

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č.

Název:

Pracoval: stud. skup. dne

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

Pracovní úkoly

1. Změřte účinník:

- (a) rezistoru
- (b) kondenzátoru ($C = 10\mu\text{F}$)
- (c) cívky

Určete chybu měření. Diskutujte shodu výsledků s teoretickými hodnotami pro ideální prvky. Pro cívku vypočtete indukčnost a odpor v sériovém a paralelním náhradním zapojení.

- 2. Změřte účinník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru ($C = 1; 2; 5; 10\mu\text{F}$). Z naměřených hodnot stanovte odpor rezistoru. Určete chyby měření a rozhodněte, které z obou zapojení je v daném případě vhodnější pro stanovení odporu.
- 3. Změřte závislost proudu a výkonu na velikosti kapacity zařazené do sériového RLC obvodu.
- 4. Výsledky úkolu 3 zpracujte graficky, v závislosti na zařazené kapacitě vynesete účinník, fázový posuv napětí vůči proudu a výkon.

1 Teoretická část

1.1 Měření účinníku

Pro výkon (resp. příkon) P obvodu platí [1]:

$$P = UI \cos \varphi \quad (1)$$

kde U je efektivní napětí, I efektivní proud a φ fázový posun mezi nimi (ten nabývá hodnot $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a tedy $\cos \varphi \in [0, 1]$). Velikost účinníku $\cos \varphi$ je tak dána vztahem:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} \quad (2)$$

1.2 RLC obvod, komplexní reprezentace a zobecněný Ohmův zákon

V obvodech střídavého proudu neplatí tak jednoduchý vztah mezi napětím a proudem (Ohmův zákon) jako v obvodech proudu stejnosměrného. Při jejich studiu zavádíme komplexní symboliku, v níž vyjádření časové závislosti proudu a napětí nahradíme gon. funkcí komplexní exponenciálou [1]. Skutečně měřené veličiny odpovídají velikostem reálných částí jejich komplexní reprezentace. Pro komplexní proud i a napětí u pak platí zobecněný Ohmův zákon

$$u = \widehat{Z}i, \quad (3)$$

kde koeficient \widehat{Z} nazýváme impedancí. Její velikost Z lze vyjádřit pomocí maximálních nebo efektivních hodnot (ty, co měříme) I_0, I proudu a U_0, U napětí:

$$Z = |\widehat{Z}| = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I} \quad (4)$$

Ze znalosti vztahů mezi napětím a proudem na ideálních prvcích RLC obvodu můžeme nalézt impedance při jejich jednotlivém zapojení [1] (\widehat{Z}_R pro impedanci odporu, \widehat{Z}_L cívky, \widehat{Z}_C kondenzátoru):

$$\widehat{Z}_R = R, \quad \widehat{Z}_L = j\omega L, \quad \widehat{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad (5)$$

kde j je imaginární jednotka, ω úhlová frekvence, L indukčnost (např. cívky) a C kapacita. Z (5) je taktéž patrné, že impedance odporu je čistě reálná (a tedy i $Z_R = R$), zatímco kondenzátoru a cívky imaginární.

1.3 RLC v sériovém zapojení

Celkovou impedanci sériového zapojení RLC obvodu získáme součtem impedancí jednotlivých prvků:

$$\widehat{Z} = \widehat{Z}_R + \widehat{Z}_L + \widehat{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (6)$$

Tangens rozdílu fází φ dostanu jako poměr velikostí reálné a imaginární části. Při nezapojení nějakého prvku do obvodu stačí hodnotu chybějící charakteristiky vynechat (φ_C při vynechání cívky, φ_L při vynechání kondenzátoru):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}, \quad \operatorname{tg}\varphi_C = -\frac{1}{\omega RC}, \quad \operatorname{tg}\varphi_L = \frac{\omega L}{R} \quad (7)$$

Z rovnic, příp. z výše uvedené znalosti, že impedance cívky je čistě imaginární a $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$, a z (1) můžeme spočítat velikosti indukčnosti a odporu v RL obvodu pomocí měřených veličin:

$$L = \frac{Z\sin\varphi}{\omega} = \frac{U}{\omega I} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{UI}\right)^2}, \quad R = Z\cos\varphi = \frac{P}{I^2} \quad (8)$$

