Pracovní úkol

1. Změřte indukčnosti L_A, L_B a vlastní kapacity C_A, C_B cívek A, B.
2. Určete vzájemnou indukčnost cívek A a B umístěných ve svorkách 1, 2 a 3, 4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vyneste do grafu.
5. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti opakujte a stanovte chybu měření.

Teoretická část

Ve střídavém obvodu je impedance Z sériového zapojení cívky o indukčnosti L, kondenzátoru o kapacitě C a odporu R dána vztahem

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{1}$$

Při minimální impedanci teče obvodem maximální proud I_r při rezonanční frekvenci ω_r, pro kterou platí

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{2}$$

Rezonanci můžeme popsat tzv. redukovanou rezonanční křivkou, čímž rozumíme závislost poměrné hodnoty proudu $y = I/I_\mathrm{r}$ na rozladění $x = \omega/\omega_\mathrm{r}$. Tato závislost je popsána vztahem

$$y = \sqrt{\frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \tag{3}$$

kde

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{4}$$

Takto zavedenou veličinu d nazýváme mírou útlumu a charakterizuje šířku rezonanční křivky. Pro $y^2 = 1/2$ je přesně rovna $|x_1 - x_2|$. Míru útlumu d lze také definovat vztahem

$$d = \frac{R}{\omega_\mathrm{r} L}. \tag{5}$$

Převrácenou hodnotu d nazýváme činitel jakosti Q

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_\mathrm{r} L}{R}, \tag{6}$$

kde R je náhradní sériový odpor obvodu.

Indukčnost cívky vyjádříme ze vztahu (2)

$$L = \frac{1}{\omega_\mathrm{r}^2 C}, \tag{7}$$

kde C je součet parazitní kapacity cívky a kapacity zapojeného kondenzátoru. Vlastní kapacitu cívky určíme tak, že na sériovém připojení kondenzátoru nastavíme kapacitu C_1 a změnou kmitočtu vyhledáme rezonanční frekvenci f_1. Poté zvýšíme frekvenci na dvojnásobek a změnou kapacity na hodnotu C_2 opět nastavíme rezonanční frekvenci. Vlastní kapacitu cívky C_0 vypočítáme

$$C_0 = \frac{C_1 - 4C_2}{3}. \tag{8}$$

U dvou cívek určujeme vzájemnou indukčnost M, kterou stanovíme pomocí indukčnosti cívek v sériovém zapojení. Pro celkovou indukčnost dvou cívek o indukčnostech L_A a L_B zapojených do série platí

$$L = L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B} \pm 2M. \tag{9}$$

Kladné resp. záporné znaménko platí pro souhlasný resp. nesouhlasný směr vinutí v cívkách. Změřímeli tedy indukčnost L_1 při souhlasném směru vinutí a L_2 při nesouhlasném, vzájemnou indukčnost určíme podle vztahu

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} \tag{10}$$

Kapacitu kondenzátoru určíme diferenční metodou, kdy obvod vyladíme do rezonance při známé kapacitě C_1. Poté paralelně připojíme kondenzátor neznámé kapacity C a změnou kapacity C_1 uvedeme obvod opět do rezonance. Kapacitu neznámého kondenzátoru určíme dle vztahu

$$C = C_1 - C_2. \tag{11}$$

Měření

Nejprve jsem změřila parazitní kapacity cívek dle metody popsané v teoretické části. Pro měření s cívkou A a B jsem použila rezonanční frekvenci odpovídající kapacitě $C = 500\,\mathrm{pF}$. Pro jejich sériové zapojení s komutátorem v poloze I a II byla použita frekvence odpovídající kapacitě $C = 600\,\mathrm{pF}$.

Protože v rezonanční křivce je v oblasti maxima změna výchylky nejméně citlivá na změny nastavovaných hodnot, určovala jsem vždy rezonanční frekvenci f_r jako aritmetický průměr frekvencí f_1 a f_2, při kterých galvanometr ukazoval stejnou hodnotu výchylky.

Naměřená data jsou v Tabulce 1. Chyby určení kapacit vychází z nepřesného určení maxima rezonance, což odhaduji na 1 pF.

