

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM II.

úloha č..6.....

Název: Měření účinníku.....

Pracoval: Jakub Michálek..... stud. skup..12..... dne: 16. října 2009

Odevzdal dne: .....

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
	max. 20	

Posuzoval:..... dne.....

# Pracovní úkoly

1. Změřte účinník:
  - (a) rezistoru,
  - (b) kondenzátoru ( $C = 10 \mu\text{F}$ )
  - (c) cívky.

Určete chybu měření. Diskutujte shodu výsledků s teoretickými hodnotami pro ideální prvky. Pro cívku vypočtete indukčnost a odpor v sériovém a paralelním náhradním zapojení.

2. Změřte účinník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru ( $C \in \{1; 2; 5; 10\} \mu\text{F}$ ). Z naměřených hodnot stanovte odpor rezistoru. Určete chyby měření a rozhodněte, které z obou zapojení je v daném případě vhodnější pro stanovení odporu.
3. Změřte závislost proudu a výkonu na velikosti kapacity zařazené do sériového RLC obvodu.
4. Výsledky úkolu 3. zpracujte graficky, v závislosti na zařazené kapacitě vynesete účinník, fázový posuv napětí vůči proudu a výkon.

## 1 Teorie

### 1.1 Zpracování

Při výpočtu chyb odvozených veličin užívám Gaussův vzorec,

$$\Delta f(x_i) = \sqrt{\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}, \quad (1)$$

v němž značím  $\Delta$  absolutní chyby (kvadratický součet statistické chyby a chyby měřidla); dále značím  $\delta$  relativní chyby. Gaussův vztah platí pro nekorelované veličiny.

### 1.2 Účinník

Pro příkon obvodu platí vztah

$$P = UI \cos \varphi \iff \cos \varphi = \frac{P}{UI}, \quad (2)$$

kde  $U$  značí efektivní napětí,  $I$  efektivní proud a  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  jejich fázový posun. Veličinu  $\cos \varphi$  nazýváme účinník. Pro její chybu platí podle 1

$$\delta(\cos \varphi) = \sqrt{\delta_U^2 + \delta_I^2 + \delta_P^2}. \quad (3)$$

### 1.3 RLC obvody ve stacionárním stavu

Při analýze stacionárního stavu RLC obvodů lze pracovat v komplexní symbolice. Měřené veličiny zde dostaneme jako reálnou část jejich komplexních analogů; komplexní analogy vycházejí z goniometrického tvaru komplexního čísla, v němž se za velikost komplexního čísla považuje velikost veličiny a za argument fáze. Přitom platí podle [1] zobecněný Ohmův vztah

$$u = Zi,$$

kde  $i$  značí okamžitý komplexní proud,  $u$  okamžité komplexní napětí a  $Z$  impedanci, kterou lze odvodit z vztahu mezi napětím a proudem pro kondenzátor  $Z_C$ , resp. pro cívku  $Z_L$ , ve tvaru

$$Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C},$$

kde  $C$  značí kapacitu kondenzátoru,  $L$  indukčnost cívky a  $j$  komplexní jednotku. Pro odpor volíme prostě  $Z_R = R$ , protože napětí a proud jsou ve fázi. Pro sériově a paralelně spojené impedance platí podobné vztahy jako pro odpor.

### 1.4 RLC sériově

Impedanci sériového zapojení získáme sečtením impedancí dílčích prvků

$$Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}.$$

Pro odpor a cívku nebo kondenzátor sériově stačí hodnotu chybějící charakteristiky vynechat, což dá

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\frac{1}{\omega RC}, \quad \operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R}. \quad (4)$$

Z předchozích rovnic vyjádříme indukčnost z měření veličin v sériovém RL obvodě

$$L = \frac{U}{\omega I} \sqrt{1 - \frac{P^2}{U^2 I^2}}, \quad R = \frac{P}{I^2}. \quad (5)$$

Odsud již výpočtem podle vztahu (1) zjistíme chyby

$$\Delta L = \frac{U}{\omega I} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{U^2 I^2}}} \sqrt{\left(\frac{P^2}{U^2 I^2}\right)^2 \delta_P^2 + \left(\frac{2P^2}{U^2 I^2} - 1\right)^2 \delta_I^2 + \delta_U^2}, \quad \delta_R = \sqrt{\delta_P^2 + 4\delta_I^2}.$$

Analogické vzorce lze odvodit i pro ostatní chyby; pro úsporu místa je vynechávám.

