

1 Pracovní úkol

1. Změřte indukčnosti L_A , L_B a vlastní kapacity C_A , C_B cívek A a B.
2. Určete vzájemnou indukčnost M cívek A a B umístěných ve svorkách 1, 2 a 3, 4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.
5. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti několikrát opakujte a stanovte chybu měření.

2 Teorie

Velikost impedance Z sériového RLC obvodu je dána vztahem

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (1)$$

kde U je napětí na obvodu, I je proud tekoucí obvodem, R je jeho odpor, L je jeho indukčnost a C je kapacita obvodu. Impedance je nejmenší, pokud obvodem při daném napětí protéká největší proud. Říkáme, že obvod je v rezonanci. Pokud chceme, aby byla impedance nejmenší, plyne z (1) pro kruhovou frekvenci podmínka:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

Veličina ω_r se nazývá rezonanční frekvence.

Pro měření vlastní kapacity cívky použijeme odlišný způsob, než je popsáný v [1]. Rovnici (2) upravíme na

$$\frac{1}{\omega_r^2} = L(C_0 + C), \quad (3)$$

kde C_0 je vlastní kapacita cívky a C je kapacita kondenzátoru, který jsme připojili paralelně k cívce. Závislost převrácené hodnoty kvadrátu rezonanční frekvence na kapacitě kondezátoru je lineární. Změříme tuto závislost a poté k vyhodnočení výsledků použijeme lineární regresi. Obdobný postup použijeme i při měření vzájemné indukčnosti cívek. Změříme jejich celkovou indukčnost při zapojení v souhlasném (indukčnost L_1) i nesouhlasném (indukčnost L_2) směru proudu. Celkovou indukčnost cívek můžeme vyjádřit vztahem

$$L_1 = L_A + L_B + 2M \quad (4)$$

pro zapojení v souhlasném směru a

$$L_2 = L_A + L_B - 2M \quad (5)$$

pro zapojení v nesouhlasném směru. Jejich vzájemnou indukčnost M spočítáme podle vzorce:

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} \quad (6)$$

Z rovnice (1) můžeme odvodit vztah:

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}, \quad (7)$$

označíme-li:

$$y = \frac{I}{I_r}, \quad (8)$$

kde I_r je proud obvodem, je-li v rezonanci. Dále označíme:

$$x = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (9)$$

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (10)$$

Veličina d definovaná rovnicí (10) je tzv. míra útlumu. Určuje šířku rezonanční křivky. Pro $y^2 = 0,5$ je rozdíl příslušných hodnot x (v absolutní hodnotě) roven d . Převrácená hodnota míry útlumu se nazývá činitel jakosti Q . Z rovnic (2) a (10) potom plyne:

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_r L}{R_n}, \quad (11)$$

přičemž R_n značí náhradní sériový odpor obvodu.

Pro kalibraci kondenzátoru použijeme postup, jako je uveden v [1]. Nejprve k cívkám paralelně připojíme kondenzátor o známé kapacitě C_1 . Potom k obvodu připojíme neznámou kapacitu C_x a změnou známé kapacity na hodnotu C_2 obvod opět přivedeme k rezonanci. Podle vzorce (2) musí celková kapacita obvodu zůstat stejná (L ani ω_r se nemění). Neznámou kapacitu C_x spočítáme jako:

$$C_x = C_1 - C_2 \quad (12)$$

Cívky mají ještě vlastní indukčnost. Bylo by třeba ji přičíst k hodnotě C_1 i C_2 . Díky tomu, že počítáme rozdíl těchto dvou veličin, ji uvažovat nemusíme.

3 Výsledky měření

Schéma zapojení nalezneme v [1], str. 54. Vzhledem k tomu, že je obtížné přesně vystihnout moment, kdy se obvod nachází v rezonanci, by zjištěná rezonanční frekvence byla zatížena velkou chybou. Místo toho budeme měřit frekvence pro stejné hodnoty proudu po obou stranách rezonanční křivky. Rezonanční frekvence potom bude jejich aritmetický průměr. V tabulce 1 jsou naměřené hodnoty pro cívkou A, v tabulce 2 pak hodnoty pro cívkou B. f_1 a f_2 jsou naměřené frekvence pro stejný proud z opačných stran rezonanční křivky. f_r je rezonanční frekvence, ω je potom příslušná kruhová frekvence. Kapacita paralelně připojeného kondenzátoru je C .

Uvádíme zaokrouhlené veličiny, a proto f_r nemusí být přesně průměr f_1 a f_2 . V lineární regresi uvažujeme obecnou přímku tvaru $Y = a_0 + a_1 X$ (srovnejme s rovnicí (3)). Popis lineární regrese, stejně tak jako způsob výpočtu směrodatných odchylek, je v [2]. Chybu určení frekvence jsme odhadli na $\pm 0,1$ kHz. Dostáváme výsledky:

$$L_A = (0,2193 \pm 0,0001) \text{ mH}$$

$$C_{0,A} = (59,81 \pm 0,08) \text{ pF}$$

$$L_B = (0,2497 \pm 0,0001) \text{ mH}$$

$$C_{0,B} = (22,31 \pm 0,07) \text{ pF}$$

$C_{0,A}$ je vlastní kapacita cívky A, $C_{0,B}$ je vlastní kapacita cívky B.

