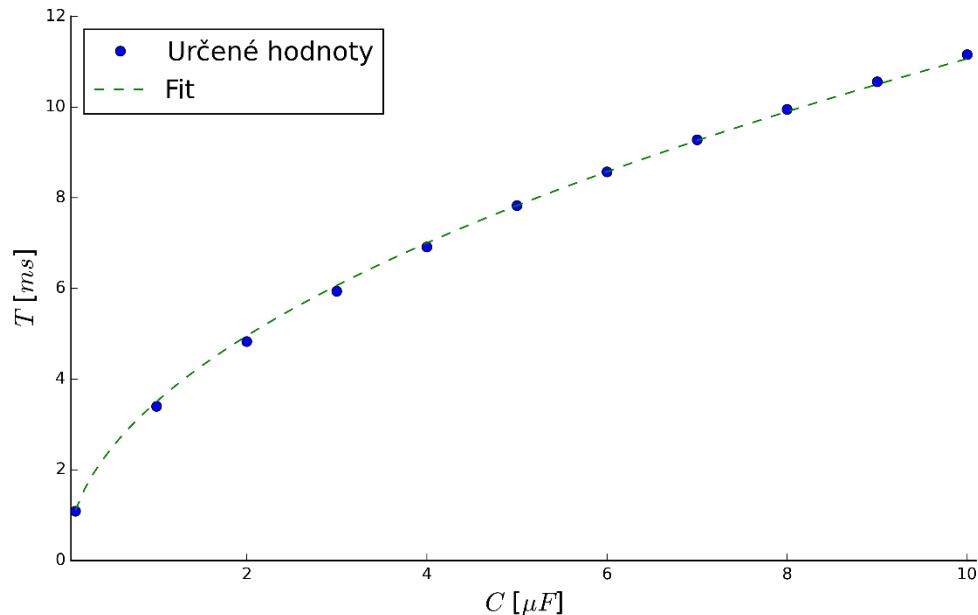
Při odporu $R = 20 \Omega$ v RLC obvodu sestaveném podle schématu na obrázku 1 byla měřena závislost periody kmitů na zařazené kapacitě. Pomocí software ISES byla určena doba 5 kmitů. Chybu odečtení hodnoty neuvažujeme, opakovaným měřením při jedné hodnotě kapacity a následným statistickým zpracováním jsme ověřili, že je chyba relativně malá a můžeme jí zanedbat. Určené hodnoty period kmitů jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1. Určené hodnoty period pro jednotlivé zařazené kapacity kondenzátoru.

$C [\mu F]$	$T [ms]$
0,1	1,08
1,0	3,39
2,0	4,83
3,0	5,93
4,0	6,91
5,0	7,83
6,0	8,57
7,0	9,28
8,0	9,94
9,0	10,56
10,0	11,15

Pomocí knihovny scipy pro python bylo provedeno grafické zpracování, výsledky byly proloženy fitem podle rovnice (2), ve které můžeme člen $R^2/4L^2$ zanedbat. Grafické zpracování je zobrazeno na obrázku 3. Z fitu byla určena indukčnost cívky jako $L = (0,31 \pm 0,05) H$. Chyba zde byla odhadnuta, jde o nadhodnocení statistické chyby fitu s přihlédnutím na neznámý vnitřní odpor cívky.

(18) Přechodové jevy v RLC obvodu



Obrázek 3. Závislost periody kmitu na zařazené kapacitě.