Analogicky lze odvodit i vztahy v sériovém RC obvodě (úkol 2) [1]:

$$R = Z\cos\varphi = \frac{U}{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{P}{I^2} \quad (9)$$

1.4 RLC v paralelním zapojení

Při tomto zapojení je na všech prvcích obvodu stejné napětí a (analogicky s obvodem stejnosměrného proudu) platí:

$$\frac{1}{\widehat{Z}} = \frac{1}{\widehat{Z}_R} + \frac{1}{\widehat{Z}_L} + \frac{1}{\widehat{Z}_C} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (10)$$

Zavedeme-li pojem admitance (\widehat{Y} , velikost Y) jako převrácenou hodnotu impedance Z [1], můžeme psát

$$\widehat{Y} = \frac{1}{\widehat{Z}} = Y e^{-j\varphi}, \quad \widehat{I} = \widehat{Y}\widehat{U}, \quad I = YU \quad (11)$$

Pak opět analogicky platí, že velikost reálné složky admitance je vodivost (tedy $1/R$), zatímco imaginární složka odpovídá kapacitě a indukčnosti obvodu (a úhlové frekvenci). Opět můžeme najít $\operatorname{tg}\varphi$ (důležité je uvědomit si opačný argument, viz. (11)) a při počítání RL nebo RC obvodu jen charakteristiku chybějící součástky vynechat.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{\omega L} - \omega RC, \quad \operatorname{tg}\varphi_C = -\omega RC, \quad \operatorname{tg}\varphi_L = \frac{R}{\omega L} \quad (12)$$

Konkrétně pak v RL obvodě můžeme vyjádřit z (11), (12) a (1) velikost R (obrácená hodnota reálné části \widehat{Y}) a L (reálná část) pomocí naměřených veličin U , I a P . V RC obvodě odpor R vyjde identicky...

$$L = \frac{U}{\omega I} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = \frac{U}{\omega I} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{UI}\right)^2}}, \quad R = \frac{1}{Y\cos\varphi} = \frac{U^2}{P} \quad (13)$$

1.5 Použité přístroje a pomůcky

Wattmetr Slouží k měření výkonu (resp. příkonu) zapojeného obvodu. Přístroj je třídy přesnosti 0.2, což při rozsahu 37.5 W (na 300 dílků stupnice) dává $u = 0.075$ W, za předpokladu rovnoměrného rozdělení potom podle [2] dostaneme směrodatnou odchylku $\sigma = \frac{u}{\sqrt{3}} = 0.04$ W. Při uvážení chyby odečítání polovinu dílku pak $\Delta P = 0.07$ W.

Analogový ampérmetr Ampérmetr byl třídy přesnosti 1.5, čemuž pak odpovídá i chyba ΔI měření podle zvoleného rozsahu, který je vždy u konkrétních výsledků specifikován.

Digitální multimetr, režim voltmetr pro střídavé napětí Multimetr má chybu 0.8 % z naměřené hodnoty a 0.1 V.

HM 8115-2 Všechny úkoly byly měřeny ještě podruhé tímto digitálním přístrojem měřícím výkon, proud a napětí zároveň. Proud je měřen s chybou 0.4% z nam. hodnoty +5 mA, napětí s chybou 0.4% z nam. hodnoty +0.5 V a výkon s chybou 0.8% z hodnoty +0.010 W.

Zdroj harmonického střídavého napětí Frekvence výstupního napětí: $f = (50.0 \pm 0.5)$ Hz ($\omega = 2\pi f$).

kondenzátorová dekáda, cívka, rezistor

1.6 Zpracování

Není-li uvedeno jinak, jsou všechny chyby počítány standartně:

$$\Delta f(x_i) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \quad (14)$$

2 Výsledky měření

2.1 Jednotlivé prvky R, L a C

Ze změřených veličin U, I a P jednoduše spočteme účinník $\cos \varphi$ podle (1). Stejně jako všechny ostatní úkoly byl i tento měřen jak pomocí wattmetru, tak pomocí HM8115-2. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce 1.