Postup při určování celkové indukčnosti cívek je stejný jako v případě s jednou cívkou. Naměřené hodnoty pro zapojení cívek v souhlasném směru je v tabulce 3, pro zapojení v nesouhlasném směru pak v tabulce 4.

$$L_1 = (0,5865 \pm 0,0003) \text{ mH}$$

$$L_2 = (0,3385 \pm 0,0001) \text{ mH}$$

$$M = (61,99 \pm 0,08) \text{ }\mu\text{H}$$

Rezonanční křivku jsme proměřovali pro souhlasné zapojení cívek A, B a měli jsme zapojenou kapacitu $C = 400 \text{ pF}$. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 5. Výchylka je uvedena v dílcích stupnice galvanometru. Chybu výchylky jsme odhadli jako jeden dílek. Grafické znázornění redukované rezonanční křivky je v grafu 1. K detekci pole vytvářené cívkami jsme použili detekční cívku s usměrňovací diodou. Tato dioda měla kvadratickou charakteristiku. Výchylka galvanometru byla tedy úměrná druhé mocnině proudu tekoucí detekční cívkou. Výchylka galvanometru tak odpovídá y^2 z rovnice (8). Teoretická závislost je pro $d = 0,0133$.

Z tabulky (5) nám vyplývá, že míra útlumu d je:

$$d = (0,0133 \pm 0,0004)$$

Činitel jakosti Q je potom:

$$Q = (75 \pm 3)$$

Z rovnice (11) spočítáme velikost náhradního sériového odporu R_n :

$$R_n = (15,6 \pm 0,5) \text{ }\Omega$$

Hodnoty naměřené při kalibraci kondenzátoru jsou v tabulce 6. Výchylka je udávána v dílcích stupnice kalibrovaného kondenzátoru. Kapacita při odpojení kalibrovaného kondenzátoru je:

$$C_1 = (1000 \pm 0,5) \text{ pF}$$

Grafické zpracování výsledků je v grafu 2.

4 Diskuse

Největší chyby měření se dopouštíme při určování rezonanční frekvence. Tuto chybu lze zmenšit použitím průměru dvou hodnot po obou stranách rezonanční křivky, jak již bylo psáno výše. Avšak to s sebou přináší

Tabulka 1: Indukčnost cívky A

C [pF]	f ₁ [kHz]	f ₂ [kHz]	f _r [kHz]	$\omega^{-2} \cdot 10^{15}$ [s ²]
500±0,5	456,1±0,1	452,3±0,1	454,23±0,07	122,77±0,04
400±0,5	503,2±0,1	499,2±0,1	501,21±0,07	100,83±0,03
300±0,5	569,0±0,1	563,7±0,1	566,36±0,07	78,97±0,02
250±0,5	613,7±0,1	606,7±0,1	610,20±0,07	68,03±0,02
200±0,5	669,5±0,1	664,0±0,1	666,75±0,07	56,98±0,01
150±0,5	738,2±0,1	746,2±0,1	742,19±0,07	45,98±0,01
100±0,5	845,3±0,1	855,4±0,1	850,34±0,07	35,03±0,01

Tabulka 2: Indukčnost cívky B

C [pF]	f ₁ [kHz]	f ₂ [kHz]	f _r [kHz]	$\omega^{-2} \cdot 10^{15}$ [s ²]
500±0,5	439,0±0,1	442,6±0,1	440,77±0,07	130,38±0,04
400±0,5	491,9±0,1	488,3±0,1	490,12±0,07	105,45±0,03
300±0,5	563,1±0,1	558,4±0,1	560,77±0,07	80,55±0,02
250±0,5	612,8±0,1	607,3±0,1	610,05±0,07	68,06±0,02
200±0,5	677,5±0,1	673,0±0,1	675,26±0,07	55,55±0,01
150±0,5	765,9±0,1	769,6±0,1	767,75±0,07	42,97±0,01
100±0,5	914,5±0,1	908,3±0,1	911,42±0,07	30,49±0,01

Tabulka 3: Celková indukčnost cívek A, B při souhlasném zapojení

C [pF]	f ₁ [kHz]	f ₂ [kHz]	f _r [kHz]	$\omega^{-2} \cdot 10^{15}$ [s ²]
500±0,5	286,4±0,1	288,6±0,1	287,50±0,07	306,46±0,15
400±0,5	321,1±0,1	318,3±0,1	319,72±0,07	247,80±0,11
300±0,5	364,2±0,1	367,6±0,1	365,92±0,07	189,17±0,07
250±0,5	396,2±0,1	399,9±0,1	398,07±0,07	159,85±0,06
200±0,5	437,4±0,1	443,6±0,1	440,53±0,07	130,53±0,04
150±0,5	502,4±0,1	498,5±0,1	500,46±0,07	101,13±0,03
100±0,5	591,5±0,1	595,5±0,1	593,49±0,07	71,91±0,02

