

Pracovní úkoly

1. Změřte indukčnosti L_A , L_B a vlastní kapacity C_A , C_B cívek A a B.
2. Z měření celkové indukčnosti $L_{1,2}$ cívek A a B určete jejich vzájemnou indukčnost M . Diskutujte platnost vztahu mezi vzájemnou indukčností M , indukčnostmi cívek L_A , L_B a celkovou indukčností $L_{1,2}$.
3. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.

Teoretická část

Rezonanční frekvence RLC obvodu

Pro sériový obvod s indukčností L , kapacitou C a odporem R bude při udržování konstantního efektivního napětí U v obvodu největší efektivní proud I_r při úhlové frekvenci

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (1)$$

V paralelním zapojení stejných součástí bude při této úhlové frekvenci a udržování konstantního proudu I na prvcích obvodu maximální napětí U_r . Frekvenci $f_r = \omega_r/2\pi$ pak nazveme rezonanční frekvencí. V sériovém obvodu s touto frekvencí mluvíme o proudové rezonanci, v paralelním obvodu o napěťové rezonanci.¹

Redukovaná rezonanční křivka

Závislost hodnoty $y = I/I_r$ pro sériový obvod, případně $y = U/U_r$ pro paralelní, na rozdělení $x = \omega/\omega_r$ nazýváme redukovanou rezonanční křivkou. Pokud označíme pro sériový obvod

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad , \quad (2)$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_r} = \omega\sqrt{LC} \quad , \quad (3)$$

dostáváme vztah pro popis redukované rezonanční křivky

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \quad , \quad (4)$$

Pro paralelní obvod dostaneme stejný vztah zavedením

$$d = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (5)$$

Veličina d se nazývá mírou útlumu a charakterizuje šířku rezonanční křivky. Při $y^2 = 0,5$ platí

$$d = |x_1 - x_2| \quad , \quad (6)$$

(8) Měření impedancí rezonanční metodou

kde x_1 a x_2 jsou symetrické hodnoty redukováných frekvencí.¹

Ztráty energie v obvodu jsou především určeny vlastnostmi cívky, ztráty v kondenzátoru jsou běžně vůči cívám zanedbatelné. Zavádíme pak činitel jakosti cívky

$$Q = \frac{\omega_r L}{R_S} \quad , \quad (7)$$

což je převrácená hodnota míry útlumu a R_S je sériový náhradní odpor.¹

Měření indukčnosti a vlastní kapacity cívek

Reálné cívky mají nenulovou vlastní (parazitní) kapacitu C_0 , podle (1) pak bude v RLC obvodu platit

$$\frac{1}{\omega_r^2} = L(C_N + C_0) \quad , \quad (8)$$

C_N je kalibrační kapacita měřícího přístroje – Q-metru (schéma na obrázku 1). Pomocí lineární regrese tedy můžeme určit jak indukčnost, tak parazitní kapacitu cívky.¹

Vzájemná indukčnost cívek

Změřením celkové indukčnosti obou cívek zapojených v sérii pro souhlasný směr vinutí L_1 a pro opačný směr vinutí L_2 určit vzájemnou indukčnost M podle

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} \quad . \quad (9)$$

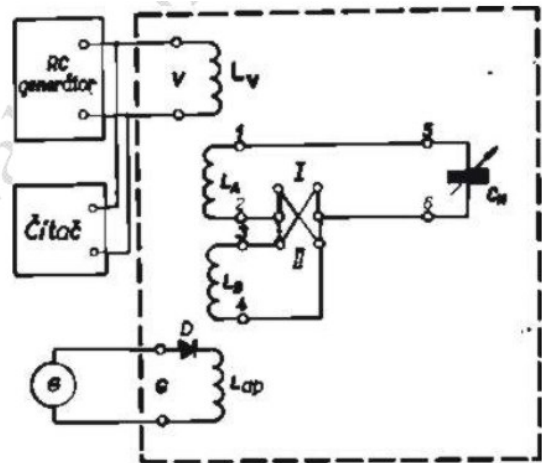
Dále také platí vzorec

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M \quad . \quad (10)$$

Kalibrace kondenzátoru

Pokud připojíme měřený kondenzátor paralelní ke kondenzátoru v Q-metru, můžeme diferenční metodou určit jeho kapacitu. Nastavením rezonance obvodu při nejvyšší možné kapacitě vestavěného kondenzátoru C_1 a následným připojením měřeného kondenzátoru C_X a opětovným uvedením obvodu do rezonance pomocí změny kapacity vestavěného kondenzátoru na C_2 můžeme určit kapacitu C_X podle¹