Parametry R_S, L_S náhradního sériového zapojení cívky spočteme podle (8), obdobně podle (13) parametry jejího paralelního náhradního zapojení R_P, L_P . Výsledky uvádí tab. 2.

měření s wattmetrem					
měřený prvek	P [dílky]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$
odpor	21	2.63	51.3	51	1.00 ± 0.03
	21	2.63	51.3	51	1.00 ± 0.03
kapacita ($C = 10 \mu\text{F}$)	0	0	51.5	150	0 ± 0.009
	0	0	51.5	150	0 ± 0.009
cívka	5	0.63	51.3	31	0.39 ± 0.05
	5	0.63	51.4	31	0.39 ± 0.05

s HM8115-2				
měřený prvek	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$
odpor	2.642	51.4	51	1.01 ± 0.06
kapacita	0.030	51.4	165	0.0035 ± 0.0007
cívka	0.622	51.4	30	0.40 ± 0.04

Tabulka 1: Účinník samostatných prvků při měření s wattmetrem (I naměřeno při rozsahu 100 mA pro odpor a cívku, 300 mA pro kapacitu) a s HM8115-2.

P [W]	U [V]	I [mA]	R_S [k Ω]	L_S [H]	R_P [k Ω]	L_P [H]
měření s wattmetrem						
0.63	51.3	31	0.65 ± 0.08	4.84 ± 0.16	4.21 ± 0.47	5.73 ± 0.24
0.63	51.4	31	0.65 ± 0.08	4.85 ± 0.16	4.23 ± 0.47	5.74 ± 0.24
měření s HM8115-2						
0.622	51.4	30	0.69 ± 0.14	4.99 ± 0.40	4.24 ± 0.06	5.96 ± 0.70

Tabulka 2: Hodnoty R_S, L_S náhradního sériového zapojení cívky a R_P, L_P náhr. paralelního zapojení.

2.2 RC obvod

Z naměřených hodnot U, I, P v RC obvodu spočteme účinník podle (1). Protože vlastnosti kondenzátoru se jen málo liší od ideálního (viz. tab. 1), odpor zapojeného rezistoru spočteme přímo z (9), resp. (13). Výsledky se nacházejí v tab. 3. Pro výsledné stanovení zařazeného odporu R jsem zvolil pouze hodnoty naměřené HM8115-2 v paralelním zapojení. Výsledek:

$$R = (0.997 \pm 0.027) \text{ k}\Omega$$

2.3 RLC sériový obvod

Účinník spočteme opět podle (1), absolutní hodnotu rozdílu fází dostaneme z $|\varphi| = \arccos \cos \varphi$. Rezonance byla identifikována v blízkosti $C = 2.0 \mu\text{F}$. Naměřené hodnoty jsou uvedené v tab. 4, grafické zpracování na obr. 1, 2 a 3. Protože graficky zpracovávám hodnoty naměřené HM8115-2, pro vyznačení teoretických závislostí (vyplývajících z (1), (4) a (6)) byly vybrány parametry $R = 1.0 \text{ k}\Omega$, $R_S = 0.69 \text{ k}\Omega$, $L_S = 4.99 \text{ H}$ (z tab. 2).