Výsledné parazitní kapacity vypočítané dle vztahu (7) tedy jsou:

$$C_\mathrm{A} = (59 \pm 2)\,\mathrm{pF}$$

$$C_\mathrm{B} = (16 \pm 2)\,\mathrm{pF}$$

$$C^\mathrm{I}_\mathrm{A+B} = (21 \pm 2)\,\mathrm{pF}$$

	$f\,$[kHz]	$C_a\,$[pF]	$C_b\,$[pF]	$C_0\,$[pF]
cívka A	920.7	78	84	59
cívka B	993.8	111	114	16
cívky A+B poloha I	532.4	131	138	21
cívky A+B poloha II	689.8	130	140	20

Tabulka 1.: Měření vlastních kapacit cívek

$$C^{\mathrm{II}}_{\mathrm{A+B}} = (20 \pm 2)\,\mathrm{pF}$$

$$C^{\mathrm{vypo\check{c}}}_{\mathrm{A+B}} = (13 \pm 2)\,\mathrm{pF}$$

$C^{\mathrm{vypo\check{c}}}_{\mathrm{A+B}}$ označuje vypočítanou kapacitu cívek určenou z kapacit samostatných cívek dle vztahu $\frac{1}{C^{\mathrm{vypo\check{c}}}_{\mathrm{A+B}}} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}$.

Indukčnosti cívek jsem měřila pro tři různé kapacity. Naměřené hodnoty udává Tabulka 2. Indukčnosti cívek určených jako střední hodnoty indukčností vypočítaných pro různé kapacity dle vztahu (6) jsou

$$L_{\mathrm{A}} = (0.215 \pm 0.001)\,\mathrm{mH}$$

$$L_{\mathrm{B}} = (0.246 \pm 0.002)\,\mathrm{mH}$$

$$L^{\mathrm{I}}_{\mathrm{A+B}} = (0.579 \pm 0.005)\,\mathrm{mH}$$

$$L^{\mathrm{II}}_{\mathrm{A+B}} = (0.344 \pm 0.003)\,\mathrm{mH}$$

Chyby vlastních indukčností byly získány pomocí standardní teorie šíření chyb z chyb kapacit uvedených výše a z chyb odhadnutých.

Ze vztahu (9) nyní určíme vzájemnou indukčnost M

$$M = (0.059 \pm 0.003)\,\mathrm{mH}$$

Rezonanční křivku jsem proměřila pro cívku A při kapacitě zapojeného kondenzátoru $C = 500\,\mathrm{pF}$. Naměřená data jsou uvedena v Tabulce 3. Grafické zpracování je vyneseno v Grafu 1.

Pomocí programu `Gnuplot` jsem naměřenou závislost proložila křivkou danou předpisem (3). Výsledky regrese pro neznámé parametry křivky d, y_{r}^2 a f_{r} jsou

$$d = (0.0429 \pm 0.0005)$$

$$y_{\mathrm{r}}^2 = (48.3 \pm 0.4)\,\text{dílků}$$

$$f_{\mathrm{r}} = (458.6 \pm 0.1)\,\mathrm{kHz}$$

Při použití metody aritmetického průměru dvou frekvencí při stejné výchylce galvanometru dojdeme k hodnotě $f_{\mathrm{r}} = (458.7 \pm 0.2)\,\mathrm{kHz}$, což je v dobré shodě s hodnotou zjištěnou regresí.

Nyní dle vztahu (5) můžeme určit činitel jakosti Q a náhradní sériový odpor R.

