

1 Pracovní úkoly

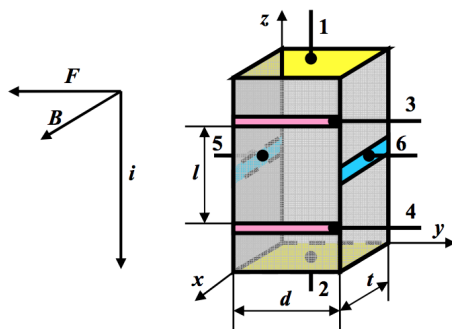
1. Zjistěte závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí při nulové magnetické indukci.
2. Zjistěte závislost Hallova napětí na magnetické indukci při třech hodnotách konstantního proudu vzorkem.
3. Výsledky měření zpracujte graficky. Vyhodnoťte měrnou vodivost a Hallovu konstantu vzorku.
4. Vypočítejte pohyblivost a koncentraci nositelů náboje.

2 Teoretická část

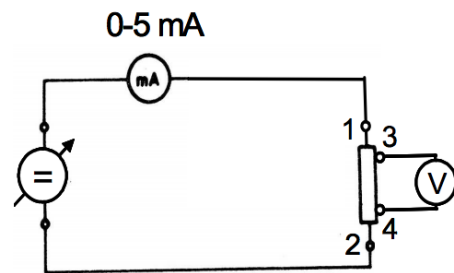
Ohmův zákon lze zapsat v diferenciálním tvaru [1]

$$i = \sigma E \quad (1)$$

kde i je hustota proudu, E intenzita elektrického pole a σ měrná elektrická vodivost. Měrnou elektrickou vodivost σ a další veličiny budeme měřit pro vzorek Ge při pokojové teplotě. Schéma použitého vzorku je na obrázku 1. [1] Zapojení vzorku do obvodu pro měření σ je znázorněno na obrázku 2.



Obrázek 1: Schématický obrázek vzorku polovodiče s rozměry a kontakty pro měření Hallova jevu



Obrázek 2: Měření měrné elektrické vodivosti

Použitý vzorek má konstantní průřez $t \cdot d$, můžeme tedy předpokládat, že hustota proudu i je na daném průřezu konstantní a rovna $i = I_{12}/(t \cdot d)$, kde I_{12} je proud procházející vzorkem přes kontakty 1 a 2. Elektrickou intenzitu ve vzorku lze určit ze změřeného napětí mezi kontakty 3 a 4, tedy $E = U_{34}/l$.

Ze změřených hodnot I_{12} a U_{34} tak můžeme vypočítat měrnou elektrickou vodivost proudu. Pokud naměřené hodnoty I_{12} , U_{34} proložíme přímkou tvaru $I_{12} = A \cdot U_{34}$, tak bude platit

$$\sigma = \frac{Al}{td} \quad (2)$$

V polovodičích se na vedení proudu kromě elektronů podílí také díry, celková hustota proudu ve vzorku za předpokladu, že platí Ohmův zákon, je tak dána

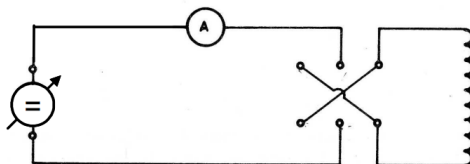
$$i = -en\langle v_n \rangle + ep\langle v_p \rangle \quad (3)$$

$$i = e(n\mu_n + p\mu_p)E \quad (4)$$

kde e značí velikost elementárního náboje, n koncentraci elektronů, $\langle v_n \rangle$ jejich střední rychlost uspořádaného pohybu, p koncentraci děr a $\langle v_p \rangle$ střední rychlost uspořádaného pohybu děr. Pokud platí Ohmův zákon, tak jsou uvedené rychlosti úměrné elektrické intenzitě $\langle v_n \rangle = -\mu_n E$, $\langle v_p \rangle = \mu_p E$ a konstanty úměrnosti se nazývají pohyblivost elektronů μ_n a pohyblivost děr μ_p . V dalších úvahách budeme předpokládat, že ve vzorku převažuje vodivost elektronů a tedy $p = 0$.