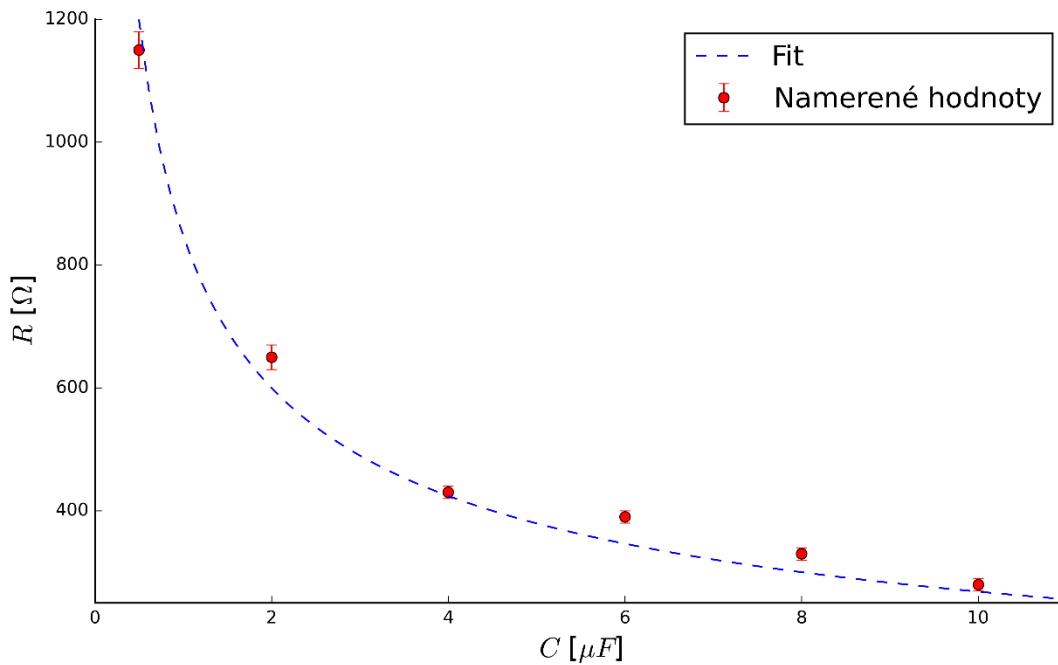
Aperiodizační odpor

V závislosti na hodnotách zařazené kapacity byl určován aperiodizační odpor R_{ap} , tedy mezní odpor při kterém už nepozorujeme kmity v obvodu. Pomocí voltmetru ISIS v zapojení podle obrázku 1 byl postupně měřen průběh napětí obvodem pro různé hodnoty odporu, za cílem nalézt mezní hodnotu při které nebude docházet ke změně znaménka napětí. Měření je ale velmi zatíženo šumem, odhadujeme tedy chybu 3 % z hodnoty. Chyba byla odhadnuta na základě posouzení změn průběhu napětí v závislosti na změně hodnoty odporu. Výsledky měření jsou shrnuty v tabulce 2, na obrázku 4 vidíme grafické zpracování, ve kterém jsme pomocí knihovny scipy fitovali hodnoty podle vzorce (3). Hodnota indukčnosti cívky byla takto určena jako $L = (0,18 \pm 0,1) H$. Chyba byla nadhodnocena zejména z důvodu nepřesně určených aperiodizačních odporů a možnému (i když pravděpodobně zanedbatelnému) vlivu vnitřního odporu cívky.

Tabulka 2. Hodnoty aperiodizačních odporů pro jednotlivé zařazené kapacity.

C [μF]	R [Ω]	σ_R [Ω]
0,5	1150	30
2	650	20
4	430	10
6	390	10
8	330	10
10	280	10

(18) Přechodové jevy v RLC obvodu

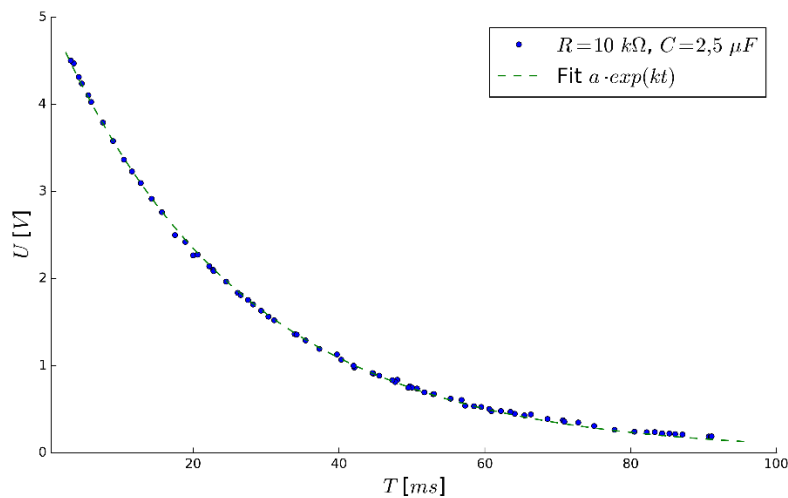


Obrázek 4. Určení aperiodizačního odporu v závislosti na kapacitě v RLC obvodu.

Relaxační doba RC obvodu

V RC obvodu zapojeném podle obrázku 2 byla měřena relaxační doba v závislosti na zařazeném odporu a kapacitě. Typický průběh vybíjení kondenzátoru v RC obvodu je zobrazen na obrázku 5.

Při měření závislosti na kapacitě byl zařazen odpor $R_{konst} = 10 \text{ k}\Omega$, při měření závislosti na odporu byla zařazena kapacita $C_{konst} = 5 \text{ }\mu\text{F}$.



Obrázek 5. Typický průběh vybíjení kondenzátoru ve zkratovaném RC obvodu. Fit je podle teoretické závislosti (4).