$$C_X = C_1 - C_2 \quad . \quad (11)$$



Obrázek 1. Schéma Q-metru

Výsledky měření

Vnější podmínky (a jejich změny) mají na měřené veličiny zanedbatelný vliv, nebyly tedy přesně určeny. Experimenty probíhaly za pokojové teploty.

Indukčnost a vlastní kapacity cívek

Hodnoty rezonanční frekvence byly určeny odečtením dvou symetrických hodnot frekvencí na rezonanční křivce (tedy při symetrických výchylkách na galvanometru) a dopočtením jejich aritmetického průměru, rezonanční křivka je v oblasti maxima nejméně citlivá na změny frekvence což dělá zvolenou metodu za předpokladu symetričnosti křivky přesnější.

Hodnoty byly určeny pro obě cívky při vnitřních kapacitách Q-metru C_N od 100 pF do 1100 pF a jsou v tabulce 1 včetně dopočtených hodnot $1/\omega_r^2$.

Tabulka 1. Určené hodnoty rezonančních frekvencí a hodnoty $1/\omega_r^2$

C_N [pF]	f_A [kHz]	$1/\omega_{rA}^2$ [$10^{-14}s^2$]	f_B [kHz]	$1/\omega_{rB}^2$ [$10^{-14}s^2$]
100	836,65	3,6	877	3,3
200	645,30	6,1	661,65	5,8
300	562,60	8,0	552,95	8,3
400	498,70	10,2	485	1,1
500	452,60	12,4	437,3	1,3
600	417,20	14,6	401,2	1,6
700	389,00	16,7	372,95	1,8
800	374,90	18,0	349,8	2,1
900	346,45	21,1	330,6	2,3
1000	329,80	23,3	314,2	2,6
1100	315,35	25,5	300,05	2,8

Lineární regrese podle (8) provedenou softwarem Origin byly určeny $L_A = (216 \pm 3) \mu H$, $C_A = (82 \pm 9) pF$, $L_B = (248,37 \pm 0,08) \mu H$ a $C_B = (33,2 \pm 0,2) pF$. Chyba indukčnosti odpovídá statistické chybě v lineárním členu regrese, chyba vlastních kapacit byla dopočtena

vzorcem $\sigma_{C_i} = C_i \sqrt{\sigma_{L_i}^2 + \sigma_{b_i}^2}$, kde σ_{b_i} je statistická chyba konstantního koeficientu regrese.

Vzájemná indukčnost cívek

Měření vzájemné indukčnosti probíhalo při sériovém zapojení cívek podle schématu na obrázku 1, zapojením 1 a 2 (čemuž odpovídají indexy) se myslí příslušné polohy komutátoru. Měření probíhá stejně, jako měření indukčnosti jednotlivých cívek, pro jednotlivé polohy komutátoru byly určeny rezonanční frekvence a provedena lineární regrese podle (8).

(8) Měření impedancí rezonanční metodou

Tabulka 2. Určené hodnoty rezonančních frekvencí pro sériová zapojení cívek

C_N [pF]	f_1 [kHz]	$1/\omega_{r2}^2$ [$10^{-14} s^2$]	f_2 [kHz]	$1/\omega_{r2}^2$ [$10^{-14} s^2$]
100	573,8	7,7	750,65	4,5
200	432,95	13,5	570,5	7,8
300	362,3	19,3	476,2	11,2
400	318,05	25,0	417,85	14,5
500	291,95	29,7	376,8	17,8
600	262,95	36,6	345,9	21,2
700	244,55	42,4	321,55	24,5
800	229,45	48,1	300,5	28,6
900	216,85	53,9	283,9	31,4
1000	206,1	59,6	269,85	34,8
1100	196,8	65,4	257,75	38,1

Hodnoty L_1 a L_2 byly určeny jako $L_1 = (578 \pm 3) \mu H$ a $L_2 = (337,0 \pm 0,7) \mu H$.