Pokud vzorek, kterým prochází proud, umístíme do magnetického pole kolmého na směr proudu, začne na elektrony působit Lorentzova síla. Tato síla začne odchylovat elektrony ke stranám vzorku, kde se začnou hromadit a vytvoří tak napětí napříč vzorkem, tzv. Hallovo napětí. V rovnováze pak platí, že na elektrony procházející vzorkem působí magnetické pole silou, jejíž velikost se rovná elektrostatické síle nahromaděných elektronů po stranách a tyto síly se navzájem vyruší.

Obvod zapojení vzorku pro měření Hallova napětí bude téměř totožný obvodu na obrázku 2, pouze budeme měřit napětí mezi kontakty 5 a 6. Dále zapojíme obvod elektromagnetu podle obrázku 3. [1]



Obrázek 3: Napájení elektromagnetu

Vzorek je v elektromagnetu umístěn tak, aby směr magnetické indukce byl vždy kolmý na proud procházející mezi kontakty 1 a 2. Jelikož však kontakty 5 a 6 nejsou umístěny zcela symetricky, měříme mezi nimi kromě Hallova napětí i napětí ohmické. Správnou hodnotu Hallova napětí můžeme určit tak, že změříme napětí mezi kontakty 5 a 6 při obou polaritách elektromagnetu U_{56}^+ , U_{56}^- , absolutní hodnota Hallova napětí je pak rovna

$$|U_H| = \frac{|U_{56}^+ - U_{56}^-|}{2} \quad (5)$$

Změříme-li závislost Hallova napětí U_H na velikosti magnetické indukce B při konstantním proudu vzorkem I a data proložíme přímkou tvaru $U_H = K \cdot B$, tak z teorie vyplývá, že můžeme vypočítat Hallovu konstantu vzorcem

$$R_H = \frac{tK}{I} \quad (6)$$

Pro koncentraci elektronů bude platit

$$n = \frac{r_H I}{etK} \quad (7)$$

kde r_H je tzv. Hallův rozptylový faktor, v našem případě je roven $r_H = 3\pi/8$ [1]. A pro pohyblivost elektronů dostaneme

$$\mu_n = \frac{t\sigma K}{I} \quad (8)$$

3 Výsledky měření

Během celého měření používám multimetr METEX M-3270D pro měření napětí na vzorku a multimetr MY-65 pro měření proudu procházejícího vzorkem. Jejich Přesnosti shrnují tabulky 1 a 2. Pro měření proudu v obvodu elektromagnetu byl použit analogový ampérmetr s třídou přesnosti 0,5 a s rozsahem 6 A.

Tabulka 1: Multimetr METEX M-3270D

rozsah	přesnost
400 mV	0,5% + 2 dg
4 V	0,8% + 2 dg
40 V	0,8% + 2 dg
400 V	0,8% + 2 dg

Tabulka 2: Multimetr MY-65

rozsah	přesnost
2 mA	0,5% + 5 dg
20 mA	0,5% + 5 dg
200 mA	0,8% + 5 dg
10 A	2,0% + 10 dg

Rozměry vzorku Ge byly podle přiložených materiálů rovny

$$l = (6,000 \pm 0,005) \text{ mm}$$

$$d = (3,350 \pm 0,005) \text{ mm}$$

$$t = (0,720 \pm 0,005) \text{ mm}$$

Ve zpracování několikrát používám lineární regresi tvaru $y = A \cdot x$, pro případ, kdy známe chyby měření σ_{y_i} . Parametr A a jeho směrodatná odchylka je pak rovna [2]

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}} \quad \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}} \quad (9)$$

Závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí při nulové magnetické indukci jsem měřil podle zapojení na obrázku 2. Naměřené hodnoty napětí U mezi kontakty 3 a 4 a proudu procházejícího vzorkem I shrnuje tabulka 3. Uvedené chyby měření byly určeny z přesností z tabulek 1 a 2.