měření s wattmetrem

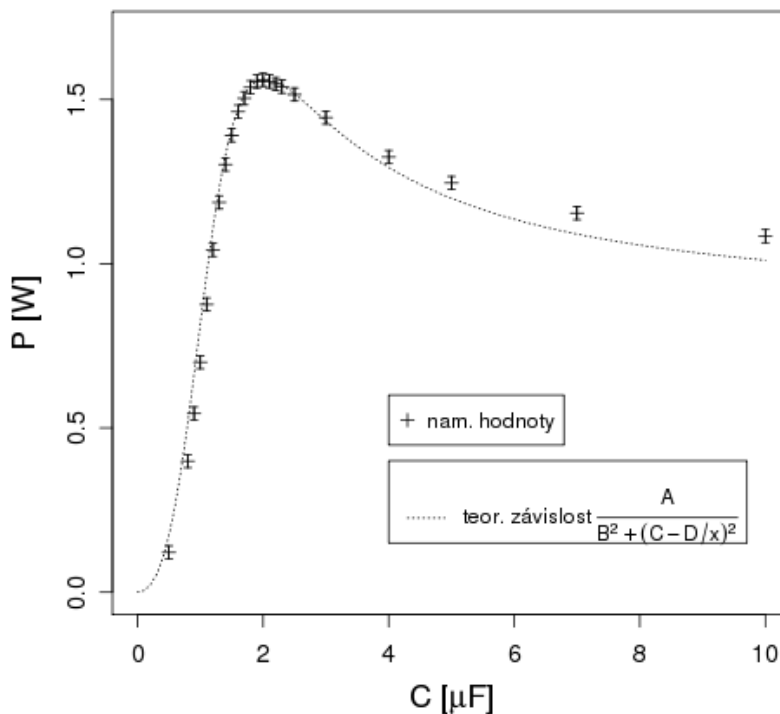
C [μF]	P [dílky]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	R [k Ω]
sériové zapojení						
1.0	2	0.25	51.7	14	0.35 ± 0.10	1.28 ± 0.39
2.0	6	0.75	51.6	25	0.56 ± 0.06	1.15 ± 0.14
5.0	15	1.88	51.45	40	0.91 ± 0.04	1.17 ± 0.08
10.0	18	2.25	51.4	45	1.03 ± 0.04	1.11 ± 0.06
paralelní zapojení						
1.0	21	2.63	51.5	54	0.94 ± 0.03	1.010 ± 0.027
2.0	21	2.63	51.5	61	0.84 ± 0.03	1.010 ± 0.027
5.0	21	2.63	51.5	99	0.51 ± 0.02	1.010 ± 0.027
10.0	21	2.63	51.4	165	0.31 ± 0.01	1.006 ± 0.027

měření s HM8115-2

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	R [k Ω]
sériové zapojení					
1.0	0.242	51.4	15	0.31 ± 0.06	1.08 ± 0.42
2.0	0.762	51.3	27	0.55 ± 0.06	1.05 ± 0.23
5.0	1.884	51.3	43	0.85 ± 0.06	1.02 ± 0.14
10.0	2.392	51.3	49	0.95 ± 0.06	1.00 ± 0.12
paralelní zapojení					
1.0	2.634	51.3	54	0.95 ± 0.05	0.999 ± 0.017
2.0	2.630	51.3	61	0.84 ± 0.04	1.001 ± 0.017
5.0	2.650	51.4	96	0.54 ± 0.02	0.997 ± 0.017
10.0	2.658	51.3	171	0.30 ± 0.01	0.990 ± 0.017

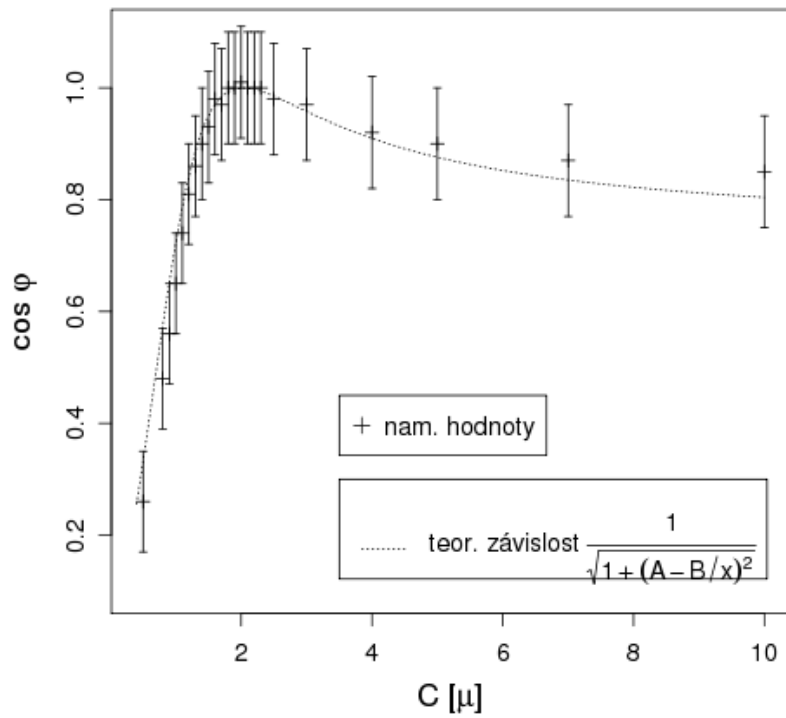
Tabulka 3: Účinník a odpor rezistoru v RC obvodech. Hodnota I byla při měření paralelního zapojení a $C = 10 \mu\text{F}$ určena za rozsahu ampérmetru 300 mA, ostatní měření probíhala při rozsahu 100 mA.