$$Q = 23.3 \pm 0.3$$

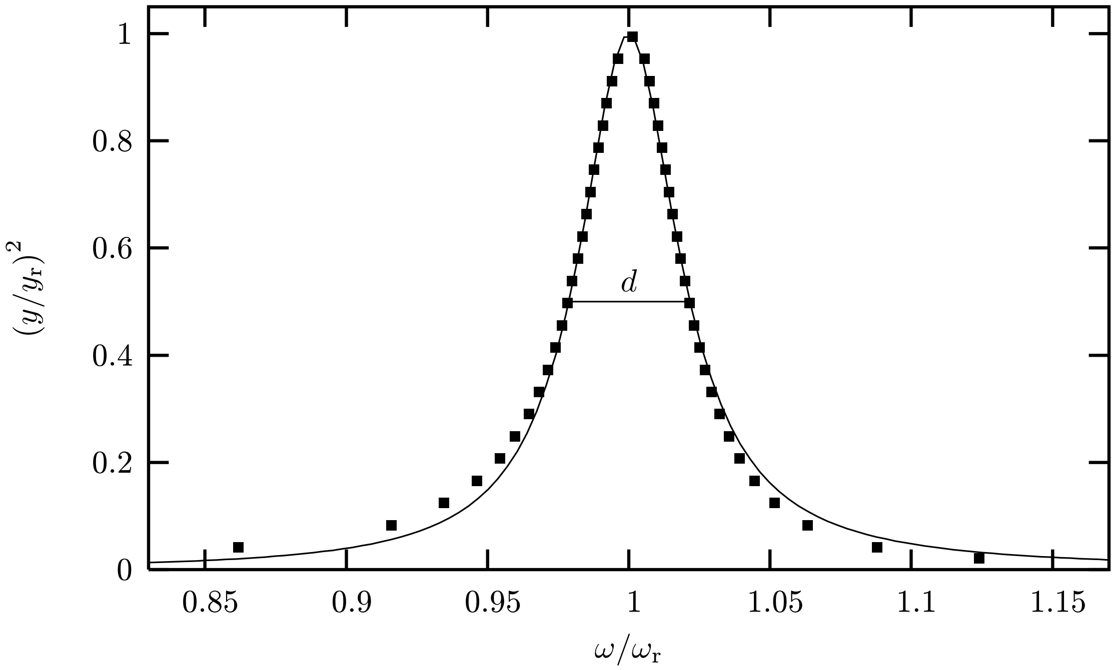
$$R = (26.6 \pm 0.3)\,\Omega$$

Cívka A			
C[pF]	f_1[kHz]	f_2[kHz]	L_A[mH]
500	468.6	452.4	0.21
800	362.9	376.3	0.22
1000	337.7	327.6	0.22
Cívka B			
C[pF]	f_1[kHz]	f_2[kHz]	L_B[mH]
500	439.4	454.7	0.25
800	360.9	350.1	0.25
1000	312.8	324.0	0.25
Cívky A+B poloha I			
C[pF]	f_1[kHz]	f_2[kHz]	$L^\mathrm{I}_\mathrm{A+B}$[mH]
600	269.0	263.6	0.58
800	232.8	228.2	0.58
1000	208.4	205.3	0.58
Cívky A+B poloha II			
C[pF]	f_1[kHz]	f_2[kHz]	$L^\mathrm{II}_\mathrm{A+B}$[mH]
600	349.1	341.0	0.34
800	303.1	395.7	0.35
1000	271.9	265.4	0.35

Tabulka 2.: Měření indukčnosti cívek

f[kHz]	y^2	f[kHz]	y^2	f[kHz]	y^2	f[kHz]	y^2
515.5	1	468.5	24	459.2	48	448.7	24
498.9	2	467.8	26	456.9	46	447.8	22
487.6	4	467.1	28	455.9	44	446.8	20
482.3	6	466.4	30	455.1	42	445.6	18
479.1	8	465.8	32	454.4	40	444.1	16
476.6	10	465.2	34	453.8	38	442.5	14
474.9	12	497.6	36	453.0	36	440.1	12
473.3	14	464.1	38	452.4	34	437.7	10
472.0	16	463.4	40	451.8	32	434.0	8
471.0	18	462.7	42	451.1	30	428.6	6
470.1	20	462.0	44	450.4	28	420.1	4
469.2	22	461.2	46	449.4	26	395.3	2
						357.7	1

Tabulka 3.: Rezonanční křivka pro cívku A při kapacitě kondenzátoru $C = 500\,\mathrm{pF}$



Graf 1.: Rezonanční křivka cívky A při kapacitě $C = 500\,\mathrm{pF}$. Křivkou je vynesena teoretická závislost dle rovnice (3).