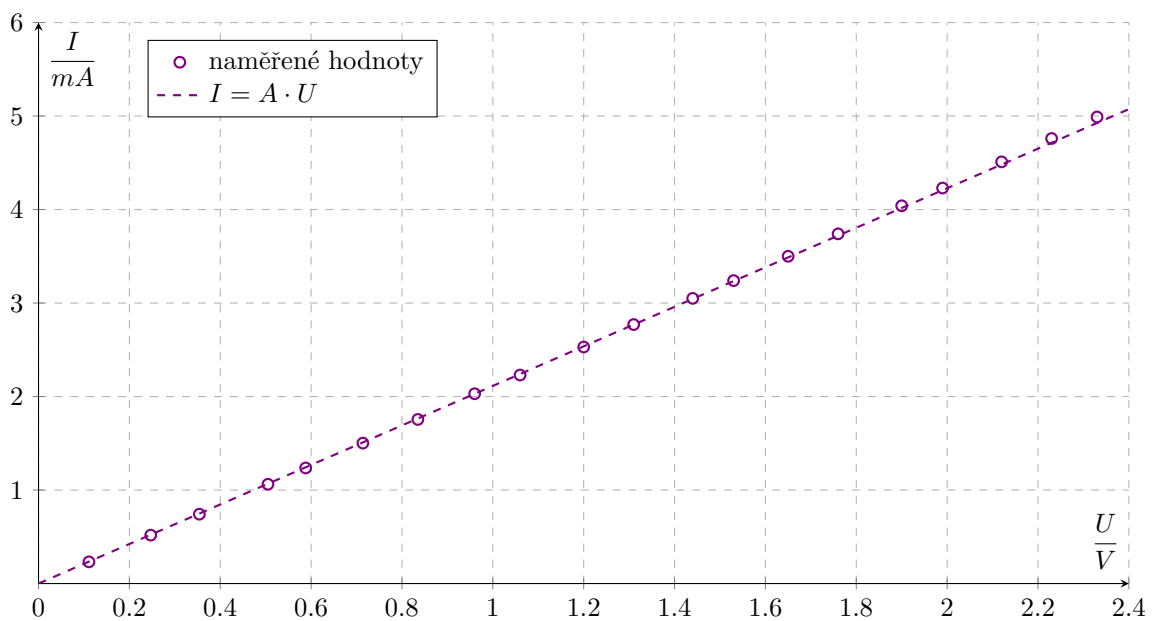
Naměřené hodnoty byly proloženy přímkou $I = A \cdot U$ a parametr A byl určen standardně podle vzorců lineární regrese (9), číselně vyšlo $A = (2,114 \pm 0,003) \text{ mS}$. Naměřené hodnoty s proloženou přímkou ukazuje graf 1.

Podle vzorce (2) pak byla určena měrná elektrická vodivost vzorku $\sigma = (5,26 \pm 0,04) \text{ Sm}^{-1}$, kde jsem chybu výsledku určil podle zákona šíření chyb jako

$$\sigma_\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2} \quad (10)$$

Tabulka 3: Závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí při nulové magnetické indukci

$\frac{U}{V}$	$\frac{\sigma_U}{V}$	$\frac{I}{mA}$	$\frac{\sigma_I}{mA}$
2,33	0,02	4,99	0,03
2,23	0,02	4,76	0,03
2,12	0,02	4,51	0,03
1,99	0,02	4,23	0,03
1,90	0,02	4,04	0,03
1,76	0,02	3,74	0,02
1,65	0,02	3,50	0,02
1,53	0,01	3,24	0,02
1,44	0,01	3,05	0,02
1,31	0,01	2,77	0,02
1,20	0,01	2,53	0,02
1,06	0,01	2,23	0,02
0,96	0,01	2,03	0,02
0,835	0,009	1,755	0,009
0,714	0,008	1,502	0,008
0,588	0,007	1,236	0,007
0,505	0,006	1,062	0,006
0,354	0,002	0,742	0,004
0,247	0,001	0,518	0,003
0,111	0,001	0,232	0,002