Další vzorce se odvodí analogicky; pro RC obvod stačí dosadit druhý vztah (4) do vztahu (2),

$$R = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{UI}{P}\right)^2 - 1}}. \quad (6)$$

## 1.5 RLC paralelně

Impedanci sériového zapojení získáme jako převrácenou hodnotu součtu převrácených hodnot

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L} - \omega RC$$

Stačilo si uvědomit, že převrácená hodnota má opačný argument. Pro odpor a cívku nebo kondenzátor paralelně stačí převrácenou hodnotu chybějící charakteristiky vynechat, což dá

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\omega RC, \quad \operatorname{tg} \varphi_L = \frac{R}{\omega L}. \quad (7)$$

Z předchozích rovnic vyjádříme indukčnost a parazitní odpor z měřených veličin v paralelním RL obvodu

$$L = \frac{U}{\omega I} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P^2}{I^2 U^2}}}, \quad R = \frac{U^2}{P}. \quad (8)$$

Pro RC obvod stačí dosadit druhý vztah (4) do vztahu (2),

$$R = \frac{1}{\omega C} \sqrt{\left(\frac{UI}{P}\right)^2 - 1}. \quad (9)$$

Prvek	příkon [dílky]	příkon [W]	napětí [V]	proud [mA]	účinník
Odpor	151,0	3,78	61,5	58,0	$1,06 \pm 0,02$
	151,0	3,78	61,6	58,0	$1,06 \pm 0,02$
	151,0	3,78	61,6	57,7	$1,06 \pm 0,02$
Kondenzátor	16,2	0,41	62,6	195,0	$0,033 \pm 0,001$
	16,5	0,41	62,5	194,0	$0,034 \pm 0,001$
Cívka	34,3	0,86	62,2	33,8	$0,41 \pm 0,01$
	34,7	0,87	62,2	33,6	$0,42 \pm 0,01$

Tabulka 1: Samotné prvky.

$P$ [W]	$U$ [V]	$I$ [mA]	$R_S$ [ $\Omega$ ]	$L_S$ [H]	$R_P$ [ $\Omega$ ]	$L_P$ [H]
0,86	62,2	33,8	$750 \pm 20$	$5,35 \pm 0,14$	$4500 \pm 100$	$6,4 \pm 0,2$
0,87	62,2	33,6	$770 \pm 20$	$5,36 \pm 0,14$	$4500 \pm 100$	$6,5 \pm 0,2$

Tabulka 2: Indukčnost náhradního zapojení.

## 2 Výsledky měření

### 2.1 Samotné prvky

Dílky na stupnici **wattmetru** jsem měřil s přesností 0,3 dílku; jednalo se o přístroj třídy přesnosti 0,2. Jedná se o maximální chybu  $u$  z rozsahu v procentech; za předpokladu rovnoměrného rozdělení uvádí [2] směrodatnou chybu  $\sigma = \frac{u}{\sqrt{3}} = 0,02$  W. Uvážil jsem nepřesnost odečítání příkonu třetinu dílku  $s_P = 0,01$  W, což ale chybu danou přesností přístroje skoro neovlivní.

**Ampérmetr** byl třídy přesnosti 1,5 a všechna měření v tomto úkolu probíhala na stupnici o rozsahu 100 mA, takže chyba činí  $\sigma_I = 0,9$  mA.

V režimu **voltmetru** jsem používal digitální multimetr, který má chybu 0,8 % z hodnoty a 0,1 V.

Výsledky měření samotných prvků a chyby vypočítané podle (3) jsem zaznamenal do tab. 1.

Frekvenci jsem ověřil vlnočtem  $f = (50,0 \pm 0,4)$  Hz.

### 2.2 Indukčnost a odpor cívky

Výsledky výpočtu odporu a indukčnosti cívky, které jsem zjistil odsazením do rovnic (5) a (8) shrnuje tab. 2.

$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	$U$ [V]	$P$ [W]	$I$ [mA]	$\cos \varphi$	$R$ [ $\Omega$ ]
Sériové zapojení					
10,0	61,8	3,5	59,0	$0,95 \pm 0,02$	$960 \pm 20$
5,0	61,9	2,8	52,6	$0,84 \pm 0,02$	$1000 \pm 20$
2,0	62,4	1,1	33,3	$0,53 \pm 0,02$	$990 \pm 30$
1,0	62,4	0,3	18,6	$0,30 \pm 0,03$	$1000 \pm 40$
Paralelní zapojení					
10,0	61,8	4,2	206,0	$0,33 \pm 0,03$	$900 \pm 20$
5,0	61,9	3,9	119,0	$0,53 \pm 0,03$	$1010 \pm 20$
2,0	61,7	3,8	74,0	$0,83 \pm 0,03$	$1060 \pm 30$
1,0	61,6	3,8	64,2	$0,96 \pm 0,03$	$960 \pm 30$

Tabulka 3: Účinník a odpor rezistoru v RC obvodech.

