

Pracovní úkol

1. Změřte indukčnosti $L(A)$, $L(B)$ a vlastní kapacity C_A , C_B cívek A a B.
2. Určete vzájemnou indukčnost M cívek A a B umístěných ve svorkách 1,2 a 3,4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.
5. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti několikrát opakujte a stanovte chybu měření.

Teorie

Rezonanční frekvence RLC obvodu

Pro sériové řazení indukčnosti L , kapacity C a odporu R platí pro impedanci Z [1]:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1)$$

kde ω je úhlová frekvence přiváděného napětí. Rezonance nastane právě, když pro úhlovou frekvenci

platí [1]:
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r \quad (2)$$

Oproti návodu uvedenému v [1] jsme upravili vztah (2) na

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L(C+C_0)}} \quad (3)$$

kde C je kapacita daného kondenzátoru a C_0 je vlastní kapacita cívky. Vlastní kapacita cívky samozřejmě přispívá k celkové kapacitě obvodu, proto při měření indukčnosti cívek a také při měření vzájemné indukčnosti je nutné jejich vlastní kapacitu zohlednit.

Redukovaná rezonanční křivka

Touto křivkou lze popsat rezonanci. Vyjadřuje závislost, kde na osu y nanášíme I/I_r a na osu x rozladění ω/ω_r . Pro sériový RLC obvod popisuje redukovanou křivku [1]:

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \quad (4)$$

kde d je tzv. míra útlumu a má význam šířky rezonanční křivky ve výšce $y^2=0,5$. Platí [1]:

$$d = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5)$$

Jeho převrácená hodnota se nazývá činitel jakosti [1].

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_r L}{R} \quad (6)$$

kde R je náhradní sériový odpor v obvodu.

Vlastní kapacita cívek

Vlastní kapacitu cívky zjistíme tak, že nalezneme rezonanční frekvenci pro C_1 , pak nastavíme frekvenci na dvojnásobek a změnou kapacity nalezneme znovu rezonanci, nyní při C_2 . Pak pro vlastní kapacitu cívky

platí [1]:
$$C_0 = \frac{C_1 - 4C_2}{3} \quad (7)$$

Vzájemná indukčnost cívek:

Dvě cívky o indukčnostech L_A a L_B a vzájemné indukčnosti M zapojíme sériově. Jejich celková indukčnost pak lze dopočítat ze vztahu [1]:

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M \quad (8)$$

kde kladné znaménko je pro souhlasný směr vinutí cívek a záporně naopak. Změříme-li celkovou indukčnost pro oba případy, získáme hodnoty L_1 a L_2 . Pak pro vzájemnou indukčnost ze vztahu (8)

vyplývá:
$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} \quad (9)$$

Kalibrace otočného kondenzátoru

Kapacitu kondenzátoru určíme diferenční metodou. Obvod s kondenzátorem o známé kapacitě C_1 vyladíme do rezonance. Pak paralelně k němu připojíme kondenzátor o neznámé kapacitě C . Změnou kapacity znovu vyladíme do rezonance. Získáme hodnotu C_2 ve vztahu [1]:

$$C = C_1 - C_2 \quad (10)$$

Schéma zapojení obvodu je uvedeno v [1] na str. 54.

Výsledky měření

Vlastní kapacita a indukčnost cívek

Měření u obou cívek jsem opakovala pro 3 hodnoty nastavené kapacity kondenzátoru C. Rezonanční frekvenci jsem neurčovala přímo, neboť je obtížné nalézt přesnou hodnotu, kdy galvanometr ukazuje největší výchylku. Proto jsem našla dvě frekvence f_1 a f_2 , pro které galvanometr ukazoval stejnou výchylku. Ty leží po obou stranách rezonanční křivky symetricky od středu, kde je rezonance. Rezonanční frekvenci f_r tedy naleznou jako aritmetický průměr f_1 a f_2 . Stejně tak jsem odečítala hodnoty kapacity pro dvojnásobnou hodnotu nalezené rezonanční frekvence.

Chybu rezonanční frekvence odhaduji na 1kHz, chybu kapacity na kondenzátoru s proměnnou kapacitou 1pF.