Graf 1: Závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí při nulové magnetické indukci

Pro měření Hallova napětí jsem přepojil voltmetr na vzorku tak, abych měřil napětí mezi kontakty 5 a 6, a zapojil jsem obvod elektromagnetu podle obrázku 3. Velikost magnetické indukce pole v elektromagnetu je podle přiložených materiálů dána vztahem

$$B[T] = 0,098 \cdot I[A] \quad (11)$$

kde I značí proud procházející obvodem elektromagnetu. Proud I byl měřen analogovým ampérmetrem s třídou přesnosti $\delta = 0,5$ a s rozsahem $R = 6 A$, chyba tohoto měření je dána vzorcem [2]

$$\sigma_I = \frac{\delta \cdot R}{100\sqrt{3}} \quad (12)$$

pro chybu měření magnetické indukce pak platí

$$\sigma_B[T] = 0,098 \cdot \sigma_I[A] \quad (13)$$

Napětí mezi kontakty 5 a 6 bylo změřeno pro každou hodnotu magnetické indukce pro obě polarity elektromagnetu, výsledky těchto měření jsem označil U_1 a U_2 . Chyba měření napětí je dána přesností použitého multimetru uvedené v tabulce 1. Hallovo napětí pro danou hodnotu magnetické indukce pak bylo vypočítáno podle vzorce (5) a chyba určena vztahem

$$\sigma_{U_H} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2} \quad (14)$$

Závislost Hallova napětí na magnetické indukci byla změřena pro tři různé konstantní proudy vzorkem, konkrétně $(1,00 \pm 0,01) mA$, $(3,00 \pm 0,02) mA$ a $(5,00 \pm 0,03) mA$. Změřené hodnoty jsou uvedené v tabulkách 4,5 a 6.

Tabulka 4: Závislost Hallova napětí na magnetické indukci pro případ $I_{12} = (1,00 \pm 0,01) mA$

$\frac{I}{A}$	$\frac{\sigma_I}{A}$	$\frac{B}{mT}$	$\frac{\sigma_B}{mT}$	$\frac{U_1}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_1}}{mV}$	$\frac{U_2}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_2}}{mV}$	$\frac{U_H}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_H}}{mV}$
1,00	0,02	98	2	22,9	0,3	4,9	0,2	9,0	0,2
1,25	0,02	123	2	25,3	0,3	2,1	0,2	11,6	0,2
1,50	0,02	147	2	27,9	0,3	0,1	0,2	13,9	0,2
1,75	0,02	172	2	29,7	0,3	-2,2	0,2	16,0	0,2
2,00	0,02	196	2	32,7	0,4	-4,6	0,2	18,7	0,2
2,25	0,02	221	2	34,7	0,4	-6,9	0,2	20,8	0,2
2,50	0,02	245	2	36,9	0,4	-8,6	0,2	22,8	0,2
2,75	0,02	270	2	39,8	0,4	-11,7	0,3	25,8	0,2
3,00	0,02	294	2	42,1	0,4	-13,6	0,3	27,9	0,2
3,25	0,02	319	2	43,8	0,4	-15,5	0,3	29,7	0,3
3,50	0,02	343	2	46,4	0,4	-17,6	0,3	32,0	0,3
3,75	0,02	368	2	47,8	0,4	-19,3	0,3	33,6	0,3
4,00	0,02	392	2	51,0	0,5	-22,0	0,3	36,5	0,3

Tabulka 5: Závislost Hallova napětí na magnetické indukci pro případ $I_{12} = (3,00 \pm 0,02) \text{ mA}$