Závislost výkonu na zařazené kapacitě



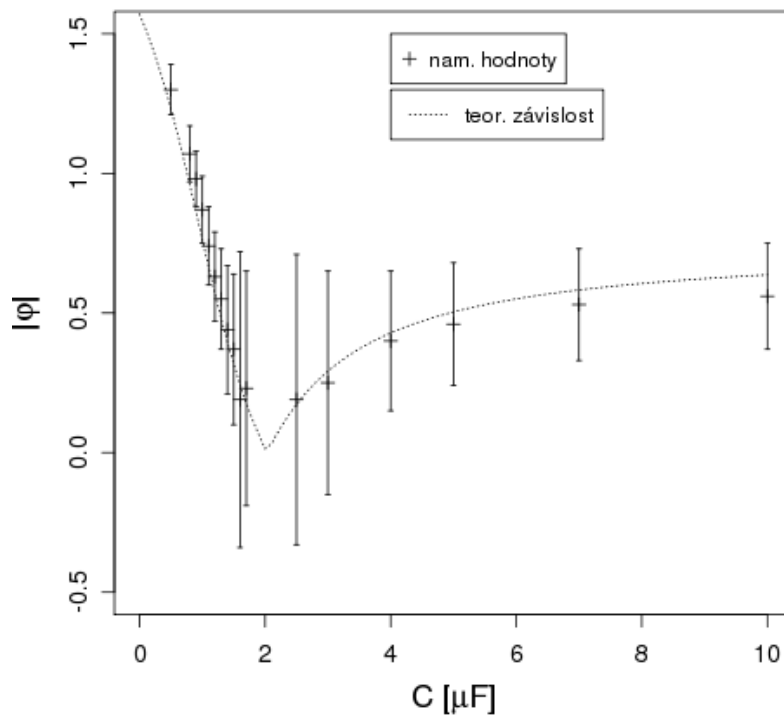
Obr. 1: Graf závislosti výkonu P na zařazené kapacitě C do RLC obvodu.

Závislost účinníku na zařazené kapacitě



Obr. 2: Graf závislosti účinníku $\cos \varphi$ na zařazené kapacitě C do RLC obvodu.

Rozdíl fází v závislosti na zařazené kapacitě



Obr. 3: Graf závislosti rozdílu fází $|\varphi|$ na zařazené kapacitě C do RLC obvodu.

měření s wattmetrem

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	$ \varphi $
0.5	0.13	51.6	8.9	0.27 ± 0.15	1.30 ± 0.16
1.0	0.75	51.5	19.8	0.74 ± 0.07	0.74 ± 0.10
1.1	0.88	51.5	21.9	0.78 ± 0.06	0.68 ± 0.10
1.2	1.00	51.4	23.7	0.82 ± 0.06	0.61 ± 0.10
1.3	1.13	51.4	25.2	0.87 ± 0.06	0.52 ± 0.11
1.4	1.25	51.3	26.1	0.93 ± 0.05	0.37 ± 0.15
1.5	1.38	51.5	27.3	0.98 ± 0.05	0.21 ± 0.24
1.6	1.50	51.35	27.9	1.05 ± 0.05	—
1.7	1.50	51.3	28.2	1.04 ± 0.05	—
1.8	1.50	51.3	28.5	1.03 ± 0.05	—
1.9	1.50	51.3	28.5	1.03 ± 0.05	—
2.0	1.63	51.4	27.9	1.13 ± 0.05	—
2.1	1.56	51.3	27.9	1.09 ± 0.05	—
2.2	1.50	51.3	27.6	1.06 ± 0.05	—
2.3	1.50	51.3	27.6	1.06 ± 0.05	—
2.5	1.50	51.25	27.3	1.07 ± 0.05	—
3.0	1.50	51.3	27.0	1.08 ± 0.05	—
4.0	1.38	51.5	26.1	1.02 ± 0.05	—
5.0	1.25	51.45	25.2	0.96 ± 0.06	0.27 ± 0.21
7.0	1.13	51.5	24.3	0.90 ± 0.06	0.45 ± 0.13
10.0	1.13	51.3	24.0	0.91 ± 0.06	0.42 ± 0.14