Podle (9) byla určena vzájemná indukčnost jako $M = (60,2 \pm 0,4) \mu H$. Odchylka byla určena

$$\text{podle } \sigma_M = M \sqrt{\left(\frac{\sigma_{L_1}}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{L_2}}{L_2}\right)^2}.$$

Redukovaná rezonanční křivka a náhradní sériový odpor

Při $C_N = 600 \text{ pF}$ byly symetricky měněny frekvence kolem rezonanční frekvence podle tabulky 2, tedy $f_r = 262,9 \text{ kHz}$, při zapojení odpovídajícímu měření L_1 . Byla odečítána výchylka galvanometru, která je přímo úměrná I^2 .

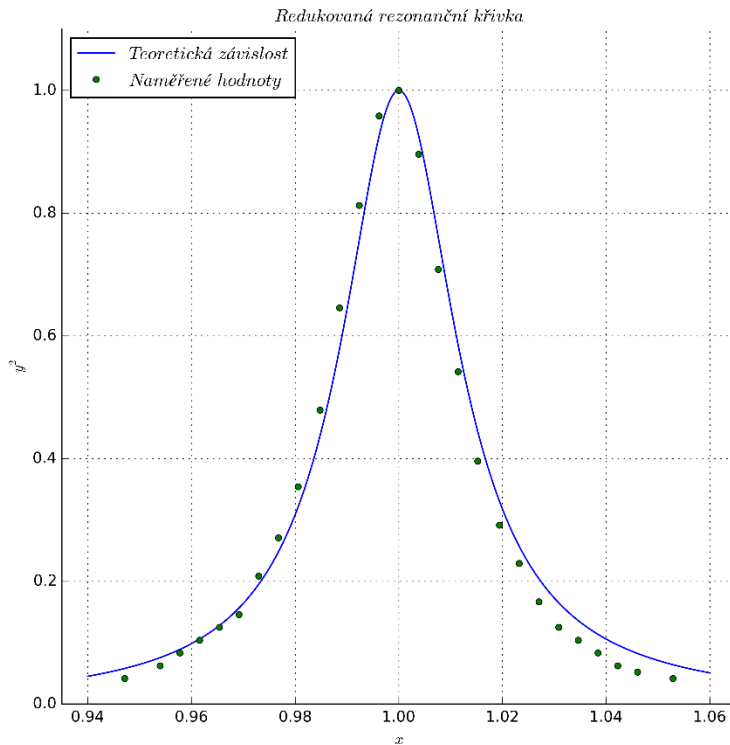
Tabulka 3. Hodnoty pro určení rezonanční křivky

f [kHz]	dílky	y^2	x	f [kHz]	dílky	y^2	x
262,9	48	1	1	263,9	43	0,86	1,004
261,9	46	0,958	0,996	264,9	34	0,708	1,008
260,9	39	0,813	0,992	265,9	26	0,542	1,011
259,9	31	0,646	0,989	266,9	19	0,396	1,015
258,9	23	0,479	0,985	268	14	0,292	1,019
257,8	17	0,354	0,981	269	11	0,229	1,023
256,8	13	0,271	0,977	270	8	0,167	1,027
255,8	10	0,208	0,973	271	6	0,125	1,031
254,8	7	0,146	0,969	272	5	0,104	1,035
253,8	6	0,125	0,965	273	4	0,083	1,038
252,8	5	0,104	0,962	274	3	0,063	1,042
251,8	4	0,083	0,958	275	2,5	0,052	1,046
250,8	3	0,063	0,954	276,8	2	0,042	1,053
249	2	0,042	0,947				

Pomocí lineární interpolace mezi body kolem $y^2 = 0,5$ byly určeny aproximativní hodnoty při $y^2 = 0,5$ jako $x_1 = 0,985$ a $x_2 = 1,012$ a podle (6) byla určena hodnota $d = (0,027 \pm 0,003)$,

(8) Měření impedancí rezonanční metodou

chyba byla odhadnutá. Fitováním teoretické závislosti (4) na naměřené hodnoty pomocí knihovny scipy dostáváme hodnotu $d_{fit} = (0,0265 \pm 0,0006)$, chyba zde odpovídá pouze statistické chybě.