$\frac{I}{A}$	$\frac{\sigma_I}{A}$	$\frac{B}{mT}$	$\frac{\sigma_B}{mT}$	$\frac{U_1}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_1}}{mV}$	$\frac{U_2}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_2}}{mV}$	$\frac{U_H}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_H}}{mV}$
1,00	0,02	98	2	69,5	0,5	19,5	0,3	25,0	0,3
1,25	0,02	123	2	77,6	0,6	12,7	0,3	32,5	0,3
1,50	0,02	147	2	85,2	0,6	5,0	0,2	40,1	0,3
1,75	0,02	172	2	91,3	0,7	0,0	0,2	45,7	0,3
2,00	0,02	196	2	96,2	0,7	-5,9	0,2	51,1	0,4
2,25	0,02	221	2	104,5	0,7	-11,8	0,3	58,2	0,4
2,50	0,02	245	2	111,8	0,8	-19,9	0,3	65,9	0,4
2,75	0,02	270	2	118,9	0,8	-25,3	0,3	72,1	0,4
3,00	0,02	294	2	124,6	0,8	-31,6	0,4	78,1	0,4
3,25	0,02	319	2	132,2	0,9	-37,3	0,4	84,8	0,5
3,50	0,02	343	2	138,4	0,9	-44,0	0,4	91,2	0,5
3,75	0,02	368	2	146,0	0,9	-49,3	0,4	97,7	0,5
4,00	0,02	392	2	152,1	1,0	-54,4	0,5	103,3	0,5

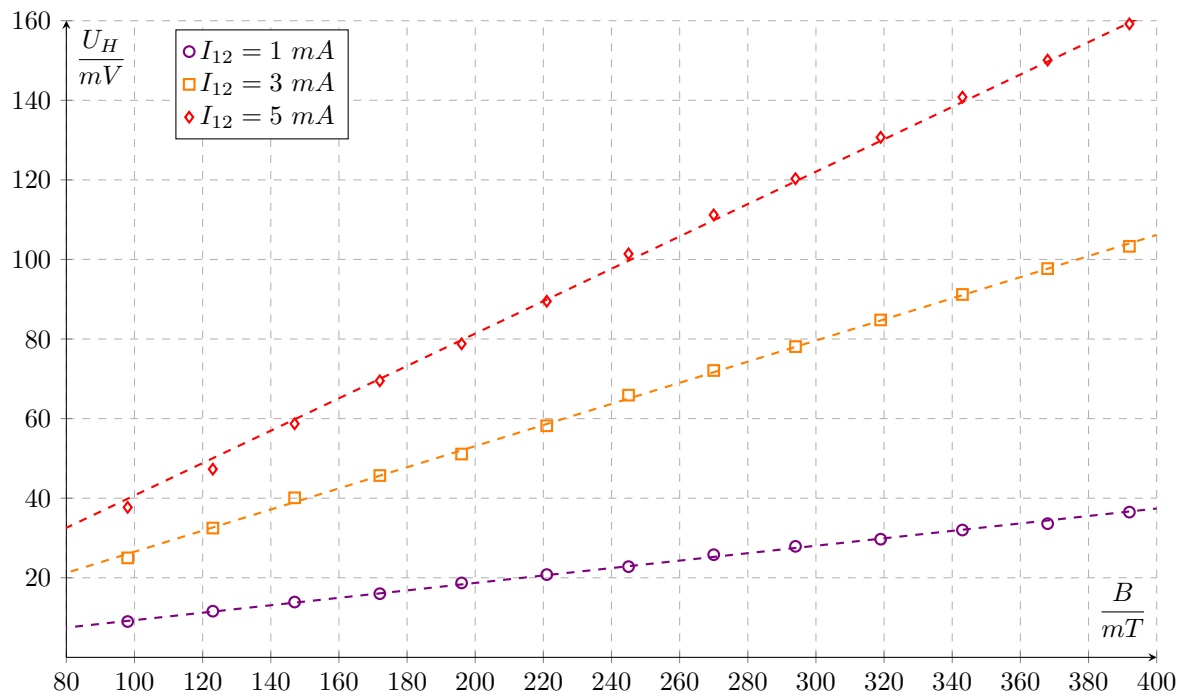
Tabulka 6: Závislost Hallova napětí na magnetické indukci pro případ $I_{12} = (5,00 \pm 0,03) \text{ mA}$