Tabulka I – vlastní kapacita a indukčnost cívy A

C_1 [pF]	f_1 [kHz]	f_2 [kHz]	f [kHz]	C_2^1 [pF]	C_2^2 [pF]	C_2 [pF]	C_{0A} [pF]	L [μH]
500	463	474	469	85	73	79	61,3	205,2
600	426	435	431	103	108	105,5	59,3	206,8
800	374	379	377	161	151	156	58,7	207,5

Tabulka II – vlastní kapacita a indukčnost cívy B

C_1 [pF]	f_1 [kHz]	f_2 [kHz]	f [kHz]	C_2^1 [pF]	C_2^2 [pF]	C_2 [pF]	C_{0B} [pF]	L [μH]
600	429	416	423	138	126,5	132,3	23,7	227,0
800	373	362	368	189	178	183,5	22,0	227,5
1000	333	326	330	240	224,5	232,3	23,7	227,2

Indukčnost cívy jsem vypočítala podle vztahu (3). Vypočítala jsem ze zákona o hromadění chyb odchylky indukčnosti L jednotlivých měření. Tato chyba je $\pm 1\mu\text{H}$ u cívy A a $\pm 2\mu\text{H}$ u cívy B. Chyba výsledné indukčnosti je chybou aritmetického průměru. Obdobně jsem spočetla i chybu vlastních kapacit cívek.

$$L_A = (206,5 \pm 0,6) \mu\text{H}$$

$$L_B = (227 \pm 1) \mu\text{H}$$

$$C_{0A} = (59,8 \pm 0,6) \text{pF}$$

$$C_{0B} = (23,1 \pm 0,6) \text{pF}$$

Vzájemná indukčnost cívek

Při měření i zpracování výsledků vzájemné indukčnosti jsem postupovala obdobně jako v předešlém úkolu. Znovu musíme zjistit vlastní kapacitu cívek zapojených v obvodu do série, nelze dosadit již známé vlastní kapacity.

Pro souhlasný směr vinutí cívek i nesouhlasný jsem měřila pro tři různé hodnoty kapacity kondenzátoru.

Tabulka III – indukčnost a vlastní kapacita cívek v sérii zapojených se souhlasným směrem vinutí

C_1 [pF]	f_1 [kHz]	f_2 [kHz]	f [kHz]	C_2^1 [pF]	C_2^2 [pF]	C_2 [pF]	C_{0I} [pF]	L_I [μH]
600	277	261	269	145	124	134,5	20,7	564,0
800	227	241	234	197	170	183,5	22,0	562,8
1000	218	202	210	250	216	233	22,7	561,6

Tabulka IV – indukčnost a vlastní kapacita cívek v sérii zapojených se nesouhlasným směrem vinutí

C_1 [pF]	f_1 [kHz]	f_2 [kHz]	f [kHz]	C_2^1 [pF]	C_2^2 [pF]	C_2 [pF]	C_{0II} [pF]	L_{II} [μH]
600	340	348	344	129	137	133	22,7	343,8
800	302	296	299	190	178	184	21,3	345,0
1000	271	265	268	142	178	160	120	314,9

Hodnotu L_{II} měřenou pro $C_1=1000\text{pF}$ při zpracování neuvažuji. Evidentně jsem udělala chybu při odečtu kapacity C_2 při dvojnásobné hodnotě rezonanční frekvence. Výsledná hodnota L_{II} je tedy počítána pouze ze dvou naměřených.

Chyba dílčích hodnot L_I je $\pm 6\mu\text{H}$, pro L_{II} pak $\pm 3\mu\text{H}$.

$$L_I = (563 \pm 3) \mu\text{H}$$

$$L_{II} = (344 \pm 2) \mu\text{H}$$

Ze vztahu (9) pak určím vzájemnou indukčnost cívek A a B. Její chybu jsem určila podle zákona o přenosu chyb.

$$M = (55 \pm 1) \mu\text{H}$$

Rezonanční křivka

Naměřila jsem rezonanční křivku pro cívku A a hodnotu $C=500\text{pF}$.

Maximální výchylka galvanometru byla 17 dílků, což je hodnota $y^2=1$. Rezonanční frekvence byla:

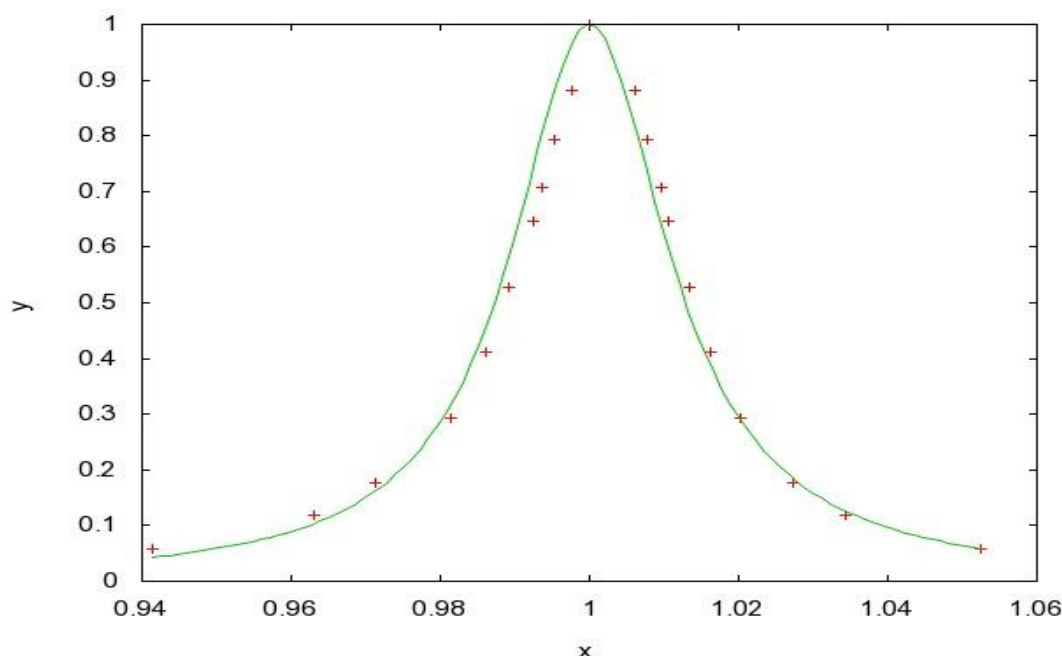
$$f_r=(468\pm 1)\text{kHz}$$

Měřila jsem vždy pro jednu hodnotu výchylky 2 frekvence - souměrné body rezonanční křivky.

Tabulka V – rezonanční křivka cívky A pro $C=500\text{pF}$

výchylka [dílký]	y^2	$f_1[\text{kHz}]$	x	$f_2[\text{kHz}]$	x
15	0,882	466,89	0,99763	470,90	1,00620
13,5	0,794	465,77	0,99524	471,66	1,00782
12	0,706	465,06	0,99372	472,51	1,00964
11	0,647	464,48	0,99248	472,97	1,01062
9	0,529	462,89	0,98908	474,31	1,01348
7	0,412	461,45	0,98603	475,62	1,01628
5	0,294	459,27	0,98135	477,43	1,02015
3	0,176	454,54	0,97124	480,77	1,02729
2	0,118	450,74	0,96312	484,06	1,03432
1	0,0589	440,58	0,94141	492,60	1,05256

Graf I – Rezonanční křivka pro cívku A a kapacitu $C=500\text{pF}$



Na grafu je na osu x nanášeno rozladění ω/ω_r , na osu y pak I/I_r . Graf rezonanční křivky jsem vytvářela programem Gnuplot. Tento program mi vypočetl hodnotu míry útlumu $d=(0,0256\pm 0,0005)$.

Poté jsem ze vztahu (5) vypočetla náhradní sériový odpor $R=(15,6\pm 0,4)\Omega$

Ze vztahu (6) pak získáme činitel jakosti $Q=(39,0\pm 0,8)$

Kalibrace otočného kondenzátoru

Postupovala jsem podle návodu, který je uveden v teoretické části. Mojí výchozí (známou) kapacitou je $C_1=1000\text{pF}$. Rezonanční frekvence při této kapacitě je $f_r=(341\pm 1)\text{kHz}$.

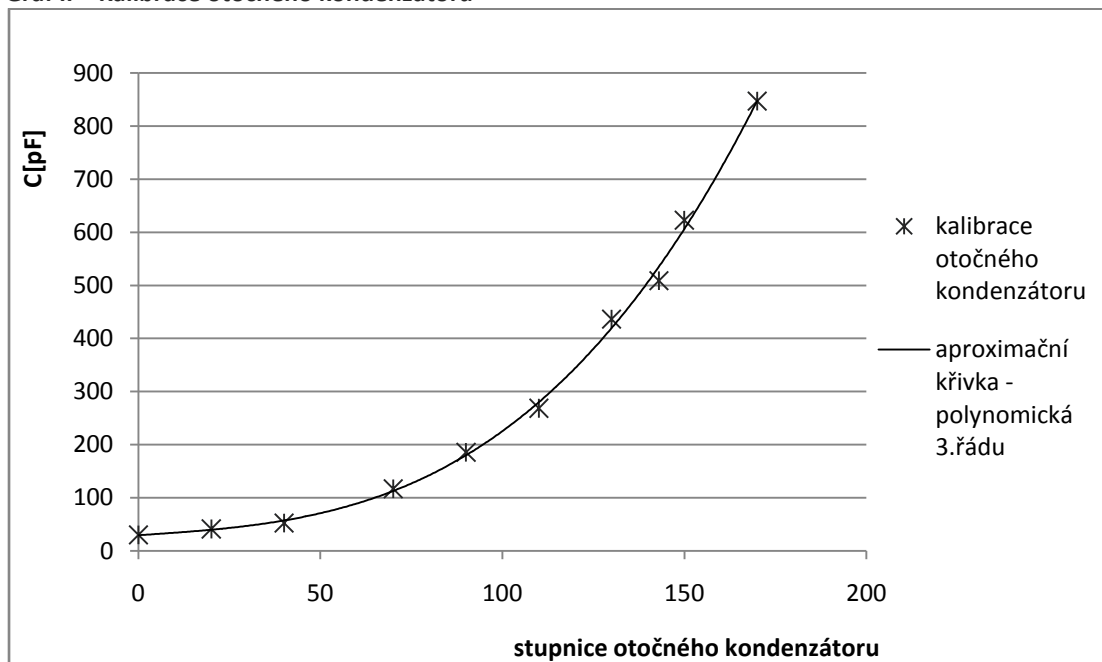
Stejně jako u úkolu 1 a 2 jsem neurčovala kapacitu C_2 přímo, ale jako průměr dvou hodnot, pro které je výchylka galvanometru stejná.