Obrázek 2. Redukovaná rezonanční křivka, pro teoretickou závislost platí $d = 0,027$.

Činitel jakosti je dán jako $1/d$, tedy $Q = (38 \pm 4)$, chyba byla určena přenesením relativní chyby hodnoty d .

Náhradní sériový odpor byl určen pomocí (7) jako $R_S = (26 \pm 3) \Omega$, parametry kruhové frekvence a indukčnosti odpovídají měření rezonanční křivky (pomocí které byl určen parametr Q). Chyby kruhové frekvence a indukčnosti byly oproti chybě činitele jakosti zanedbány, chyba náhradního sériového odporu tedy byla určena přenesením relativní chyby.

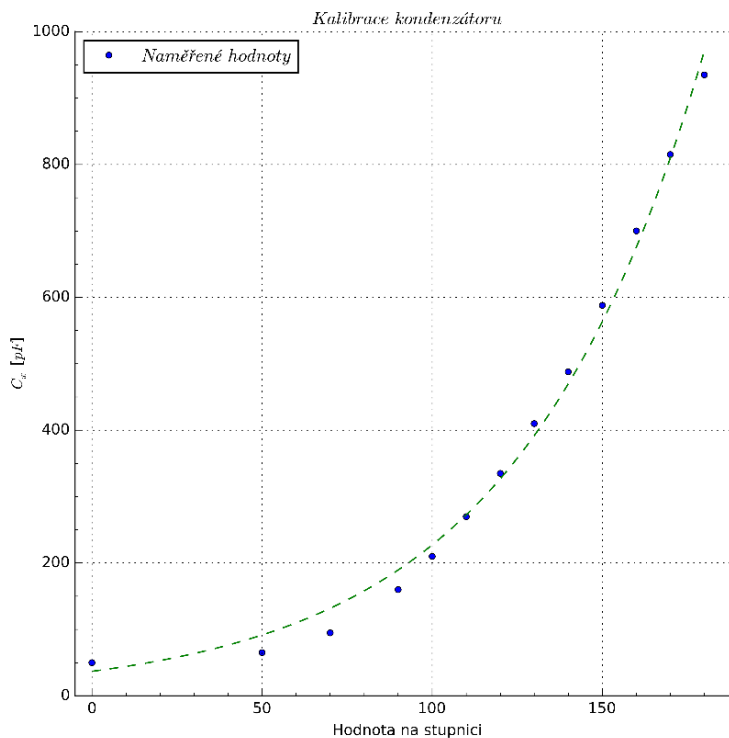
Kalibrace kondenzátoru

Na kondenzátoru Q-metru byla nastavena rezonance při kapacitě $C_1 = 1000 \text{ pF}$. Následně byl připojený kondenzátor ke kalibraci v poloze 0. Postupně byla zvyšována hodnota na kalibrovaném kondenzátoru a změnami kapacity ve Q-metru byl obvod uváděn do rezonance. Podle (11) pak byla dopočtena kapacita kalibrovaného kondenzátoru.

(8) Měření impedancí rezonancí metodou

Tabulka 4. Kalibrace kondenzátoru.

Hodnota na stupnici	C_2 [pF]	C_x [pF]
0	950	50
50	935	65
70	905	95
90	840	160
100	790	210
110	730	270
120	665	335
130	590	410
140	512	488
150	412	588
160	300	700
170	185	815
180	65	935



Obrázek 3. Kalibrace otočného kondenzátoru

Graf závislosti hodnoty na stupnici na kapacitě otočného kondenzátoru je proložený exponenciální závislostí $y = C_0 \exp(kx)$.