$\frac{I}{A}$	$\frac{\sigma_I}{A}$	$\frac{B}{mT}$	$\frac{\sigma_B}{mT}$	$\frac{U_1}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_1}}{mV}$	$\frac{U_2}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_2}}{mV}$	$\frac{U_H}{mV}$	$\frac{\sigma_{U_H}}{mV}$
1.00	0.02	98	2	117.1	0.8	41.7	0.4	37.7	0.4
1.25	0.02	123	2	125.8	0.8	31.3	0.4	47.3	0.5
1.50	0.02	147	2	138.7	0.9	21.3	0.3	58.7	0.5
1.75	0.02	172	2	148.7	0.9	9.8	0.2	69.5	0.5
2.00	0.02	196	2	160	1	2.0	0.2	78.8	0.5
2.25	0.02	221	2	170	1	-9.4	0.2	89.5	0.5
2.50	0.02	245	2	183	1	-19.6	0.3	101.4	0.6
2.75	0.02	270	2	193	1	-29.8	0.3	111.2	0.6
3.00	0.02	294	2	203	1	-37.5	0.4	120.3	0.6
3.25	0.02	319	2	213	1	-48.2	0.4	130.7	0.7
3.50	0.02	343	2	225	1	-57.0	0.5	140.8	0.7
3.75	0.02	368	2	234	1	-66.4	0.5	150.1	0.7
4.00	0.02	392	2	244	1	-74.8	0.6	159.2	0.8

Naměřené hodnoty byly proloženy přímkou ve tvaru $U_H = K \cdot B$. Parametr lineární regrese K byl vypočítán podle vzorců (9). Výsledné hodnoty K jsou uvedené v tabulce 7 a graf 2 znázorňuje změřenou závislost $U_H(B)$ pro tři různé proudy vzorkem společně s proloženými přímkami.

Tabulka 7: Výsledky lineární regrese pro měření $U_H(B)$

$\frac{I_{12}}{mA}$	$\frac{K}{mV \cdot T^{-1}}$	$\frac{\sigma_K}{mV \cdot T^{-1}}$
1,00	93,6	0,3
3,00	265,5	0,5
5,00	406,9	0,7



Graf 2: Závislost Hallova napětí na magnetické indukci pro různé proudy vzorkem

Pro tři změřené závislosti byla určena Hallova konstanta podle vzorce (6) a chyba výsledku dle

$$\sigma_{R_H} = R_H \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_{12}}}{I_{12}}\right)^2} \quad (15)$$

Koncentrace elektronů byla vypočítaná podle (7) a chyba

$$\sigma_n = n \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_{12}}}{I_{12}}\right)^2} \quad (16)$$

Pohyblivost elektronů podle (8) a chyba

$$\sigma_{\mu_n} = \mu_n \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_{12}}}{I_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\sigma}{\sigma}\right)^2} \quad (17)$$

Vypočítané hodnoty R_H , n a μ_n pro tři změřené závislosti jsou uvedené v tabulce 8 společně s jejich aritmetickým průměrem. Chyba aritmetického průměru všech veličin zde byla určena podle vzorce

$$\sigma_X = \frac{1}{3} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sigma_{X_i}^2} \quad (18)$$

kde σ_X značí chybu aritmetického průměru veličiny X a σ_{X_i} značí chybu jednotlivých měření.

Tabulka 8: Vypočítané hodnoty R_H , n a μ_n

$\frac{I_{12}}{mA}$	$\frac{R_H}{10^{-3} m^3 C^{-1}}$	$\frac{\sigma_{R_H}}{10^{-3} m^3 C^{-1}}$	$\frac{n}{10^{20} m^{-3}}$	$\frac{\sigma_n}{10^{20} m^{-3}}$	$\frac{\mu_n}{m^2 V^{-1} s^{-1}}$	$\frac{\sigma_{\mu_n}}{m^2 V^{-1} s^{-1}}$
1,00	67,4	0,8	1,10	0,01	0,353	0,005
3,00	63,7	0,6	1,16	0,01	0,334	0,004
5,00	58,6	0,5	1,26	0,01	0,308	0,004
průměr	63,2	0,4	1,17	0,01	0,332	0,002