měření s HM8115-2

C [μF]	P [W]	U [V]	I [mA]	$\cos \varphi$	$ \varphi $
0.5	0.121	51.4	9	0.26 ± 0.09	1.30 ± 0.09
0.8	0.399	51.5	16	0.48 ± 0.09	1.07 ± 0.10
0.9	0.544	51.5	19	0.56 ± 0.09	0.98 ± 0.10
1.0	0.700	51.4	21	0.65 ± 0.09	0.87 ± 0.12
1.1	0.876	51.5	23	0.74 ± 0.09	0.74 ± 0.14
1.2	1.042	51.5	25	0.81 ± 0.09	0.63 ± 0.16
1.3	1.187	51.5	27	0.86 ± 0.09	0.55 ± 0.18
1.4	1.302	51.4	28	0.90 ± 0.10	0.44 ± 0.23
1.5	1.391	51.4	29	0.93 ± 0.10	0.37 ± 0.27
1.6	1.463	51.4	29	0.98 ± 0.10	0.19 ± 0.53
1.7	1.504	51.5	30	0.97 ± 0.10	0.23 ± 0.42
1.8	1.537	51.3	30	1.00 ± 0.10	0
1.9	1.555	51.4	30	1.00 ± 0.10	—
2.0	1.560	51.4	30	1.01 ± 0.10	—
2.1	1.555	51.4	30	1.00 ± 0.10	—
2.2	1.547	51.4	30	1.00 ± 0.10	—
2.3	1.539	51.4	30	1.00 ± 0.10	0
2.5	1.515	51.4	30	0.98 ± 0.10	0.19 ± 0.52
3.0	1.445	51.4	29	0.97 ± 0.10	0.25 ± 0.40
4.0	1.325	51.4	28	0.92 ± 0.10	0.40 ± 0.25
5.0	1.246	51.4	27	0.90 ± 0.10	0.46 ± 0.22
7.0	1.154	51.3	26	0.87 ± 0.10	0.53 ± 0.20
10.0	1.084	51.3	25	0.85 ± 0.10	0.56 ± 0.19

Tabulka 4: Závislost proudu I a výkonu P v RLC obvodu na zařazené kapacitě, účinník $\cos \varphi$ a abs. hodnota fázového posunu proudu a napětí $|\varphi|$. Při měření s wattmetrem byl proud při $C = 0.5 \mu\text{F}$ stanoven za rozsahu 10 mA na použitém ampérmetru, ostatní hodnoty za rozsahu 30 mA. Při uvedení hodnoty $|\varphi|$ "—" značí, že ji nelze stanovit, neboť $\cos \varphi > 1$ z naměřených hodnot, "0" značí, že hodnota $\cos \varphi$ je velice blízko 1, tedy $|\varphi|$ blízko 0, ale s velikou relativní chybou (to vychází z (14) pro výpočet chyby $\arccos x$).