Diskuze

Při určování indukčností a vlastních kapacit cívek je pro provedení lineární regrese důležitá podmínka zanedbatelné chyby kapacity Q-metru vůči chybě kvadrátu rezonanční frekvence.² K určení rezonanční frekvence byl použit průměr pouze dvou hodnot, lze i přes přesnost použitého čítače předpokládat, že chyba je alespoň v řádu desetin kHz (chyba vznikla zejména kvůli citlivosti galvanometru, která pro některé hodnoty nebyla dostatečná), u hodnoty kapacity Q-metru předpokládáme mnohem vyšší přesnost. Podmínka pro provedení lineární regrese je tedy splněna.

Větší chyba určení indukčnosti a vlastní kapacity u cívky A je způsobena zejména jednou pravděpodobně nepřesně určenou rezonanční frekvencí (při hodnotě kapacity $C_N = 800\text{pF}$), která se jediná viditelně odchyľuje od předpokládané závislosti.

U měření vzájemné indukčnosti je větší chybou zatížena hodnota L_1 , opět jde o chybu vzniklou odchýlením jediného bodu od předpokládané závislosti.

Lineární regrese byla provedena pro dostatečné množství bodů aby byly redukovány chyby měření a proto je zanedbáváme.

Určením hodnot L_1' a L_2' podle (10) z určených hodnot indukčností jednotlivých cívek a vzájemné indukčnosti dostáváme $L_1' = 584,6\ \mu\text{H}$, $L_2' = 343,8\ \mu\text{H}$. To se od hodnot určených z měření $L_1 = (578 \pm 3)\ \mu\text{H}$ a $L_2 = (337,0 \pm 0,7)\ \mu\text{H}$ liší jen v řádu jednotek. Vztah (10) můžeme považovat za přesný.

Rezonanční křivka přibližně odpovídá předpokládané teoretické závislosti, ale je vidět, že frekvence považovaná za rezonanční se od reálné rezonanční frekvence mírně liší (z nesymetrie bodů). Parametr d byl určen lineární interpolací v okolí bodů $y^2 = 0,5$, fitováním naměřených hodnot na teoretickou závislost byla určena podobná hodnota a můžeme předpokládat, že se parametr d opravdu nachází v rozsahu odhadnuté chyby.

Při kalibraci kondenzátoru vzniká chyba nepřesným určením rezonance při změně vnitřní kapacity. Naměřené hodnoty byly proloženy exponenciální závislostí kvůli velkému nárůstu se zvyšujícími se hodnotami na stupnici. Tato závislost odpovídá naměřenému průběhu pro vyšší hodnoty na stupnici, pro nižší by bylo potřeba další korekce. Protože však neznáme závislost kapacity na hodnotách na stupnici (ta závisí zejména na tvaru desek kondenzátoru), necháváme pouze exponenciální fit.

Závěr

Indukčnosti jednotlivých cívek byly určeny jako

$$L_A = (216 \pm 3)\ \mu\text{H},$$

$$L_B = (248,37 \pm 0,08)\ \mu\text{H},$$

vlastní kapacity cívek jako

$$C_A = (82 \pm 9)\ \text{pF},$$

$$C_B = (33,2 \pm 0,2)\ \text{pF},$$

a vzájemná indukčnost

$$M = (60,2 \pm 0,4)\ \mu\text{H}.$$

(8) Měření impedancí rezonanční metodou

Platnost vzorce (10) byla ověřena. Dále byl měřením ověřen model rezonanční křivky.

Míra útlumu při zapojení 1 byla určena jako

$$d = (0,027 \pm 0,003),$$

činitel jakosti cívky

$$Q = (38 \pm 4),$$

a náhradní sériový odpor při $C_N = 600 \text{ pF}$ jako

$$R_S = (26 \pm 3) \Omega.$$

Výsledek kalibrace otočného kondenzátoru diferenční metodou je vyneseno v grafu na obrázku 3.

Použité zdroje

[1] Kolektiv ZFP KVOF MFF UK. Studijní text k měření: Měření impedancí rezonanční metodou [cit. 2018-11-3]. Dostupné z:

https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_208.pdf

[2] ENGLICH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I.. Praha: Matfyzpress, 2006. ISBN 80-867-3293-2