## 2.3 Účinník RC obvodu

Jako kondenzátor se při měření odporu používá kondenzátorová dekáda, jejíž údaje považuji za přesné. U sériového obvodu jsem provedl dvě měření, protože první první měření vykazovalo příliš nízké údaje. Výsledky jsem zjistil podle vztahů (6) a (9) a vynesl do tab. 3.

## 2.4 Závislost proudu a výkonu na kapacitě v RLC obvodě

Výsledky měření i s chybami shrnuje tab. 4. Z dat jsem vyřadil měření pro kapacitu  $C = 5 \mu\text{F}$ , protože při něm patrně došlo k chybě měření způsobené pořadím měření.

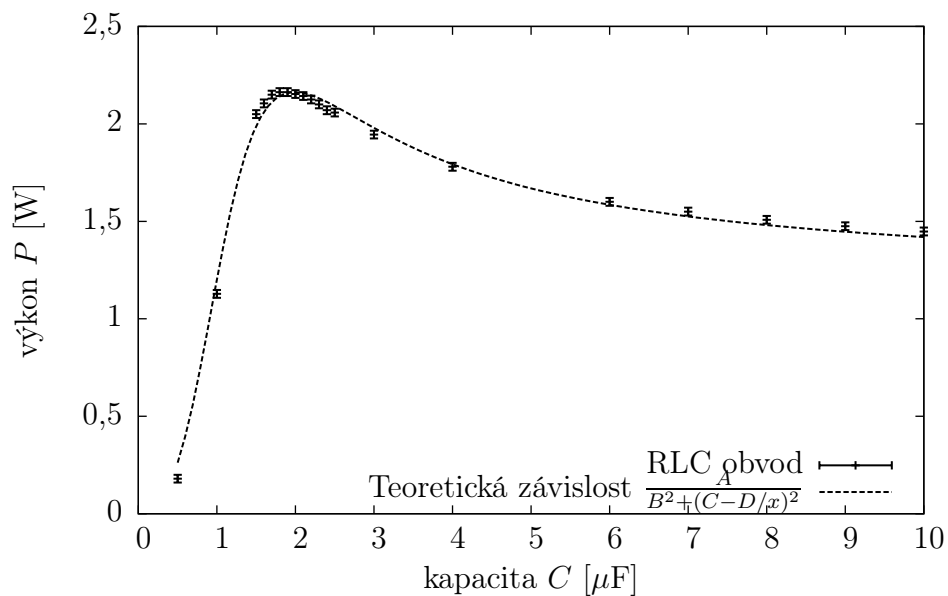
# 3 Diskuse

## 3.1 Měření samotných prvků

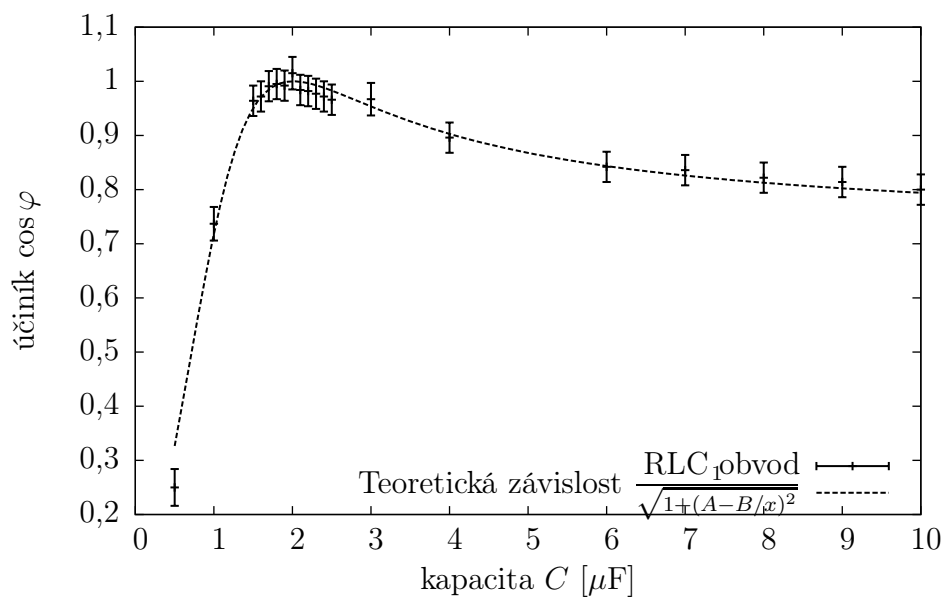
Při měření samotných prvků se potvrdil teoretický model, protože účinník rezistoru se ukázal být blízký jedničce (impedance rezistoru se rovná reálnému odporu),  $\cos \varphi = (1,06 \pm 0,02)$ . Měření účinníku ovšem vykazovalo systematickou chybu, která způsobila, že účinník vychází někdy vyšší než jednička; tuto chybu přisuzuji jednak neideálním prvkům obvodu, jednak tomu, že puls nebyl harmonický, ale obsahoval i vyšší frekvence. Systematickost chyby dovozují z toho, že očekávaná hodnota se od naměřené liší o několik směrodatných chyb.