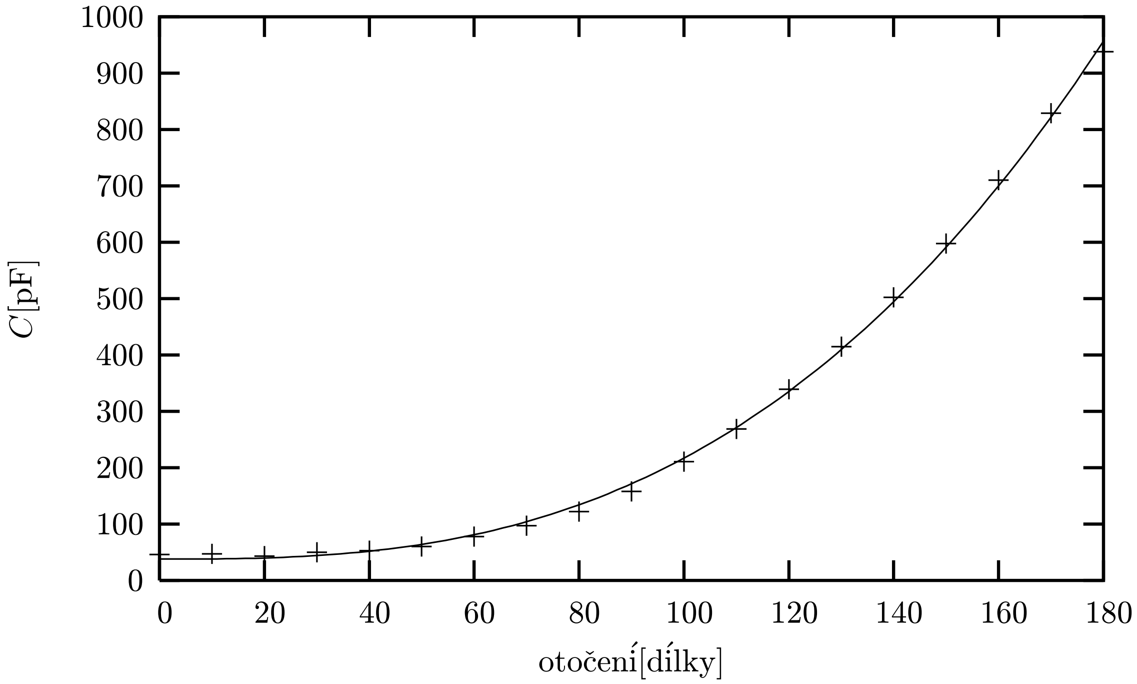
Kalibraci otočného kondenzátoru jsem provedla dle metody popsané v Teoretické části. Zjištěné hodnoty jsou uvedeny v Tabulce 4. Počáteční kapacita kondenzátoru byla $C_1 = 1100\,\mathrm{pF}$. Chybu měření odhaduji na 5 pF.

Grafické zpracování je zaneseno do Grafu 2. Naměřená data jsem proložila pomocí programu `Gnuplot` závislostí ve tvaru $f(\mathrm{x}) = a + b \cdot \mathrm{x}^c$. Výsledné hodnoty parametrů jsou

$$a = (38 \pm 6)\,\mathrm{pF}$$
$$b = (0.00049 \pm 0.00010)\,\mathrm{pF}$$
$$c = (2.78 \pm 0.05)$$

otočení	C_2[pF]	C[pF]	otočení	C_2[pF]	C[pF]
0	1054	46	100	889	211
10	1053	47	110	831	269
20	1057	43	120	761	339
30	1050	50	130	685	415
40	1047	53	140	598	502
50	1040	60	150	502	598
60	1022	78	160	390	710
70	1003	97	170	271	829
80	978	122	180	162	938
90	942	158			

Tabulka 4.: Kalibrace otočného kondenzátoru



Graf 2.: Kalibrace otočného kondenzátoru. Křivka označuje teoretické proložení mocninnou funkcí.

Diskuze

V této úloze je velmi obtížné stanovit chyby měření. Největší vliv má určení místa rezonance. Tuto chybu lze částečně eliminovat, změříme-li dvě frekvence při stejné výchylce galvanometru. Jejich průměr je hledaná rezonanční frekvence. Také opakováním měření pro různé hodnoty kapacity a výpočtem váženého průměru lze zpřesnit výsledek. U vlastních kapacit ovšem nastavujeme dvojnásobnou frekvenci a do rezonance uvádíme obvod změnou kapacity, takže podobný postup není možný.

Při zjišťování parazitních kapacit cívek zapojených do série se ukázalo, že experimentální a teoretická hodnota kapacity se značně liší. Z rozdílu teoretické a naměřené hodnoty vyplývá, že při zapojení obou cívek vzniká v obvodu ještě nějaká jiná kapacita. Při dalších výpočtech jsem použila experimentálně zjištěnou kapacitu, proto by tento rozdíl neměl mít vliv na přesnost měření.

Jak lze vidět z Grafu 1, tvar rezonanční křivky odpovídá předpokladům. Pro kalibrační křivku u otočného kondenzátoru byl nalezen empirický vztah.

Závěr

V tomto praktiku jsem se seznámila s RCL obvodem. Změřila jsem jeho důležité parametry a pozorovala rezonanční křivku.

Provedla jsem kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou, přičemž jsem zjistila nelineární závislost kapacity na otočení, kterou lze velmi dobře aproximovat mocninnou funkcí.

Literatura

[1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II., SPN, Praha 1989