(18) Přechodové jevy v RLC obvodu

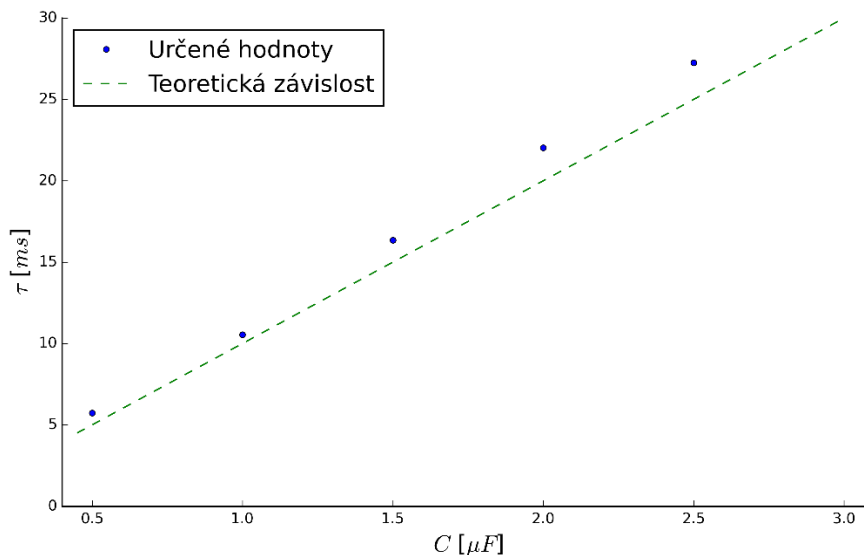
Z parametrů fitů provedených v programu ISES pro jednotlivé kapacity a odpory v RC obvodu byly určeny relaxační doby. Pro hodnotu $R = 30 \text{ k}\Omega$, $C = 5 \text{ }\mu\text{F}$ bylo provedeno několik měření a experimentálně tak byla určena chyba 1 %. Výsledky měření závislosti na kapacitě při konstantním odporu jsou v tabulce 3, výsledky měření závislosti na odporu při konstantní kapacitě jsou v tabulce 4. Grafické zpracování je na obrázcích 6 a 7, kde jsou naměřené hodnoty proloženy teoretickou závislostí (5).

Tabulka 3. Závislost relaxační doby na kapacitě při konstantním odporu $R_{konst} = 10 \text{ k}\Omega$.

$C \text{ [}\mu\text{F]}$	$\tau \text{ [ms]}$	$\tau_{teoretické} \text{ [ms]}$
0,5	$5,73 \pm 0,06$	5
1,0	$10,5 \pm 0,1$	10
1,5	$16,3 \pm 0,2$	15
2,0	$22,0 \pm 0,2$	20
2,5	$27,3 \pm 0,3$	25
3,0	$31,9 \pm 0,3$	30

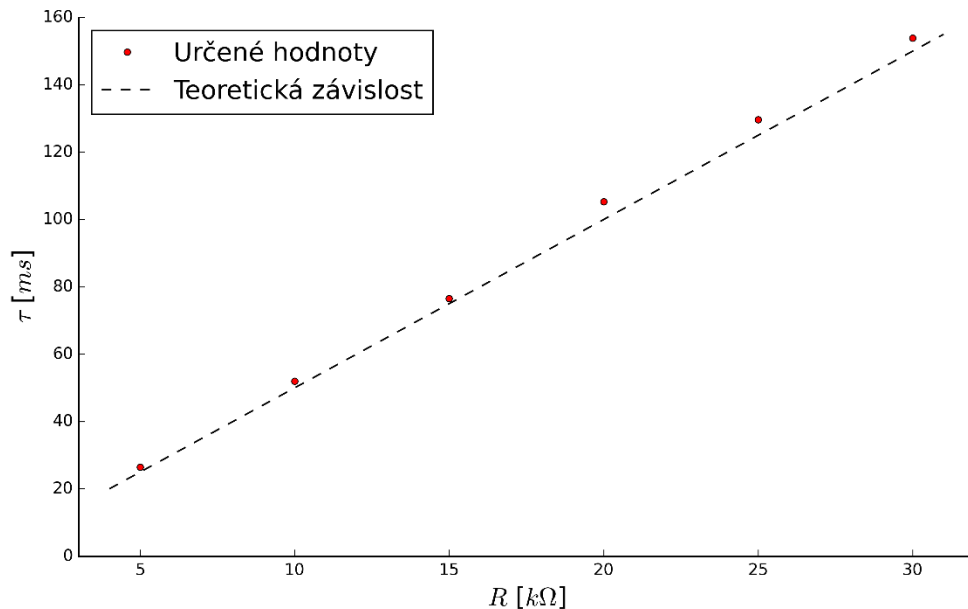
Tabulka 4. Závislost relaxační doby na odporu při konstantní kapacitě $C = 5 \text{ }\mu\text{F}$.