$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	$P$ [W]	$U$ [V]	$I$ [mA]	$\cos \varphi$	$ \varphi $
0,5	0,2	62,6	11,5	0,25	$1,32 \pm 0,04$
1,0	1,1	62,2	24,6	0,74	$0,74 \pm 0,05$
1,5	2,1	62,0	34,3	0,96	$0,27 \pm 0,11$
1,6	2,1	62,2	34,8	0,97	$0,24 \pm 0,12$
1,7	2,2	62,0	35,0	0,99	$0,14 \pm 0,21$
1,8	2,2	62,0	35,1	1,00	$0,10 \pm 0,29$
1,9	2,2	62,2	35,1	0,99	$0,13 \pm 0,22$
2,0	2,2	62,0	34,2	1,02	—
2,1	2,1	62,2	35,0	0,98	$0,18 \pm 0,16$
2,2	2,1	62,2	34,8	0,98	$0,19 \pm 0,15$
2,3	2,1	62,1	34,6	0,98	$0,21 \pm 0,13$
2,4	2,1	62,1	34,3	0,97	$0,24 \pm 0,12$
2,5	2,1	62,1	34,3	0,97	$0,26 \pm 0,11$
3,0	1,9	61,9	32,5	0,97	$0,26 \pm 0,12$
4,0	1,8	62,1	32,0	0,90	$0,46 \pm 0,06$
5,0	1,5	62,2	31,1	0,79	$0,65 \pm 0,04$
6,0	1,6	62,3	30,5	0,84	$0,57 \pm 0,05$
7,0	1,6	62,4	29,7	0,84	$0,58 \pm 0,05$
8,0	1,5	62,4	29,4	0,82	$0,61 \pm 0,05$
9,0	1,5	62,3	29,1	0,81	$0,62 \pm 0,05$
10,0	1,4	62,0	29,2	0,80	$0,64 \pm 0,05$

Tabulka 4: Účinník, proud, absolutní hodnota fázového posuvu a výkon v závislosti na kapacitě. Chyba účinníku činila shodně pro všechny hodnoty 0,03. V případě, kdy byl účinník vyšší než 1, neuvádím fázový posuv.