Tabulka VI – kalibrace otočného kondenzátoru

počet dílků stupnice ot.kond.	$C_2^1[\text{pF}]$	$C_2^2[\text{pF}]$	$C_2[\text{pF}]$	$C[\text{pF}]$
0	966	994	980	30
20	950	968	959	41
40	958	937,5	947,75	52,25

počet dílků stupnice ot.kond.	C_2^1 [pF]	C_2^2 [pF]	C_2 [pF]	C [pF]
70	905	862	883,5	116,5
90	780	849	814,5	185,5
110	690	773,5	731,75	268,25
130	526	602	564	436
143	525	458	491,5	508,5
150	355	400	377,5	622,5
170	163	144	153,5	846,5

Graf II – Kalibrace otočného kondenzátoru



Diskuze

Při měření bylo asi nejobtížnější určit chybu měřených veličin. Výchylka galvanometru v maximu byla nejméně citlivá, proto jsem chybu odečtu rezonanční frekvence eliminovala naměřením dvou hodnot, pro které je výchylka stejná. Hledaná frekvence pak je aritmetickým průměrem těchto dvou hodnot. Avšak stejně uvažuji chybu hledané frekvence $\pm 1\text{kHz}$ a chybu hledané kapacity $\pm 1\text{pF}$. Chybu hledaných veličin jsem snížila ještě naměřením více hodnot. Chyba aritmetického průměru je pak nižší než chyba jednoho měření. Vypočítané chyby jsou uvedeny u hodnot jednotlivých veličin. Celkově mohu říci, že jsem relativní chybu indukčnosti cívek i vlastní kapacity vypočítala nižší než 2%.

U měření rezonanční křivky jsem se teoretické závislosti přiblížila na 94%. Je to vidět také na Grafu I. Jsou v něm vyneseny naměřené hodnoty a teoretická křivka fitovaná programem Gnuplot.

Při úkolu kalibrace otočného kondenzátoru jsem opět musela naměřit dvě hodnoty kapacity při stejné výchylce galvanometru. Chybu výsledné kapacity C každého jednotlivého měření uvažuji $\pm 1\text{pF}$.

Naměřenou závislost jsem znázornila v Grafu II. Zjistila jsem dobrou shodu s aproximační polynomickou křivkou 3.řádu.

Závěr

V tomto pracovním úkolu jsem se seznámila s měřením důležitých parametrů RLC obvodu a pozorovala jsem jeho rezonanční křivku.

úkol 1: Naměřila jsem indukčnost cívky A: $L_A = (206,5 \pm 0,6) \mu\text{H}$

cívky B: $L_B = (227 \pm 1) \mu\text{H}$

Dále jsem zjistila vlastní kapacitu cívky A: $C_{0A} = (59,8 \pm 0,6) \text{pF}$

cívky B: $C_{0B} = (23,1 \pm 0,6) \text{pF}$

úkol 2: Změřila jsem vzájemnou indukčnost cívek A a B: $M = (55 \pm 1) \mu\text{H}$

úkol 3: Pro zapojenou kapacitu 500pF a cívku A jsem naměřila bod po bodu rezonanční křivku. Její průběh a srovnání s teoretickou závislostí je vykreslen v Grafu I. Naměřené hodnoty pak v Tabulce V.

Získala jsem hodnotu míry útlumu: $d = (0,0256 \pm 0,0005)$

dále také náhradního sériového odporu $R=(15,6\pm 0,4)\Omega$
a činitele jakosti $Q=(39,0\pm 0,8)$

úkol 4: Diferenční metodou jsem okalibrovala otočný kondenzátor. Výsledky měření jsou zapsány v Tabulce VI a znázorněny graficky na Grafu II.

úkol 5: Chyby měření jsou zapsány vždy u jednotlivých zjištěných veličin.

Použitá literatura

[1] Bakule, R., Šternberk, J. : Fyzikální praktikum II., SPN, Praha, 1989.