$R \text{ [k}\Omega]$	$\tau \text{ [ms]}$	$\tau_{teoretické} \text{ [ms]}$
5	$26,4 \pm 0,3$	25
10	$51,9 \pm 0,5$	50
15	$76,5 \pm 0,8$	75
20	105 ± 1	100
25	130 ± 1	125
30	154 ± 2	150



Obrázek 6. Závislost relaxační doby RC obvodu na kapacitě při odporu $R_{konst} = 10 \text{ k}\Omega$. Chybové úsečky nezobrazujeme, pro odpovídají velikosti bodů.

(18) Přechodové jevy v RLC obvodu



Obrázek 7. Závislost relaxační doby RC obvodu na odporu při kapacitě $C_{konst} = 5 \mu F$.

Diskuze

Měření závislosti periody kmitů napětí na kapacitě v RLC obvodu poměrně dobře odpovídá předpokládané teoretické závislosti. Samotné měření průběhu napětí je poměrně přesné, systém ISES umožňuje vzorkování s frekvencí až 100 kHz, pro měření tedy byly vybírány vzorkovací frekvence, při kterých byl měřený průběh zdánlivě spojitý. Chybu do určení period vnáší odečítání hodnot z monitoru, ta ale byla redukována odečtením doby pěti kmitů. Výsledná chyba periody je oproti naměřeným hodnotám zanedbatelná.

Při určování indukčnosti fitováním periody nebyl započten vnitřní odpor cívky, chybu tedy nadhodnocujeme. Předpokládáme ale, že vnitřní odpor neovlivní celkový odpor v obvodu natolik, aby nadále neplatila podmínka $1/LC \gg R^2/L^2$.

Do měření mezních aperiodizačních odporů v RLC obvodu velmi zasahoval šum, který znemožňoval přesnější určení hodnoty odporu při kterém už nedochází k překmitu napětí do záporných hodnot. Určená hodnota indukčnosti pomocí aperiodizačních odporů má rozdílnou hodnotu od indukčnosti určené pomocí periody kmitů, což je způsobené právě nepřesným určením některých aperiodizačních odporů. To je také vidět z grafu na obrázku 4, kde se některé hodnoty odchyľují od proložené křivky, ale stále sledují její trend.

Relaxační čas RC obvodu byl díky vysoké vzorkovací frekvenci a tedy velkému statistickému souboru dat určen poměrně přesně, od teoretické závislosti se ale odchyľuje což je pravděpodobně způsobeno systematickou chybou při měření, kterou se ale nepodařilo identifikovat.

Všechna měření byla prováděna odpojením obvodu od zdroje a jeho zkratováním, opačným postupem (nejdříve zkratovat obvod pro vybití kondenzátoru a následně připojit na zdroj) by jsme dostali obdobné chování, měření by ale bylo zatíženo chybou vzniklou vnitřním odporem zdroje.

Závěr

Přímým měřením byla určena nelineární závislost periody kmitů v sériovém RLC obvodu na zařazené kapacitě. Fitováním naměřených hodnot na teoretickou závislost byla určena indukčnost zařazené cívky jako $L = (0,31 \pm 0,05) H$.

Dále byly určeny hodnoty mezních aperiodizačních odporů v závislosti na kapacitě. Fitováním na teoretickou závislost byla určena indukčnost téže zařazené cívky jako $L = (0,18 \pm 0,1) H$. Toto měření je ale zejména kvůli šumu zatíženo větší chybou.

Závislost relaxační doby sériového RC obvodu na kapacitě při konstantním odporu a na odporu při konstantní kapacitě se odchyluje od teoretické závislosti, je ale možné že při měření vznikla systematická chyba.

Použité zdroje

¹ Studijní text k Fyzikálnímu Praktiku II. 6. Přechodové jevy v RLC obvodu. [online] [cit. 2018-12-14]. Dostupné online z: https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_218.pdf.

² Kaiser, Kenneth L. Electromagnetic Compatibility Handbook. 2004, CRC Press. pp. 6.5. ISBN 0849320879.

³ Lustig, F.: Laboratorní studio iSES. 2000, sborník DIDFYZ 2000, Ráčkova Dolina 18.-21.10. 2000, 291-296.