3 Diskuse výsledků

Výsledky měření samostatných prvků obvodu odpovídají (s výjimkou cívky) teoretickému modelu. Účinník rezistoru je 1 a kondenzátoru 0 s prakticky minimální chybou, pouze cívka s $\cos \varphi = (0.40 \pm 0.4)$ má tak velký parazitní odpor (který je spočítán pro náhradní zapojení, viz. tab. 2), že ji nelze narozdíl od kondenzátoru považovat za

ideální. Při použití HM8115-2 pak můžeme rozeznat drobné odchylky chování oproti teoretickým předpokladům i pro kapacitu a rezistor. Zatímco účinník rezistoru se ale v rámci chyby opět neliší od teor. hodnoty, u kondenzátoru už je pozorována přítomnost parazitního odporu, který je ovšem řádově menší než rezistoru či cívky, a proto je i později kondenzátor považován za ideální. Nevýhodou měření s HM8115-2 je menší rozlišení při měření proudu I a tím generovaná větší chyba.

Před měřením RC obvodu jsem pomocí multimetru stanovil velikost odporu použitého rezistoru jako $R = 0.98 \text{ k}\Omega$, tedy mohu s ní porovnat hodnoty naměřené. Na základě výsledků a dopočtených statistických chyb předpokládám, že vhodnější pro určení odporu je zapojení paralelní, tyto výsledky jsou se skutečností v dobré shodě. Již zde si je však možno všimnout, že účinník se v jednom případě až příliš liší od teoretické maximální hodnoty 1 (při měření s wattmetrem a $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$), ačkoli ta stále leží v intervalu chyby.

Jak je patrné, pro zachycení závislosti velikosti proudu a výkonu na zařazené kapacitě v RLC obvodu jsem zvolil takové velikosti C , aby byl dobře patrný moment rezonance, tedy místa křivky, kde se ta nejvíce mění. Okolo těchto hodnot C při měření s wattmetrem je však zarážející, že účinník obvodu vychází o dost větší než je jeho teoreticky předpokládané maximum (i mimo trojnásobný interval chyby). Tuto nejspíše systematickou chybu přikládám buď stáří přístroje (wattmetru či spíše ampérmetru), nebo ne čistě harmonickému průběhu výstupního napětí. Navíc při měření s HM8115-2 zůstal jak ampérmetr, tak multimetr zapojen, aby při analogickém měření šlo o identický obvod. Ovšem hodnoty I a U byly odečítány současně s P z HM, což by u napětí hrát roli nemělo, ale při měření proudu je započítána i větev multimetru (ačkoli rozdíl při řádovém odporu voltmetru $M\Omega$ je méně než 1 mA). Nakonec ještě při měření parametrů pro $C = 1.6 \text{ }\mu\text{F}$ došlo nejspíše k chybnému odečtení dat ze stupnice ampérmetru.

4 Závěr

Naměřil jsem účinník rezistoru $\cos \varphi = (1.01 \pm 0.06)$, kondenzátoru ($C = 10 \text{ }\mu\text{F}$) $\cos \varphi = (0.0035 \pm 0.0007)$ a cívky $\cos \varphi = (0.40 \pm 0.04)$ v samostatném zapojení a spočetl náhradní paralelní i sériové zapojení cívky: $R_S = (0.69 \pm 0.14) \text{ k}\Omega$, $L_S = (4.99 \pm 0.40) \text{ H}$, $R_P = (4.24 \pm 0.10) \text{ k}\Omega$, $L_P = (5.96 \pm 0.70) \text{ H}$. Měření a výsledky ilustrují tabulky 1 a 2.

Změřen byl účinník paralelního a sériového RC obvodu a z hodnot paralelního zapojení byl stanoven odpor zařazeného rezistoru $R = (0.997 \pm 0.017) \text{ k}\Omega$. Měření a výsledky ilustruje tabulka 3.

Zaznamenána byla i závislost výkonu P a proudu I na zařazené kapacitě C v RLC obvodu. Závislost je ilustrována tabulkou 4 a grafy na obr. 1, 2 a 3. Rezonance byla nalezena v blízkosti $C = 2.0 \text{ }\mu\text{F}$.

Výsledky byly zpracovány a grafy sestrojeny pomocí programu *R 2.10.1*.

Použitá literatura

- [1] Bakule R., Šternberk J.: Fyzikální praktikum II, SPN, Praha 1989
- [2] English J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření, 1999, <http://physics.mff.cuni.cz/to.en/vyuka/zfp>