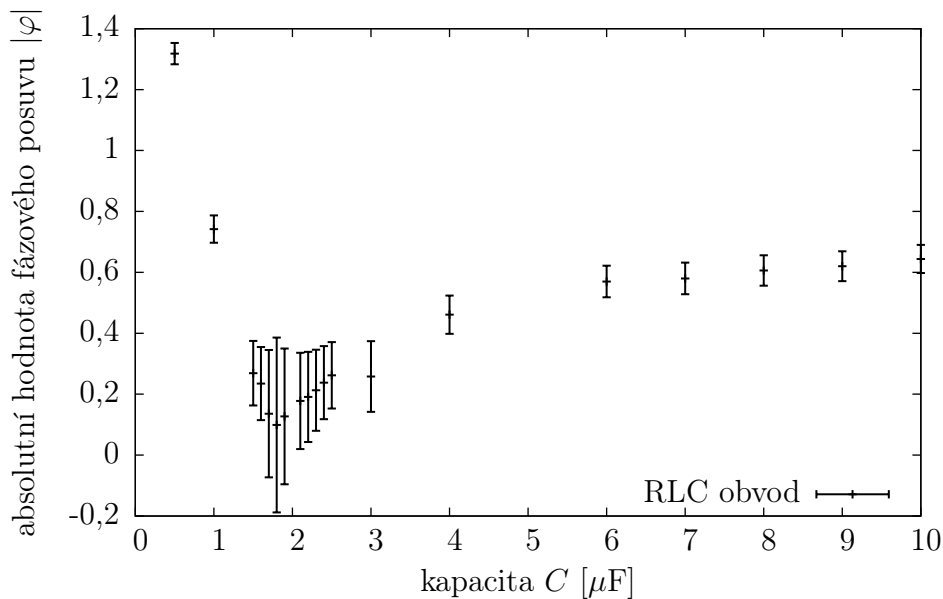


Obrázek 1: Závislost výkonu na kapacitě.



Obrázek 2: Závislost účinníku na kapacitě, kde jsem fitováním dostal parametry  $\{A\} = (0,95 \pm 0,02)$  a  $\{B\} = (1,93 \pm 0,06)$ .





Obrázek 3: Závislost absolutní hodnoty fázového posuvu na kapacitě.

U kondenzátoru se hodnota ( $0,033 \pm 0,001$ ) shoduje velmi dobře s předpokladem, že kondenzátor má jen malý parazitní odpor a jeho impedanci tvoří především imaginární složka. U cívky jsem naměřil ( $0,41 \pm 0,01$ ), což je shoda o dost horší; podle [1, s. 43] je u cívek obtížné dosáhnout zanedbatelného odporu. Proto jsem určil parazitní odpor v sériovém a paralelním zapojení, který shrnuje tab. 2. Hodnoty vypočtené indukčnosti se řádově shodují, ale u odporů přesahuje rozdíl jeden řád; domnívám se, že v tomto případě vystihuje situaci lépe sériově zapojený odpor.

U cívky se bohužel nepodařilo sehnat měřič indukčnosti, se kterým bychom mohli naměřené hodnoty porovnat.

### 3.2 RC obvod

Při měření účinníku paralelního a sériového zapojení kondenzátoru a odporu jsem mohl hodnoty uvedené v tab. 3 porovnat s hodnotou odporu  $R = 993 \Omega$ , kterou udává zhotovitel experimentu. Na základě shody s touto hodnotou a chybami u výsledků se přikláním k tomu, že měření v sériovém zapojení dává přesnější výsledky.

### 3.3 RLC obvod

Při měření jsem zvolil takovou stupnici, abych nejlépe postihl závislost: Nejvíce bodů by mělo být v místech, kde se křivka nejvíce mění. Měřené veličiny vykazují peak v okolí kapacity  $C = 2 \mu\text{F}$ , při které se obvod dostává do rezonance.

Jak je patrné z obr. 1, naměřená závislost výkonu se dobře shoduje s teoretickou závislostí, kterou předvídá vztah (2), ale parametry mají tak vysoké chyby, takže by porovnání s dříve naměřenými hodnotami postrádalo smysl. Analogický jsem postupoval u grafu účinníku (obr. 2), který jsem opět proložil teoretickou závislostí jednoduše odvozenou v sekci 1.4. Závislosti se na měřeném úseku dobře shodují.

## 4 Závěr

Naměřil jsem účinník rezistoru  $\cos \varphi = (1,06 \pm 0,02)$ , účinník kondenzátoru  $(0,033 \pm 0,001)$  a účinník cívky  $(0,41 \pm 0,01)$ . Kromě cívky se hodnoty dobře shodují s těmi, které bychom očekávali u ideálních součástek.

Změřil jsem odpor rezistoru proměřováním parametrů RC obvodu; podle výsledků v tab. 3 vychází  $R = (1000 \pm 50) \Omega$ , což se dobře shoduje s udávanou hodnotou  $993 \Omega$ .

Vynesl jsem závislosti účinníku, výkonu a absolutní hodnoty fázového posuvu na kapacitě v grafech na obr. 1, 2 a 3, které vykazují extrém v okolí kapacity  $C = 2 \mu\text{F}$ .

## Reference

- [1] Bakule, R.; Šternberk, J.: *Fyzikální praktikum II. Elektřina a magnetismus*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.
- [2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. 1999. Dostupný na <http://physics.mff.cuni.cz/to.en/vyuka/zfp/mereni.pdf> (přístup 16. října 2009).