4 Diskuse

Při nulové magnetické indukci vzorek dobře splňuje Ohmův zákon a naměřená závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí je lineární, jak je vidět z hodnot v tabulce 3 a grafu 1. Vzorce pro lineární regresi (9), které byly použity ke zpracování naměřených dat, předpokládají, že chyba určení veličiny na ose x je zanedbatelná. V našem případě to odpovídá chybě měření napětí. Z hodnot v tabulce 3 však můžeme vidět, že tento předpoklad je splněn pouze přibližně, což znamená, že skutečná chyba parametru A bude o něco větší než hodnota vypočítaná ze vzorce (9). Předpokládám však, že použité přiblížení neovlivní zásadně výslednou hodnotu parametru A , resp. výslednou hodnotu měrné elektrické vodivosti σ .

Změřené závislosti Hallova napětí na magnetické indukci pro tři různé proudy vzorkem, uvedené v grafu 2, jsou lineární a odpovídají tak teoretickým očekáváním. Při jejich zpracování byly opět použity vzorce (9), ale opět zde předpokládám, že to vypočítané výsledky ztelně neovlivní. Během měření proud procházející vzorkem při zvětšování magnetické indukce nepatrně klesal. To bylo pravděpodobně způsobeno magnetorezistencí. Jelikož však tato změna proudu nebyla větší než přesnost použitého ampérmetru, tak jsem žádnou korekci neprováděl.

Přesnost měření také závisela na několika faktorech, nad kterými jsem neměl kontrolu, jako jsou rozměry vzorku, vzorec pro výpočet magnetické indukce a správné umístění vzorku v elektromagnetu. Předpokládám ovšem, že jsou určeny dostatečně přesně a že tedy do měření nevnaší žádnou ztelnou systematickou chybu.

Vypočítané hodnoty R_H , n a μ_n pro proudy vzorkem $1,00 \text{ mA}$ a $3,00 \text{ si}$ v rámci chyby měření odpovídají. Hodnoty určené pro případ proudu vzorkem $5,00 \text{ mA}$ se však již ztelně liší. Jak je vidět z hodnot v tabulce 8, tak se zdá, že Hallova konstanta R_H a Hallovska pohyblivost μ_n mají tendenci s vyšším proudem vzorkem klesat a naopak koncentrace elektronů růst. Pro ověření této tendence by však bylo potřeba provést více měření. Je možné, že v případě proudu vzorkem 5 mA hrály roli některé jevy, které byly v teoretické části zanedbány.

Nicméně v rámci našich teoretických předpokladů by veličiny R_H , n a μ_n měly být konstantní, a tak byl určen jejich aritmetický průměr. Jelikož se však hodnoty pro případ proudu vzorkem 5 mA tolik liší, tak chyba určení těchto průměrů bude určitě větší než chyba, která byla formálně vypočítaná podle (18). Odhaduji, že výsledné průměry byly určeny s přesností $R_H = (63 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{C}^{-1}$, $n = (1,17 \pm 0,05) \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ a $\mu_n = (0,33 \pm 0,01) \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$.

5 Závěr

Byla proměřena závislost proudu vzorkem na přiloženém napětí při nulové magnetické indukci a určena měrná elektrická vodivost na hodnotu $\sigma = (5,26 \pm 0,04) \text{ Sm}^{-1}$. Pro tři různé proudy vzorkem pak byla určena závislost Hallova napětí na magnetické indukci. Ze změřených hodnot byla vypočítaná průměrná hodnota Hallovy konstanty $R_H = (63 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{C}^{-1}$, koncentrace elektronů $n = (1,17 \pm 0,05) \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ a Hallovska pohyblivost $\mu_n = (0,33 \pm 0,01) \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$.

6 Seznam použité literatury

- [1] Hallův jev. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 03-11-2018]. https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_210.pdf
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.