Tabulka 4: Celková indukčnost cívek A, B při nesouhlasném zapojení

C [pF]	f ₁ [kHz]	f ₂ [kHz]	f _r [kHz]	$\omega^{-2} \cdot 10^{15}$ [s ²]
500±0,5	373,7±0,1	382,3±0,1	378,02±0,07	177,26±0,07
400±0,5	421,4±0,1	416,4±0,1	418,92±0,07	144,34±0,05
300±0,5	481,7±0,1	476,2±0,1	478,97±0,07	110,41±0,03
250±0,5	525,0±0,1	517,9±0,1	521,45±0,07	93,16±0,03
200±0,5	579,2±0,1	572,6±0,1	579,19±0,07	75,51±0,02
150±0,5	660,0±0,1	648,5±0,1	654,26±0,07	59,17±0,01
100±0,5	769,3±0,1	775,8±0,1	772,51±0,07	42,44±0,01

Tabulka 5: Rezonanční křivka

výchylka y ² f [kHz]	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
výchylka y ² f [kHz]	313,2	315,4	316,4	317,1	317,6	317,9	318,3	318,6	319,0	319,7
výchylka y ² f [kHz]	45	40	35	30	25	20	15	10	5	
výchylka y ² f [kHz]	320,4	320,8	321,1	321,4	321,8	322,2	322,8	323,8	325,4	

Tabulka 6: Kalibrace kondenzátoru

výchylka	0	10	20	30	40	50	60
C ₂ [pF]	951,5±0,5	953,5±0,5	951,5±0,5	948,5±0,5	942,5±0,5	935,0±0,5	921,0±0,5
C _x [pF]	48,5±0,7	46,5±0,7	48,5±0,7	51,5±0,7	57,5±0,7	65,0±0,7	79,0±0,7
výchylka	70	80	90	100	110	120	130
C ₂ [pF]	903,5±0,5	873,5±0,5	834,0±0,5	782,5±0,5	724,0±0,5	659,5±0,5	584,5±0,5
C _x [pF]	96,5±0,7	126,5±0,7	166,0±0,7	217,5±0,7	276,0±0,7	340,5±0,7	415,5±0,7
výchylka	140	150	160	170	180		
C ₂ [pF]	500,0±0,5	400,5±0,5	288,5±0,5	175,0±0,5	57,5±0,5		
C _x [pF]	500±0,7	599,5±0,7	711,5±0,7	825,0±0,7	942,5±0,7		

nutnost nastavit galvanometr podruhé do stejné výchylky. Přesnost tohoto není ani tak dána přesností přístroje, jako spíš schopností experimentátora nastavit požadovanou výchylku na galvanometru.

Při proměřování rezonanční křivky jsme se opět největší chyby dopustili při nastavování frekvence. Chybu jsme odhadli na $\pm 0,1$ kHz, ačkoli přesnost generátoru střídavého proudu byla mnohem vyšší. Je to dáno schopností experimentátora nastavit na galvanometru předem určenou výchylku. Při pohledu na graf 1 zjistíme, že se námi zjištěné hodnoty dobře kryjí s hodnotami teoretickými. Křivku můžeme považovat za symetrickou.

Při kalibraci kondenzátoru jsme se největší chyby dopustili při nastavování obvodu do rezonance změnou známé kapacity. Kondenzátor (který zastupoval známou kapacitu) měl poměrně drobné členění dílků. Odečet byl tedy dosti přesný, avšak při změně kapacity o několik málo pF se ručička galvanometru pohla jen nepatrně. Je zde možnost, že jsme se dopustili malé chyby. Vlastní kapacitu cívek uvažovat nemusíme, jak jsme již psali výše.

5 Závěr

Byly změřeny indukčnosti:

$$L_A = (0,2193 \pm 0,0001) \text{ mH}$$

$$L_B = (0,2497 \pm 0,0001) \text{ mH}$$

Vlastní kapacity byly stanoveny:

$$C_{0.A} = (59,81 \pm 0,08) \text{ pF}$$

$$C_{0.B} = (22,31 \pm 0,07) \text{ pF}$$

Vzájemná indukčnost cívek je:

$$M = (61,99 \pm 0,08) \text{ }\mu\text{H}$$

Rezonanční křivka pro souhlasné zapojení cívek, včetně teoretické závislosti, je v grafu 1. Míru útlumu jsme stanovili na: $d = (0,0133 \pm 0,0004)$

Činitel jakosti Q je:

$$Q = (75 \pm 3)$$

Velikost náhradního sériového odporu je:

$$R_n = (15,6 \pm 0,5) \text{ }\Omega$$

Závislost kapacity kalibrovaného kondenzátoru na výchylce ručičky na jeho stupnici vidíme v grafu 2.

6 Literatura

- [1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II, SPN, Praha
- [2] J. English: Zpracování výsledků fyzikálních měření, Praha, 2000